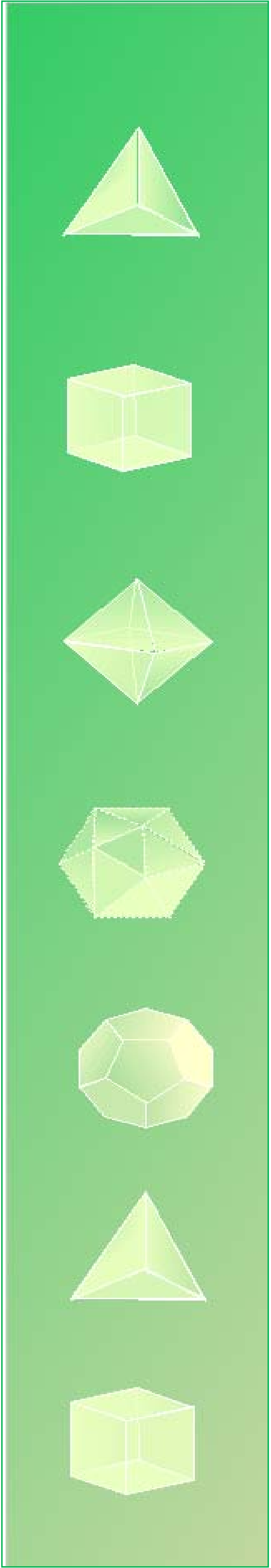
MATEMÁTICAS I:
1º BACHILLERATO
Capítulo 2: Álgebra



Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-060661

Fecha y hora de registro: 2015-01-10 17:30:14.0
Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo

Revisora: Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

Resumen

En este capítulo sobre Álgebra repasaremos conceptos relacionados con polinomios, ecuaciones e inecuaciones, para adentrarnos en los sistemas de ecuaciones, su resolución y representaciones gráficas, basándonos en el método de resolución de sistemas de ecuaciones, "*Método de Gauss*" matemático muy importante en Álgebra pues fue el primero en dar una demostración del teorema fundamental del Álgebra: *"Toda ecuación algebraica de grado n tiene n soluciones"*.

Seguiremos con las inecuaciones y sistemas de inecuaciones que tienen interesantes aplicaciones.

Karl Friedrich Gauss

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. POLINOMIOS

1.1. Definición. Términos. Grado. Valor numérico

Recuerda que:

Un **monomio** viene dado por el producto de números reales e indeterminadas. Llamaremos **coeficiente** de un monomio al número real que multiplica a la indeterminada, o indeterminadas; la indeterminada, o indeterminadas, conforman la **parte literal** del monomio.

Un **polinomio** es una expresión construida a partir de la suma de monomios. El **grado de un polinomio** vendrá dado por el mayor grado de sus monomios.

Ejemplos:

- $\frac{1}{7}\cdot x^2 - 32\cdot x^3 + 8$ *es un polinomio de grado 3 en la variable* x.
- $-5\cdot y^4 + 6\cdot x^2 + 11\cdot x$ *es un polinomio de grado 4 en las indeterminadas* x *e* y.
- $3\cdot x^2\cdot y^3 - 2 + 5\cdot y^2$ *es un polinomio de grado 5 en* x *e* y.
- $8x - 9\cdot y + 3\cdot z$ *es un polinomio de grado 1 en* x, y *y* z.

Tanto en esta sección como en la siguiente nos limitaremos, básicamente, a considerar polinomios con una única variable.

El aspecto genérico de un polinomio en la variable x es

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde los coeficientes a_k son números reales.

Decimos que un polinomio es **mónico** cuando el coeficiente de su término de mayor grado es igual a 1.

Los términos de un polinomio vienen determinados por el número de monomios que tenga ese polinomio.

Recuerda que:

Monomio: *mono: uno, nomio: término*: 1 término

Binomio: *bino: 2 dos, nomio: término:* 2 términos

Trinomio: *trino: tres, nomio: término* : 3 términos.

Cuatrinomio: *cuatri: cuatro, nomio: término*: cuatro términos.

A partir de cuatrinomio se les nombra polinomios: *Poli: varios, nomio: términos.*

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Así por ejemplo:

- $4y^3 + 3y - 7$ está formado por 3 monomios $4y^3$, $3y$, -7 por lo tanto tendrá **tres términos.**
- $-3y^4 + 8x^2 + 5x$ está formado por 3 monomios, $-3y^4$, $8x^2$ y $5x$, por lo tiene 3 términos.

Si fijamos, o escogemos, un valor concreto para la variable de un polinomio aparece un número real el **valor numérico** del polinomio para ese valor determinado de la variable.

Si hemos llamado p a un polinomio, a la evaluación de p en, por ejemplo, el número –5 la denotamos por $p(-5)$, y leemos *"p de menos cinco"* o *"p en menos cinco"*. Con este criterio, si p es un polinomio cuya indeterminada es la variable x, podemos referirnos a él como p o $p(x)$ indistintamente.

De esta forma apreciamos que un polinomio puede ser entendido como una manera concreta de asignar a cada número real otro número real.

