Espai afí E_3

Definició d'espai afí. Anomenem espai afí associat al conjunt de vectors $\boldsymbol{V_3}$, a: $\boldsymbol{E_3}$. Els seus elements els anomenem punts i els denotem amb majúscules. A més, existeix una aplicació $: E_3 x E_3 \longrightarrow V_3$, on a cada parell de punts $P, Q \in E_3$ li correspon un únic vector anomenat $\overrightarrow{PQ}$. Aquesta aplicació acompleix els axiomes:

- $\forall\ P, Q, R \in E_3 \longrightarrow \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$
- $\forall\ P \in E_3\ i\ \forall \vec{v} \in V_3\ \exists\ (un\ únic)\ Q \in E_3\ /\ \overrightarrow{PQ} = \vec{v}$

Propietats que es deriven de la definició:

- $\overrightarrow{PP} = \vec{0}\quad \forall P \in E_3$
- $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}\quad \forall P, Q \in E_3$
- $Si\ \overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{P_2Q_2} \longrightarrow \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{Q_1Q_2}$
- $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = \vec{0}\ \forall P, Q, R \in E_3$

Sistema de referència. Direm que els punts O, P_1, P_2, P_3 formen un sistema de referència de l'espai E_3 si els vectors $\vec{e_1} = \overrightarrow{OP_1}, \vec{e_2} = \overrightarrow{OP_2}, \vec{e_3} = \overrightarrow{OP_3}$ són base de V_3. Si els vectors $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ són ortogonals i unitaris, el sistema de referència es diu ortonormal.

Sistema de referència canònic. Els punts $O(0,0,0)$, $P_1(1,0,0)$, $P_2(0,1,0)$ i $P_3(0,0,1)$ formen un sistema de referència ortonormal de l'espai E_3.

Vector que uneix dos punts. Donats el punts $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3) \in E_3 \longrightarrow \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) \in V_3$, origen A i extrem B.

Punt mitjà d'un segment. El punt mitjà del segment definit pels punts $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3) \in E_3$ és: $P_m(A, B) = \left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2}\right) \in E_3$

Recta afí

Definició. Subespai afí d'E_3 de dimensió 1. Una recta r, queda perfectament determinada per un punt $P(x_0, y_0, z_0)$, per on passa, i pel seu ***vector director*** $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

$$r \equiv \begin{cases} P \in E_3 \\ \vec{v} \in V_3 - \{\vec{0}\} \end{cases}$$

Equació vectorial

$$\boldsymbol{r \equiv (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_1, v_2, v_3);\ \lambda \in R}$$

Equació paramètrica

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1 \\ y = y_0 + \lambda v_2 \\ z = z_0 + \lambda v_3 \end{cases} \lambda \in R}$$

Equació contínua

$$\boldsymbol{r \equiv \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}}$$

$$\boldsymbol{v_1 \neq 0;\ v_2 \neq 0;\ v_3 \neq 0}$$

Equacions implícites

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases}}$$

$$\vec{v} = (A_1, B_1, C_1) \wedge (A_2, B_2, C_2)$$

Recta que passa per dos punts

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} P \in E_3 \\ Q \in E_3 \end{cases} \longrightarrow r \equiv \begin{cases} P \in E_3 \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ} \end{cases}}$$

Pla afí

Definició. Subespai afí d'E_3 de dimensió 2. Una pla π, queda perfectament determinat per un punt $P(x_0, y_0, z_0)$, per on passa, i pels seus ***vectors directors que són LI*** $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

$$\pi \equiv \begin{cases} P \in E_3 \\ \vec{u}, \vec{v} \in V_3 - \{\vec{0}\}\ LI \end{cases}$$

Equació vectorial

$$\boldsymbol{\pi \equiv (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3)\ \alpha, \beta \in R}$$

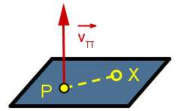
Equació paramètrica

$$\boldsymbol{\pi \equiv \begin{cases} x = x_0 + \alpha u_1 + \beta v_1 \\ y = y_0 + \alpha u_2 + \beta v_2 \\ z = z_0 + \alpha u_3 + \beta v_3 \end{cases} \alpha, \beta \in R}$$

Equació implícita

$$\boldsymbol{\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0}$$

desenvolupant, tenim: $\boldsymbol{Ax + By + Cz = D}$



El vector $\vec{v_\pi} = (\boldsymbol{A, B, C})$ és perpendicular al pla π. S'anomena vector associat al pla π. L'equació de π és: $\pi \equiv \overrightarrow{PX} \cdot \vec{v_\pi} = 0$ on $X(x, y, z)$.

$$\boldsymbol{\pi \equiv A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

Equació segmentària

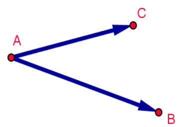
$$\boldsymbol{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \longrightarrow \begin{cases} (a, 0, 0) \\ (0, b, 0)\ tall\ amb\ eixos \\ (0, 0, c) \end{cases}}$$

