$\sum vf$

Probabilitat

Experiment aleatori E. Un experiment és aleatori quan el seu resultat no es pot predir amb anterioritat. En cas contrari, es diu determinista. En realitzar un experiment aleatori no saben quin serà el seu resultat, però sí que coneixem per endavant tots els seus possibles resultats.

Experiment compost. És un experiment que consta de dos o més experiments.

Espai mostral Ω. Conjut format per tots els possibles resultats al realitzar un experiment aleatori.

Esdeveniment o succés. Cadascun dels possibles resultats d'un experiment s'anomena esdeveniment elemental. Qualsevol subconjunt de l'espai mostral l'anomenarem esdeveniment. Es denota amb lletra majúscula.

Conjunt d'esdeveniments $\mathcal{P}(\Omega)$. Conjunt format per tot els esdeveniments al realitzar un experiment E.

Esdeveniments

Esdeveniment segur Ω

És l'esdeveniment que sempre es dóna al realitzar un experiment. El mateix espai mostral és l'esdeveniment segur Ω.

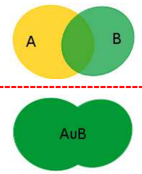
Esdeveniment impossible $\emptyset$

L'esdeveniment que mai es dóna al realitzar un experiment.
Es representa per $\emptyset$ (conjunt buit).

Operacions amb esdeveniments

Unió $\cup$

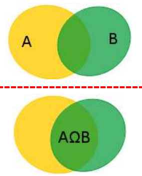
Si A i B són esdeveniments, anomenem esdeveniment *unió* d'A i B un altre esdeveniment $A \cup B$ que es dóna si es dóna A **o** es dóna B, almenys un dels dos.



Intersecció $\cap$

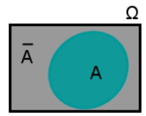
Si A i B són esdeveniments, anomenem esdeveniment *intersecció* d'A i B un altre esdeveniment $A \cap B$ que es dóna si es dóna A **i** es dóna B, els dos a la vegada.

Esdeveniments incompatibles A i B són incompatibles$\leftrightarrow A \cap B = \emptyset$



Complementació

Si A és un esdeveniment, anomenem esdeveniment *complementari* o *contrari* d'A a un altre esdeveniment $\bar{A}$ que es dóna si no es dóna A.



Propietats

$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	$\bar{\bar{A}} = A$
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	$\bar{\emptyset} = \Omega$
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$\bar{\Omega} = \emptyset$
$A \cup \Omega = \Omega$	$A \cap \Omega = A$	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
$A \cup \bar{A} = \Omega$	$A \cap \bar{A} = \emptyset$	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Probabilitat d'un esdeveniment

Primera noció de Probabilitat

La *probabilitat* d'un esdeveniment, A, indica el grau de possibilitat que ocorrega aquest esdeveniment. S'expressa mitjançant un número comprés entre 0 i 1, i ho escrivim $P(A)$. $\mathbf{0 \le P(A) \le 1}$.

Si $P(A)$ és pròxim a 0 l'esdeveniment és poc probable i serà més probable com més s'aproxime a 1, que és la probabilitat de l'esdeveniment segur, $\mathbf{P(\Omega) = 1}$.

Quan es repeteix un experiment aleatori moltes vegades, la freqüència relativa amb què apareix un esdeveniment tendeix a estabilitzar-se cap a un valor fix, a mesura que augmenta el nombre de proves realitzades. Aquest resultat, conegut com **llei dels grans números**, ens porta a definir la probabilitat d'un esdeveniment com el número cap al qual tendeix la freqüència relativa en repetir l'experiment moltes vegades. $\mathbf{P(A) = f_r(A)}$.

Regla de Laplace

Quan dos esdeveniments tenen la mateixa probabilitat de passar, en realitzar un experiment aleatori, es diuen **equiprobables**. Si en un espai mostral tots els esdeveniments elementals són equiprobables, l'experiment es diu regular i la probabilitat d'un esdeveniment qualsevol A, es pot calcular amb la **Regla de Laplace**, segons la qual n'hi ha prou amb comptar, i fer el quocient entre el nombre d'esdeveniments elementals que componen A i el nombre total d'esdeveniments elementals de l'espai mostral Ω. Se sol enunciar així:

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{número\ d'elements\ favorables\ a\ A}{número\ d'elements\ possibles} = \frac{card(A)}{card(\Omega)}}$$