Ejemplos:

- *Si evaluamos el polinomio* $p \equiv -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ *en* $x=5$ *nos encontramos con el número*

$$p(5) = -3\cdot 5^4 + \frac{1}{5}\cdot 5^2 + 2 = -3\cdot 625 + 5 + 2 = -1875 + 7 = -1868$$

- *El valor del polinomio* $q(y) = 4y^3 + 3y - 7$ *para* $y = -1$ *es*

$$q(-1) = 4\cdot(-1)^3 + 3\cdot(-1) - 7 = 4\cdot(-1) - 3 - 7 = -4 - 10 = -14$$

1.2. Operaciones con polinomios

Ya sabes que:

Suma de polinomios

Como un polinomio es una suma de monomios, la suma de dos polinomios es otro polinomio. A la hora de sumar dos polinomios procederemos a sumar los monomios de igual parte literal.

Ejemplos:

- *La suma de los polinomios* $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ *y* $-x^4 + 4x^2 - 5x - 6$ *es el polinomio*

$$\left(-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2\right) + (-x^4 + 4x^2 - 5x - 6) = (-3x^4 - x^4) + \left(\frac{1}{5}x^2 + 4x^2\right) - 5x + (2-6) =$$

$$= (-3-1)\cdot x^4 + \left(\frac{1}{5} + 4\right)\cdot x^2 - 5x + (2-6) = -4x^4 + \frac{21}{5}x^2 - 5x - 4$$

- $(7x^2 - 5x + 3) + (2x^2 + 9x - 8) = (7x^2 + 2x^2) + (-5x + 9x) + (3-8) = 9x^2 + 4x - 5$

- En el siguiente ejemplo sumaremos dos polinomios disponiéndolos, adecuadamente, uno sobre otro.

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 2x^5 & +6x^4 & +3x^3 & -11x^2 & +5x & +6 \\ + & -9x^5 & & +4x^3 & +11x^2 & -9x & -7 \\ \hline & -7x^5 & +6x^4 & +7x^3 & & -4x & -1 \end{array}$$

Propiedades de la suma de polinomios

Propiedad conmutativa. Si p y q son dos polinomios, no importa el orden en el que los coloquemos a la hora de sumarlos:

$$p+q \equiv q+p$$

Ejemplo:

- $(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)=-x^3+(4x^2+x^2)+(-2x-3x)+(7+1)=-x^3+5x^2-5x+8$
- $(-x^3+x^2-3x+1)+(4x^2-2x+7)=-x^3+(x^2+4x^2)+(-3x-2x)+(1+7)=-x^3+5x^2-5x+8$

Propiedad asociativa. Nos señala cómo se pueden sumar tres o más polinomios. Basta hacerlo agrupándolos de dos en dos:

$$(p+q)+r \equiv p+(q+r)$$

Ejemplo:

- $(2x^3-2x^2+2)+(x^4+7x^2+5x+2)+(x+6)=(2x^3-2x^2+2+x^4+7x^2+5x+2)+(x-6)=$
  $=(x^4+2x^3+5x^2+5x+2)+(x+6)=x^4+2x^3+5x^2+6x+8$

También:

- $(2x^3-2x^2+2)+(x^4+7x^2+5x+2)+(x-6)=(2x^3-2x^2+2)+(x^4+7x^2+5x+2+x+6)=$
  $=(2x^3-2x^2+2)+(x^4+7x^2+6x+8)=x^4+2x^3+5x^2+6x+10$

Elemento neutro. Hay un polinomio con una propiedad particular: el resultado de sumarlo con cualquier otro siempre es éste último. Se trata del polinomio dado por el número 0, el ***polinomio cero*.**

Ejemplo:

- $(5x^3+4x^2-3x+1)+0=0+(5x^3+4x^2-3x+1)=(5x^3+4x^2-3x+1)$
- $0+(-7x^3+3x+7)=(-7x^3+3x+7)+0=-7x^3+3x+7$

Elemento opuesto. Cada polinomio tiene asociado otro, al que llamaremos su ***polinomio opuesto***, tal que la suma de ambos es igual al polinomio cero. Alcanzamos el polinomio opuesto de uno dado, simplemente, cambiando el signo de cada monomio.

Ejemplo:

- El polinomio opuesto de $p \equiv -3x^4 + 5x^3 + 2x - 7$ es $3x^4 - 5x^3 - 2x + 7$, al que denotaremos como "$-p$". Ratifiquemos que su suma es el polinomio cero:

$$(-3x^4 + 5x^3 + 2x - 7) + (3x^4 - 5x^3 - 2x + 7) = (-3x^4 + 3x^4) + (5x^3 - 5x^3) + (2x - 2x) + (-7 + 7) = 0$$

Resta de polinomios

Recordemos que el polinomio *opuesto* de otro se obtiene simplemente cambiando el signo de cada monomio. Esta acción se corresponde con multiplicar por el número "-1" el polinomio original. De esta forma el polinomio opuesto de p es

$$-p \equiv (-1) \cdot p$$

En este momento aparece de manera natural la **operación diferencia**, o **resta**, de polinomios. La definimos con la ayuda del polinomio opuesto de uno dado:

$$p - q \equiv p + (-q) \equiv p + (-1) \cdot q$$

La resta consiste en sumar a un polinomio el opuesto de otro.

Ejemplo:

- Dado el polinomio: $p \equiv 2x^4 - 3x^2 + 6$ y el polinomio: $q \equiv -7x^4 + 6x^2 + 7$.

