$\sum vf$ Àlgebra. Determinants. Sistemes d'equacions lineals.

Determinant d'una matriu quadrada

Definició

Si $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{nxn}$, definim determinant de la matriu A a:

$$Det(A)=|A|=\sum_{\sigma\in P(n)}(-1)^{Sig(\sigma)}\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdot a_{3\sigma(3)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

On σ és una permutació d'n elements i $Sig(\sigma)$ és la seua signatura (nombre d'inversions de σ)

Ordre 1x1

$$|a_{11}|=a_{11}$$

Ordre 2x2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$$

Ordre 3x3 (Regla de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$$

Propietats dels determinants

P1

Si una línia d'un determinant és el vector $\vec{0}$, el determinant val 0.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{vmatrix}=0,\text{ també }\begin{vmatrix} 0 & 3 & -4\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & -2 & 3\end{vmatrix}=0$$

P2

Si dues línies paral·leles d'un determinant són iguals, el determinant val 0.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4\\ 2 & -3 & -4\\ -1 & 2 & 3\end{vmatrix}=0$$

P3

Si dues línies paral·leles d'un determinant són proporcionals, el determinant val 0.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -5\\ 1 & -3 & -4\\ -4 & 2 & 10\end{vmatrix}=0$$

P4

Les línies paral·leles d'un determinant són LD $\leftrightarrow$ el determinant val 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2\\ 3 & -1 & -2\\ 4 & -2 & -4\end{vmatrix}=0$$

P5

Si intercanviem d'ordre dues línies paral·leles d'un determinant, el determinant canvia de signe.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -2\\ -3 & -2 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2\\ 3 & 1 & 2\\ -3 & -2 & 1\end{vmatrix}$$

P6

El determinant d'una matriu i el de la seua transposada són iguals. $|A^t|=|A|$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1\\ -1 & -2 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-2$$

P7

Si substituïm una línia d'un determinant per ella mateix, més una CL de les seues paral·leles, el determinat no varia.

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & -4\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & -3 & -4\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & 0 & -1\end{vmatrix}=11$$

P8

Si multipliquem una línia d'un determinant per un número real, el determinant queda multiplicat per aquest número.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{vmatrix}=-2\rightarrow\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & -2 & 2\end{vmatrix}=-4$$

P9

El determinant d'una matriu triangular és igual al producte dels elements de la diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} -5 & -3 & -4\\ 0 & -3 & -4\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=15$$

P10

Si una línia s'expressa com a suma de dos sumands, el determinant és igual a la suma de dos determinants, tal com s'indica:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a+a' & a_{13}\\ a_{21} & b+b' & a_{23}\\ a_{31} & c+c' & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a & a_{13}\\ a_{21} & b & a_{23}\\ a_{31} & c & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a' & a_{13}\\ a_{21} & b' & a_{23}\\ a_{31} & c' & a_{33}\end{vmatrix}$$

P11-12-13-14 Si $k\in R$ i $A,B\in\mathcal{M}_{nxn}\rightarrow$

$$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$$
$$|k\cdot B|=k^n\cdot|B|$$
$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$$
$$|A^d|=|A|^{n-1}$$

Matriu regular

$A\in\mathcal{M}_{nxn}$ és regular $\leftrightarrow|A|\neq0$

Matriu singular

$A\in\mathcal{M}_{nxn}$ és singular $\leftrightarrow|A|=0$

Menor complementari d'un element

Si $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{nxn}$, anomenem menor complementari de l'element a_{ij} a: α_{ij} que és igual al determinant que resulta d'eliminar la fila "i" i la columna "j".

Adjunt d'un element

Si $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{nxn}$, definim adjunt de l'element a_{ij} a: $\Delta_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot\alpha_{ij}$.

Matriu adjunta

Si $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{nxn}$, definim matriu adjunta de la matriu A a: A^d que és la matriu que resulta de substituir cada element pel seu adjunt.