Definició axiomàtica

Definició. És una aplicació $\boldsymbol{P}: \boldsymbol{\mathcal{P}(\Omega)} \longrightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ que acompleix els seguents axiomes:

ax1: $\boldsymbol{P(\Omega) = 1}$

ax2: **Si A i B són incompatibles** $\rightarrow \boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

Propietats de la Probabilitat

$0 \le P(A) \le 1$

$P(\emptyset) = 0$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Si $A \subseteq B \longrightarrow P(A) \le P(B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$A_i \cap A_j = \emptyset$ on $i \ne j \rightarrow P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$P(A - B) = P(A \cap \bar{B})$

Probabilitat condicionada

Hi ha casos en què necessitem conéixer la probabilitat d'un esdeveniment, sabent que prèviament n'ha ocorregut un altre. És el que es coneix com probabilitat condicionada. Si B representa l'esdeveniment que ha passat i A l'esdeveniment pel qual ens demanem la probabilitat, l'expressió que ens permet de calcular la probabilitat que ocórrega l'esdeveniment A sabent que ha ocorregut B, és:

$$\boldsymbol{P\left({}^{A}/_{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Esdeveniments independents. Direm que els esdeveniments A i B són independents, si i sols si, la realització d'un d'ells no condiciona la realització de l'altre. D'aquesta manera, tenim: $P\left({}^{A}/_{B}\right) = P(A)$, també $P\left({}^{B}/_{A}\right) = P(B)$.

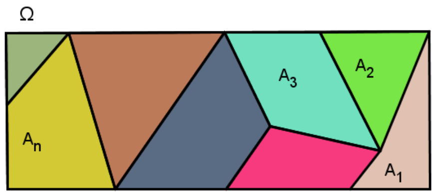
$$P\left({}^{A}/_{B}\right) = P(A) \rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad P\left({}^{B}/_{A}\right) = P(B) \rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Per tant: A i B són independents$\leftrightarrow$ $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$

Sistema complet d'esdeveniments

Direm que els esdeveniments $A_1, A_2, A_3, \dots A_{n-1}, A_n$ formen un sistema complet d'esdeveniments si i sols si

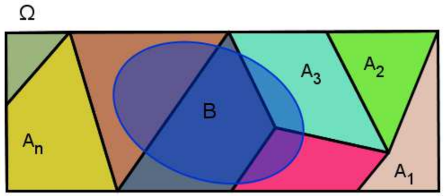
$$\begin{cases} A_i \cap A_j = \emptyset \ \ on\ i \ne j \\ \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega \end{cases}$$



Teorema de la Probabilitat Total

Siga $\boldsymbol{A_1, A_2, A_3, \dots A_{n-1}, A_n}$ sistema complet d'esdeveniments i $\boldsymbol{B \in \mathcal{P}(\Omega)}$. Tenim:

$$P(B) = P\left({}^{B}/_{A_1}\right) \cdot P(A_1) + P\left({}^{B}/_{A_2}\right) \cdot P(A_2) + P\left({}^{B}/_{A_3}\right) \cdot P(A_3) + \cdots P\left({}^{B}/_{A_n}\right) \cdot P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P\left({}^{B}/_{A_i}\right) \cdot P(A_i)$$



Teorema de Bayes

Siga $\boldsymbol{A_1, A_2, A_3, \dots A_{n-1}, A_n}$ sistema complet d'esdeveniments i $\boldsymbol{B \in \mathcal{P}(\Omega)}$. Tenim:

$$P\left({}^{A_i}/_{B}\right) = \frac{P\left({}^{B}/_{A_i}\right) \cdot P(A_i)}{P(B)}$$

Aquesta taula ajuda a assignar probabilitats, $\#\{A\}$ significa número d'elements d'A

	A_1	A_2	A_3	...	A_{n-1}	A_n	**Total**
$\boldsymbol{B}$	$\#\{A_1 \cap B\}$	$\#\{A_2 \cap B\}$	$\#\{A_3 \cap B\}$	...	$\#\{A_{n-1} \cap B\}$	$\#\{A_n \cap B\}$	$\#\{B\}$
$\boldsymbol{\bar{B}}$	$\#\{A_1 \cap \bar{B}\}$	$\#\{A_2 \cap \bar{B}\}$	$\#\{A_3 \cap \bar{B}\}$	...	$\#\{A_{n-1} \cap \bar{B}\}$	$\#\{A_n \cap \bar{B}\}$	$\#\{\bar{B}\}$
Total	$\#\{A_1\}$	$\#\{A_2\}$	$\#\{A_3\}$	...	$\#\{A_{n-1}\}$	$\#\{A_n\}$	$\#\{\Omega\}$