Vamos a restar $p - q$:

El proceso es el mismo que para la suma, lo único que cambia es que a p le sumamos el opuesto de q:

Es decir a q le cambiamos de signo y se lo sumamos a p:

$$(2x^4 - 3x^2 + 6) - (-7x^4 + 6x^2 + 7) = (2x^4 - 3x^2 + 6) + (7x^4 - 6x^2 - 7) = 9x^4 - 5x^2 - 1.$$

Recordemos que el opuesto de q es $-q$, $(7x^4 - 6x^2 - 7)$.

Ejemplo:

- $$(-5x^2 - 3x + 2) - (-2x^4 + x^3 + 3x^2 + 6) = (-5x^2 - 3x + 2) + (2x^4 - x^3 - 3x^2 - 6) =$$
$$= 2x^4 - x^3 + (-5x^2 - 3x^2) - 3x + (2 - 6) = 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 3x - 4$$

Actividades propuestas

1. Realiza la suma y resta de los siguientes polinomios:

a) $x^2 - 2$ b) $3x^4 + x^3 - 1$

2. Realiza las siguientes sumas de polinomios:

a) $(x^2 - x) + (-2x^2 - 3x + 1) + (2x^3 - 2x^2 + x - 2)$

b) $-x^4 + (x^3 + 2x - 3) + (-3x^2 - 5x + 4) + (2x^3 - x + 5)$

3. Escribe el polinomio opuesto de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 4x - 1$

b) $-7x^3 - 6x + 5$

c) $-x^4 + 3x^2 - 8x + 7$

4. Considera los polinomios $p \equiv +x^3 - 6x + 2$, $q \equiv 3x^2 + 3x + 1$, así como el polinomio suma $s \equiv p + q$. Halla los valores que adopta cada uno de ellos para $x = -2$, es decir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ y $s(-2)$. Estudia si existe alguna relación entre esos tres valores.

5. Obtén el valor del polinomio $p \equiv -x \; -5x^3 + 2x - 2$ en $x = 3$. ¿Qué valor toma el polinomio opuesto de p en $x = 3$?

6. Realiza las siguientes diferencias de polinomios:

a) $(-4x^3 + 2x) - (-3x^2)$

b) $(2x^4 + x) - (-3x - 4)$

c) $(3x^2 - x) - (2x^3 + x^2 - x)$

Producto de polinomios

Otra operación que podemos realizar con polinomios es la multiplicación.

El resultado del producto de polinomios siempre será otro polinomio. Aunque en un polinomio tenemos una indeterminada, o variable, como ella toma valores en los números reales, a la hora de multiplicar polinomios utilizaremos las propiedades de la suma y el producto de los números reales, en particular la propiedad distributiva del producto respecto de la suma; así, todo queda en función del producto de monomios, cuestión que resolvemos con facilidad:

$$ax^n \cdot bx^m = abx^{n+m}$$

Ejemplos:

a) $6x^2 \cdot (-2x^4) = 6 \cdot (-2) \cdot x^{2+4} = -12x^6$

b) $5x^3 \cdot (-4) = 5 \cdot (-4) \cdot x^3 = -20x^3$

c) $3x^2 \cdot (2x^2 - 4x + 6) = (3x^2 \cdot 2x^2) - (3x^2 \cdot 4x) + (3x^2 \cdot 6) = 6x^4 - 12x^3 + 18x^2$

d) $(-x^3 + 3x - 1) \cdot (-2x) = (-x^3) \cdot (-2x) + (3x) \cdot (-2x) + (-1) \cdot (-2x) = 2x^4 - 6x^2 + 2x$

e) $(3x-2)\cdot(x^2-4x-5)=(3x)\cdot(x^2-4x-5)+(-2)\cdot(x^2-4x-5)=$
$(3x^3-12x^2-15x)+(-2x^2+8x+10)=$

$$=3x^3+(-12x^2-2x^2)+(-15x+8x)+10=3x^3-14x^2-7x+10$$

f)

$$(x+6)\cdot(x^2-2x)=(x+6)\cdot x^2+(x+6)\cdot(-2x)=(x^3+6x^2)+(-2x^2+12x)=x^3+6x^3-2x^2+12x$$

Ejemplo:

- *También podemos materializar el producto de polinomios tal y como multiplicamos números enteros:*

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
\times & & & x^2 & -3x & +1 \\
\hline
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
 & 6x^4 & & -3x^2 & -12x & \\
-2x^5 & & +x^3 & +4x^2 & & \\
\hline
-2x^5 & +6x^4 & -x^3 & +x^2 & -11x & +4
\end{array}$$

Actividades propuestas

7. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

a) $(5x^3-2x)\cdot(-4x^3)$ b) $(2x^4+x)\cdot(-3x-4)$

c) $(2x^5+x^3-x^2)\cdot(3x^2-x)$ d) $(-1)\cdot(7x^3-4x^2-3x+1)$

8. Multiplica cada uno de los siguientes polinomios por un número de tal forma que surjan polinomios mónicos:

a) $4x^3+3x^3+2x^2$

b) $-2x^3+x^2-1$

c) $-x^2+x-7$

9. Calcula y simplifica los siguientes productos:

a) $3x\cdot(2x^3+4x^2-6)$ b) $(3x-4)\cdot(4x+6)$

c) $(2a^2-5b)\cdot(4b-3a^2)$ d) $(3a-6)\cdot(8-2a)\cdot(9a-2)$

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Propiedades del producto de polinomios

Propiedad conmutativa. Si p y q son dos polinomios, no importa el orden en el que los coloquemos a la hora de multiplicarlos:

$$p \cdot q \equiv q \cdot p$$

Ejemplo:

- $(2x^2-7)\cdot(-x^4+x^2)=2x^2\cdot(-x^4+x^2)-7\cdot(-x^4+x^2)=-2x^6+2x^4+7x^4-7x^2=-2x^6+9x^3-7x^2$

$$(-x^4+x^2)\cdot(2x^2-7)=-x^4\cdot(2x^2-7)+x^2\cdot(2x^2-7)=-2x^6+7x^4+2x^4-7x^2=-2x^6+9x^4-7x^2$$

Propiedad asociativa. Nos señala cómo se pueden multiplicar tres o más polinomios. Basta hacerlo agrupándolos de dos en dos:

$$(p\cdot q)\cdot r \equiv p\cdot(q\cdot r)$$

Ejemplo:

$$((4x^2-2)\cdot(-3x+1))\cdot(-x^3+x)=(-12x^3+4x^2+6x-2)\cdot(-x^3+x)=$$
$$=12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

También:

$$(4x^2-2)\cdot((-3x+1)\cdot(-x^3+x))=(4x^2-2)\cdot(3x^4-3x^2-x^3+x)=$$
$$=12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

Elemento neutro. Hay un polinomio con una propiedad particular: al multiplicarlo por cualquier otro siempre nos da éste último. Se trata del polinomio dado por el número 1, el *polinomio unidad*.

Ejemplo:

- $1\cdot(-8x^2-2x+3)=(-8x^2-2x+3)\cdot 1=-8x^2-2x+3$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma. Cuando en una multiplicación de polinomios uno de los factores viene dado como la suma de dos polinomios como, por ejemplo,

$$(8x^2-x)\cdot((-2x+7)+(x^3-4x))$$

tenemos dos opciones para conocer el resultado:

a) realizar la suma y, después, multiplicar

$$(8x^2-x)\cdot((-2x+11)+(x^3-4x))=(8x^2-x)\cdot(x^3-6x+11)=$$
$$=8x^5-48x^3+88x^2-x^4+6x^2-11x=8x^5-x^4-48x^3+94x^2-11x$$

b) distribuir, aplicar, la multiplicación a cada uno de los sumandos y, después, sumar:

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$(8x^2 - x)\cdot\big((-2x+11)+(x^3-4x)\big) = (8x^2-x)\cdot(-2x+11)+(8x^2-x)\cdot(x^3-4x) =$$
$$= (-16x^3+88x^2+2x^2-11x)+(8x^5-32x^3-x^4+4x^2) = 8x^5 - x^4 - 48x^3 + 94x^2 - 11x$$

Comprobamos que obtenemos el mismo resultado.

En general, la **propiedad distributiva** de la multiplicación respecto de la suma nos dice que

$$p\cdot(q+r) \equiv (p\cdot q)+(p\cdot r)$$

Conviene comentar que la anterior propiedad distributiva leída en sentido contrario, de derecha a izquierda, es lo que comúnmente se denomina **sacar factor común**.

Ejemplo:

$$6x^6 - 10x^4 - 22x^3 + 2x^2 = (3x^4 - 5x^2 - 11x + 1)\cdot 2x^2$$

Actividades propuestas

10. Realiza los siguientes productos de polinomios:

a) $x^2\cdot(-5x^4 - 3x^2 + 1)\cdot 2x^3$

b) $(2x^2 - 3)\cdot(-3x^2 - 5x + 4)\cdot(-x)$

11. De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:

a) $-16x^4 - 20x^3 + 10x^2$

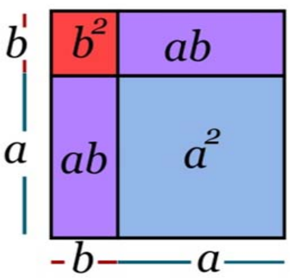
b) $24x^4 - 30x^2$

Productos notables de polinomios

En este apartado vamos a destacar una serie de productos concretos de polinomios que surgen frecuentemente. Podemos exponerlos de muy diversas formas. Tal y como lo haremos, aparecerá más de una indeterminada; hemos de ser capaces de apreciar que si, en un algún caso concreto, alguna indeterminada pasa a ser un número concreto esto no hará nada más que particularizar una situación más general.

Potencias de un binomio. Las siguientes igualdades se obtienen, simplemente, tras efectuar los oportunos cálculos:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



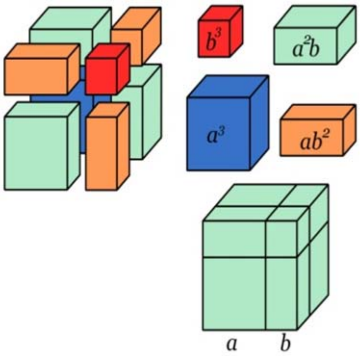
El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Comprueba la igualdad a partir de los cuadrados y rectángulos de la ilustración.

- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Observa la figura y conéctala con la igualdad.



- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Ratifica la igualdad con los cubos y prismas de la figura.

- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Podemos observar que, en cada uno de los desarrollos, el exponente del binomio coincide con el grado de cada uno de los monomios.