Desenvolupament d'un determinant

Si $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{nxn}$, es pot demostrar que:

$|A|=a_{i1}\cdot\Delta_{i1}+a_{i2}\cdot\Delta_{i2}+\cdots+a_{in}\cdot\Delta_{in}$ (fila i)

també

$|A|=a_{1j}\cdot\Delta_{1j}+a_{2j}\cdot\Delta_{2j}+\cdots+a_{nj}\cdot\Delta_{nj}$ (columna j)

Matriu inversa

Si $A\in\mathcal{M}_{nxn}$ és regular $\leftrightarrow|A|\neq0$

A té inversa i:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot(A^t)^d$$

Rang d'una matriu

Siga $A\in\mathcal{M}_{mxn}$

De tots els subdeterminants diferents de zero que podem extraure de la matriu, considerem el de major ordre (kxk).

$$rang(A)=k$$

Sistemes d'equacions lineals

Sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+\cdots+a_{3n}x_n=b_3\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{array}\right\}\equiv S$$

$a_{ij}\in R$ coeficients del sistema.

$b_i\in R$ termes independents.

x_i incògnites del sistema.

Solució d'un sistema

Direm que $x_1=s_1,x_2=s_2,x_3=s_3,\ldots,x_n=s_n$ és solució del sistema $S\leftrightarrow$ al substituir cada incògnita pel seu valor, s'acompleixen ***totes*** les equacions.

Sistemes equivalents

Dos sistemes són equivalents sii tenen les maeixes solucions.

Tipus de sistemes segons la solució

$$S\begin{cases} SI\ (Sistema\ Incompatible).\ No\ té\ solució.\\ SC\ (Sistema\ Compatible).\ Té\ solució\begin{cases} SCD\ (Determinat).\ Solució\ única.\\ SCI\ (Indeterminat).\ Infinites\ solucions.\end{cases}\end{cases}$$

Estudi i càlcul de la solució d'un sistema

Mètode de Gauss

- Si intercanviem d'ordre dues equacions, el sistema resultant és equivalent al primer.
- Si multipliquem una equació per un número diferent de zero, el sistema resultant és equivalent al primer.
- Si eliminem una equació LD de les altres, el sistema resultant és equivalent al primer.
- Si substituïm una equació per ella mateix més una CL de les altres, el sistema resultant és equivalent al primer.
- El sistema serà SI (no té solució) si es dóna una incongruència de la forma $0=k$ on $k\neq0$.
- Si cada equació d'un sistema té escalonadament una incògnita menys que l'anterior, totes les equacions són LI.
- Si totes les equacions són LI, el sistema és compatible (té solució).
- Si hi ha tantes equacions LI com incògnites, el sistema és compatible determinat (solució única)

Expressió matricial d'un sistema

El sistema S pot expressar-se matricialment de la següent forma $AX=B$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

Matriu del coeficients

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

Incògnites

$$X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

Termes independents

$$B=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

S. Homogeni si $B=(0)_{mx1}$

Sistema de Cramer **El sistema $A\cdot X=B$ és de Cramer $\leftrightarrow$ té n equacions, n incògnites i $|A|\neq0$.** **Solució**:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ b_3 & a_{32} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}}{|A|},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & b_3 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}}{|A|},\ \ldots,\ x_n=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & b_1\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & b_2\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & b_3\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & b_n\end{vmatrix}}{|A|}$$

Teorema de Rouche Frobenius

El sistema S és compatible $\leftrightarrow rang(A)=rang(\bar{A})$ on $\bar{A}$ és la matriu ampliada; $\bar{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{pmatrix}$

Sistema amb n incògnites	$rang(A)=rang(\bar{A})=k$ Sistema Compatible	$rang(A)=rang(\bar{A})=k=n$	**SCD** solució única
		$rang(A)=rang(\bar{A})=k<n$	**SCI** infinites solucions. $GI=n-k$
	$rang(A)\neq rang(\bar{A})$	**SI** Sistema Incompatible. **No té solució.**	