Equació normal

$$\boldsymbol{\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}z = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

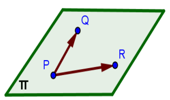
Condició perquè tres punts no estiguen alineats

$\boldsymbol{A, B, C}$ **no estan aliniats sii** $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}}$ **i** $\boldsymbol{\overrightarrow{AC}}$ **són LI.**



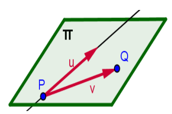
Pla que passa per tres punts no alineats

$$\boldsymbol{\pi \equiv \begin{cases} P \in E_3 \\ Q \in E_3 \\ R \in E_3 \end{cases} \longrightarrow \pi \equiv \begin{cases} P \in E_3 \\ \vec{u} = \overrightarrow{PQ} \\ \vec{v} = \overrightarrow{PR} \end{cases}}$$



Pla determinat per una recta i un punt exterior a aquesta

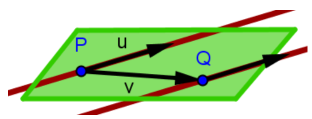
$$\boldsymbol{\pi \equiv \begin{cases} Q \in E_3 \\ r \equiv \begin{cases} P \in E_3 \\ \vec{u} \in V_3 \end{cases} \end{cases} \longrightarrow \pi \equiv \begin{cases} Q \in E_3 \\ \vec{u} \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ} \end{cases}}$$



Pla determinat per dues rectes

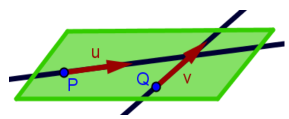
Paral·leles

$$\pi \equiv \begin{cases} r \equiv \begin{cases} P \in E_3 \\ \vec{u} \in V_3 \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} Q \in E_3 \\ \vec{u} \in V_3 \end{cases} \end{cases} \longrightarrow \pi \equiv \begin{cases} P \in E_3 \\ \vec{u} \in V_3 \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ} \end{cases}$$



Secants

$$\pi \equiv \begin{cases} r \equiv \begin{cases} P \in E_3 \\ \vec{u} \in V_3 \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} Q \in E_3 \\ \vec{v} \in V_3 \end{cases} \end{cases} \longrightarrow \pi \equiv \begin{cases} P \in E_3 \\ \vec{u} \in V_3 \\ \vec{v} \in V_3 \end{cases}$$

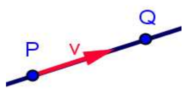


Incidència punt-recta

Donat el punt $Q \in E_3$ i la recta $r \equiv \begin{cases} P \in E_3 \\ \vec{v} \in V_3 - \{\vec{0}\} \end{cases}$

Estudi vectorial

$$\boldsymbol{Q \in r \leftrightarrow rang(\vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = 1}$$



Estudi per equacions

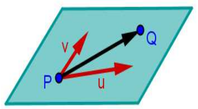
$\boldsymbol{Q \in r} \leftrightarrow$ les coordenades de $\boldsymbol{Q}$ acompleixen les equacions de $\boldsymbol{r}$

Incidència punt-pla

Siga el punt $Q \in E_3$ i el pla $\pi \equiv \begin{cases} P \in E_3 \\ \vec{u}, \vec{v} \in V_3 - \{\vec{0}\}\ LI \end{cases}$

Estudi vectorial

$$\boldsymbol{Q \in \pi \leftrightarrow rang(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = 2}$$



Estudi per equacions

$\boldsymbol{Q \in \pi} \leftrightarrow$ les coordenades de $\boldsymbol{Q}$ acompleixen l'equació de $\boldsymbol{\pi}$

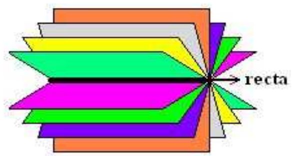
Punt genèric

recta	pla
$(x_0 + \lambda v_1, y_0 + \lambda v_2, z_0 + \lambda v_3)$	$(x_0 + \alpha u_1 + \beta v_1, y_0 + \alpha u_2 + \beta v_2, z_0 + \alpha u_3 + \beta v_3)$

Feix de plans secants

Donada la recta $r \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases}$. Qualsevol pla de la forma:

$\boldsymbol{\pi \equiv (A_1x + B_1y + C_1z - D_1) + k(A_2x + B_2y + C_2z - D_2) = 0\ on\ k \in R}$ conté a la recta $\boldsymbol{r}$.



Feix de plans paral·lels

Donat el pla $\pi \equiv Ax + By + Cz = D$

Tots els plans que són paral·lels a π, són de la forma:

$$\boldsymbol{Ax + By + Cz = k\ on\ k \in R}$$

És així perquè tots tenen de vector associat (normal al pla):

$$\boldsymbol{\vec{v_\pi} = (A, B, C)}$$