Ejemplos:

a) $(a+2)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 2 + 2^2 = a^2 + 4a + 4$

b) $(x-5)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$

c) $(7x+5)^2 = (7x)^2 + 2 \cdot 7x \cdot 5 + (5)^2 = 49x^2 + 70x + 25$

d) $(x-3y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3y + (3y)^2 = x^2 - 6xy + 9y^2$

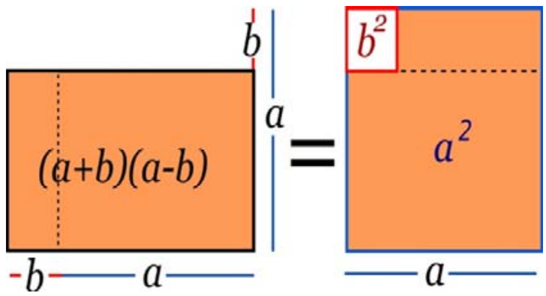
e) $(4x-5)^3 = (4x)^3 - 3 \cdot (4x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot (4x) \cdot 5^2 - 5^3 = 64x^3 - 60x^2 + 30x - 125$

Suma por diferencia. De nuevo la siguiente igualdad se obtiene tras efectuar el producto señalado:

- $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

Suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados.

Observa las figuras y conéctalas con la igualdad.



Ejemplos:

a) $(a+5) \cdot (a-5) = a^2 - 5^2 = a^2 - 25$

b) $(x+1) \cdot (x-1) = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$

c) $(3x+4) \cdot (3x-4) = (3x)^2 - 4^2 = 9x^2 - 16$

d) $(-3x-5) \cdot (-3x+5) = (-1) \cdot (3x+5) \cdot (-3x+5) = (-1) \cdot (5+3x) \cdot (5-3x) =$

$= (-1) \cdot (5^2 - (3x)^2) = -25 + 9x^2$

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

12. Realiza los cálculos:

a) $(2+3a)^2$

b) $(-x+3)^2$

c) $(-3x+2)^2$

d) $(x^2-1)^3$

e) $(4x^2+2)^3$

13. Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios:

a) $(a+b+c)^2$ b) $(a+b-c)^2$

14. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(2x - 5y)^2$ b) $(3x + y/3)^2$ c) $(5x^2 - 5/x)^2$

d) $(3a - b)^2$ e) $(a^2 + b^2)^2$ f) $(3/5y - 2/y)^2$

15. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia las siguientes expresiones algebraicas:

a) $a^4 + 6a^2 + 9$ b) $9x^2 - 6x + 1$ c) $b^2 - 10b + 25$

d) $4y^2 + 12y + 9$ e) $a^4 - 2a^2 + 1$ f) $y^4 + 6y^2 + 9$

16. Efectúa estos productos:

a) $(4x^2+3y)\cdot(4x^2-3y)$

b) $(2x^2+8)\cdot(2x^2-8)$

c) $(-x^2+3x)\cdot(x^2+3x)$

División de polinomios

Ya sabes que:

Analicemos con detenimiento la división de dos números enteros positivos. Cuando dividimos dos números, D (dividendo) entre d (divisor, distinto de 0), surgen otros dos, el cociente (c) y el resto (r). Ellos se encuentran ligados por la llamada *prueba de la división*:

$$D=d\cdot c+r$$

Alternativamente:

$$\frac{D}{d}=c+\frac{r}{d}$$

Además, decimos que la división es exacta cuando $r=0$.

El conocido algoritmo de la división persigue encontrar un número entero, el cociente c, tal que el resto r sea un número menor que el divisor d, y mayor o igual que cero. Fijémonos en que, sin esta exigencia para el resto r, podemos escoger arbitrariamente un valor para el cociente c el cual nos suministra su valor asociado como resto r.

En efecto, si tenemos como dividendo $D = 672$ y como divisor $d = 12$, "si queremos" que el cociente sea $c = 48$ su resto asociado es

$$r = D - d \cdot c = 672 - 12 \cdot 48 = 672 - 576 = 96$$

y la conexión entre estos cuatro números es

$$672 = 12 \cdot 48 + 96$$

Esta última "lectura" de la división de números enteros va a guiarnos a la hora de dividir dos polinomios.

Dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, la división de $p(x)$, polinomio dividendo, entre $q(x)$, polinomio divisor, nos proporcionará otros dos polinomios, el polinomio cociente $c(x)$ y el polinomio resto $r(x)$. También aquí pesará una exigencia sobre el polinomio resto: su grado deberá ser menor que el grado del polinomio divisor. La relación entre los cuatro será, naturalmente,

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

También escribiremos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Al igual que ocurre con el algoritmo de la división entera, el algoritmo de la división de polinomios consta de varias etapas, de carácter repetitivo, en cada una de las cuales aparecen unos polinomios cociente y resto "provisionales" de forma que el grado de esos polinomios resto va descendiendo hasta que nos topamos con uno cuyo grado es inferior al grado del polinomio divisor, lo que indica que hemos concluido. Veamos este procedimiento con un ejemplo concreto

Ejemplo:

- Vamos a dividir el polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$. Como el polinomio divisor, $q(x)$, es de grado 2, debemos encontrar dos polinomios, un polinomio cociente $c(x)$, y un polinomio resto $r(x)$ de grado 1 o 0, tales que

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

- *Primera etapa:*

Para poder lograr la igualdad $p \equiv q \cdot c + r$, como el grado de $r(x)$ será 1 o 0, el término de mayor grado de $p(x)$, $6x^4$, surgirá del producto $q(x) \cdot c(x)$. Así obtenemos la primera aproximación de $c(x)$, su monomio de mayor grado:

$$c_1(x) = 3x^2$$

y, de manera automática, también un primer resto $r_1(x)$:

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \underline{|\ \ 2x^2-x+3} \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & 3x^2 \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \end{array}$$

Como este polinomio $r_1(x)$ es de grado 3, mayor que 2, el grado del polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto no es el definitivo; debemos continuar.

- *Segunda etapa:*

Esta segunda etapa consiste en dividir el polinomio $r_1(x)=8x^3-8x^2+3x-2$, surgido como resto de la etapa anterior, entre el polinomio $q(x)=2x^2-x+3$, el divisor inicial. Es decir, repetimos lo hecho antes pero considerando un nuevo polinomio dividendo: el polinomio resto del paso anterior.

Al igual que antes, el grado de $r(x)$ debería ser 1 o 0. Como el término de mayor grado de $r_1(x)$, $8x^3$, sale del producto $q(x)\cdot c_2(x)$, es necesario que el polinomio cociente contenga el monomio

$$c_2(x)=4x$$

Ello nos lleva a un segundo resto $r_2(x)$:-4x^2-9x-2

Como este polinomio $r_2(x)$ es de grado 2, igual que el grado del polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto no es el definitivo; debemos continuar.

- *Primera y segunda etapas:*

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \underline{|\ \ 2x^2-x+3} \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & 3x^2+4x \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ \underline{-8x^3+4x^2-12x} & \\ -4x^2-9x-2 & \end{array}$$

- *Tercera etapa:*

Esta tercera etapa consiste en dividir el polinomio $r_2(x)=-4x^2-9x-2$, el resto de la etapa anterior, entre el polinomio $q(x)=2x^2-x+3$, el divisor inicial. De nuevo repetimos el algoritmo pero con otro polinomio dividendo: el polinomio resto del paso anterior.

Perseguimos que $r_2\equiv q\cdot c_3+r$. Como en cada paso, el grado de $r(x)$ debería ser 1 o 0. El término de mayor grado de $r_2(x)$, $-4x^2$, surge del producto $q(x)\cdot c_3(x)$, por lo que

$$c_3(x)=-2$$

y el tercer resto $r_3(x)$ es: -11x+4

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Como este polinomio $r_3(x)$ es de grado 1, menor que 2, grado del polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto sí es el definitivo. Hemos concluido:

➢ *Las tres etapas:*

$$
\begin{array}{rl}
6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \quad |\ 2x^2-x+3 \\ \cline{2-2}
\underline{-6x^4+3x^3-9x^2} \qquad\quad & \quad 3x^2+4x-2 \\
8x^3-8x^2+3x-2 & \\
\underline{-8x^3+4x^2-12x} \quad & \\
-4x^2-9x-2 & \\
\underline{4x^2-2x+6} & \\
-11x+4 &
\end{array}
$$

Conclusión: Al dividir el polinomio $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre el polinomio $q(x)=2x^2-x+3$ obtenemos como polinomio cociente $c(x)=3x^2+4x-2$ y como polinomio resto $r(x)=-11x+4$.

Actividades propuestas

17. Divide los siguientes polinomios:

a) $2x^4-x^2-x+7$ entre x^2+2x+4

b) $-10x^3-2x^2+3x+4$ entre $5x^3-x^2-x+3$

c) $4x^5-6x^3+6x^2-3x-7$ entre $-2x^3+x+3$

d) $-8x^5-2x^4+10x^3+2x^2+3x+5$ entre $4x^3+x^2+x-1$

e) $-6x^5+x^2+1$ entre x^3+1

18. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca $q(x)=x^2-x-3$ como polinomio cociente y $r(x)=-3x^2-1$ como resto.

1.3. Regla de *Ruffini*. Teorema del resto

Debido a la importancia que tiene la división de polinomios cuando el polinomio divisor es de la forma $x-\alpha$, es conveniente agilizar tales divisiones.

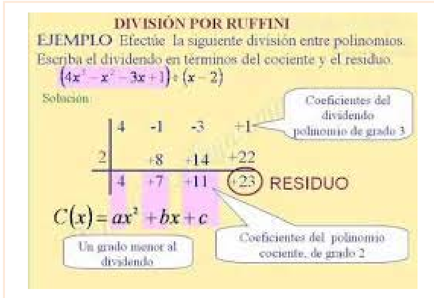
Paolo Ruffini

Estamos ante la llamada **regla de *Ruffini***, un algoritmo que nos proporciona tanto el cociente como el resto que resultan de dividir un polinomio cualquiera entre otro de la forma $x-\alpha$.

Veámoslo con un ejemplo:

Consideremos el polinomio $p(x)=3x^3-4x^2+x+3$. Vamos a dividirlo entre $x+2$.

$$\begin{array}{l|l}
3x^3-4x^2+x+3 & x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2-10x+21 \\
\quad -10x^2+\ x\ +3 & \\
\quad \underline{10x^2+20x} & \\
\qquad\quad 21x+3 & \\
\qquad \underline{-21x-42} & \\
\qquad\qquad -39 &
\end{array}$$



Veamos cómo han surgido tanto el polinomio cociente como el resto. El que el grado del dividendo sea tres y que el divisor sea de grado uno impone que el cociente tenga grado dos y que el resto sea un número real. El cociente consta de los monomios $3x^2$, $-10x$ y 21, los cuales coinciden con los monomios de mayor grado de cada uno de los dividendos después de disminuir sus grados en una unidad: $3x^2$ procede de $3x^3-4x^2+x+3$ (el dividendo inicial), $-10x$ viene de $-10x^2+\ x\ +3$ y, por último, 21 de $21x+3$. Este hecho, coincidencia en el coeficiente y disminución del grado en una unidad, se debe a que el divisor, $x+2$, es mónico y de grado uno.

Seguidamente, vamos a tener en cuenta únicamente los coeficientes del dividendo, por orden de grado, 3, –4, 1 y 3; en cuanto al divisor, como es mónico y de grado uno, basta considerar su término independiente, +2, pero como el resultado de multiplicar los monomios que van conformando el cociente por el divisor hemos de restárselo a cada uno de los dividendos, atendiendo a este cambio de signo, en lugar del término independiente, +2, operaremos con su opuesto, –2, número que, a la vez, es la raíz del divisor $x+2$ y sobre el que pesa la pregunta de si es o no raíz de $p(x)$.

Este último concepto lo veremos más delante de manera detallada cuando definamos raíz de un polinomio.

Vamos a compararlo con el proceso de la división convencional y veremos que es igual:

- *Primer paso de la división:*

$$\begin{array}{l|l}
3x^3-4x^2+x+3 & x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2 \\
\quad -10x^2+\ x\ +3 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -4 & 1 & 3 \\
-2 & & -6 & & \\ \hline
 & 3 & -10 & & \boxed{}
\end{array}$$

Aparece en el cociente el monomio $3x^2$ (coeficiente 3), el cual provoca la "desaparición" de $3x^3$ en el dividendo y la aparición del monomio $-6x^2$ (coeficiente $-6=(-2)\cdot 3$). Después de operar (sumar) nos encontramos con $-10x^2$ (coeficiente $-10=(-4)+(-6)$) y, en el cociente $-10x$.

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- *Segundo paso. El dividendo pasa a ser* $-10x^2 + x + 3$.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3-4x^2+x+3 & x+2 \\ \hline \underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2-10x \\ \quad -10x^2+x+3 & \\ \quad \underline{10x^2+20x} & \\ \qquad\quad 21x+3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & 20 & \\ \hline & 3 & -10 & 21 & \end{array}$$

La irrupción en el cociente del monomio $-10x$ (coeficiente -10) provoca la "desaparición" de $-10x^2$ en el dividendo y la aparición del monomio $20x$ (coeficiente $20=(-2)\cdot(-10)$). Después de operar (sumar) nos encontramos con $21x$ (coeficiente $21=1+20$) y, en el cociente 21.

- *Tercer paso. El dividendo pasa a ser* $21x + 3$.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3-4x^2+x+3 & x+2 \\ \hline \underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2-10x+21 \\ \quad -10x^2+x+3 & \\ \quad \underline{10x^2+20x} & \\ \qquad\quad 21x+3 & \\ \qquad\quad \underline{-21x-42} & \\ \qquad\qquad -39 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & 20 & -42 \\ \hline & 3 & -10 & 21 & \underline{|\,-39} \end{array}$$

Tenemos en el cociente el término independiente 21. Éste provoca la eliminación de $21x$ en el dividendo y la aparición del término $-42=(-2)\cdot 21$. Después de operar (sumar) nos encontramos con el resto $-39=3-42$.

En cada uno de los pasos figura, en la parte derecha, lo mismo que se ha realizado en la división convencional, pero con la ventaja de que todo es más ágil debido a que únicamente se manejan números reales: los coeficientes de los distintos polinomios intervinientes.

Ejemplo:

- *Dividamos el polinomio* $p(x) = -x^4 + 2x^3 - 5x + 4$ *entre* $x+3$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -1 & 2 & 0 & 5 & 4 \\ -3 & & +3 & -15 & +45 & -150 \\ \hline & -1 & +5 & -15 & +50 & \underline{|\,-146} \end{array}$$

Actividades propuestas

19. Usa la regla de *Ruffini* para realizar las siguientes divisiones de polinomios:

a) $-3x^2+x+1$ entre $x-1$

b) x^4+2x^3-2x+1 entre $x-2$

c) $4x^3-3x^2-1$ entre $x+1$

d) x^3-9x+1 entre $x-3$

20. Estudia si es posible usar la regla de *Ruffini*, de alguna forma, para dividir x^3+2x^2+5x+7 entre $2x+3$.

Teorema del resto

El teorema del resto es muy útil para hallar los valores numéricos de los polinomios sin necesidad de sustituir directamente en ellos la incógnita por el número de que se trate. Haciendo uso de dicho teorema, podemos hallar las raíces de los polinomios, proceso que habrá que realizar con mucha frecuencia en lo sucesivo.

El enunciado del teorema del resto es el siguiente:

Teorema del resto. El valor numérico que adopta un polinomio $p(x)$ al particularizarlo en $x=\alpha$ coincide con el resto que aparece al dividir $p(x)$ entre $x-\alpha$.

De esta forma, podremos saber de antemano si una división va a ser exacta sin necesidad de efectuarla.

Demostración:

Según vimos en el apartado de la división de polinomios, al dividir un polinomio $D(x)$ entre otro, $d(x)$, la relación que se establece es:

$$D(x) = d(x) \cdot c(x) + r(x)$$

donde $c(x)$ y $r(x)$ son respectivamente, el cociente y el resto de la división. En este caso estamos dividiendo por $x - a$, es decir, el divisor es $d(x) = x - a$. Por tanto

$$D(x) = (x - a) \cdot c(x) + r(x)$$

Hallamos el valor numérico del polinomio $D(x)$ para $x = a$, para ello sustituimos la x por a:

$$D(a) = (a - a) \cdot c(a) + r(a)$$

Y, por tanto, $D(a) = r(a) = r$, que es precisamente lo que queríamos demostrar.

Ejemplo:

- *Dividamos el polinomio* $p(x)=-x^4+3x^3-5x+4$ *entre* $x+3$*:*

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

	-1	$+3$	0	5	4
-3		$+3$	-18	$+51$	-168
	-1	$+6$	-18	$+56$	-164

El cociente es $-x^3+6x^2-18x+56$ y el resto -164

$$p(x)=-x^4+2x^3-5x+4=(x+3)\cdot(-x^3+6x^2-18x+56)+(-164)$$

Si evaluamos $p(x)$ en $x=-3$ no puede dar cero, pero ¿qué valor resulta?

$$p(-3)=(-3+3)\cdot(-3)^3-6.(-3)^2-18\cdot(-3)+56)+(-164)=0+(-164)=-164$$

Naturalmente hemos obtenido el resto anterior, que vemos que coinciden, el valor numérico del polinomio y el resto de la división.

Actividades propuestas

21. Utiliza la regla de *Ruffini* para conocer el valor del polinomio $-3x^3+7x^2+2x+4$ en $x=5$.

1.4. Raíces de un polinomio:

Dado un polinomio $p(x)$ diremos que un número real concreto α es **una raíz**, o **un cero**, del polinomio p, si al evaluar p en $x=\alpha$ obtenemos el número 0, esto es, si

$$p(\alpha)=0$$

Ejemplo:

- *Consideremos el polinomio* $s(x)=2x^3+2x^2-8x-8$.
  - El número 2 es una raíz de $s(x)$, puesto que

    $$s(2)=2\cdot2^3+2\cdot2^2-8\cdot2-8=2\cdot8+2\cdot4-16-8=16+8-16-8=0$$

  - Otra raíz de $s(x)$ es el número -1:

    $$s(-1)=2\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)^2-8\cdot(-1)-8=2\cdot(-1)+2\cdot(+1)+8-8=-2+2+8-8=0$$

  - En cambio, el número 1 no es una raíz de $s(x)$:

    $$s(1)=2\cdot1^3+2\cdot1^2-8\cdot1-8=2+2-8-8=4-16=-12\neq0$$

  - Tampoco es raíz de $s(x)$ el número 0:

    $$s(0)=2\cdot0^3+2\cdot0^2-8\cdot0-8=0+0-0-8=-8\neq0$$

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Cálculo de las raíces de un polinomio

Ejemplos:

- *Comprobemos, mediante la regla de Ruffini, que* $\alpha = \dfrac{1}{2}$ *es raíz del polinomio* $2x^2 - 3x + 1$*:*

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & -3 & 1 \\ 1/2 & & 1 & -1 \\ \hline & 2 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

- *Para conocer las raíces del polinomio* $x^2 - 2$ *debemos estudiar si hay algún número real* α *tal que lo anule, es decir, para el que se tenga*

$$\alpha^2 - 2 = 0$$
$$\alpha^2 = 2$$
$$\alpha = \pm\sqrt{2}$$

  Así, el polinomio de grado dos $x^2 - 2$ tiene dos raíces distintas, las cuales son números irracionales.

- *Ya sabemos que hay polinomios que carecen de raíces, como por ejemplo* $x^2 + 4$.

Para facilitar la comprensión de los conceptos y resultados de este asunto la mayoría de los números que han aparecido hasta ahora, coeficientes, raíces, etc., han sido números enteros. Por supuesto que podemos encontrarnos con polinomios con coeficientes racionales, o irracionales, o con polinomios con raíces dadas por una fracción o un número irracional. También existen polinomios que carecen de raíces.

Apreciamos que la regla de *Ruffini* nos informa sobre si un número concreto es o no raíz de un polinomio. Naturalmente, cuando estamos ante un polinomio, y nos interesa conocer sus raíces, no es posible efectuar una prueba con cada número real para determinar cuáles son raíz del polinomio. En el próximo párrafo destacaremos ciertos "números candidatos" a ser raíz de un polinomio.

A la hora de buscar las **raíces enteras de un polinomio** disponemos del siguiente resultado:

Dado un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ...+ a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

cuyos coeficientes son todos números enteros, sus **raíces enteras**, si las tuviera, se encuentran necesariamente entre los divisores enteros de su término independiente a_0.

Procedamos a su demostración. Supongamos que cierto número entero α es una raíz de ese polinomio. Tal número debe anularlo:

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots\ldots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0$$
$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots\ldots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha = -a_0$$
$$\alpha\cdot(a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + \ldots\ldots + a_2\alpha + a_1) = -a_0$$
$$a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + \ldots\ldots + a_2\alpha + a_1 = \frac{-a_0}{\alpha}$$

En la última igualdad, el número del lado izquierdo es entero, porque está expresado como una suma de productos de números enteros. Por ello, el número del lado derecho, $\frac{-a_0}{\alpha}$, también es entero. Al ser también enteros tanto $-a_0$ como α, alcanzamos que α es un divisor de a_0.

Ejemplos:

- Determinemos, con arreglo al anterior resultado, qué números enteros son candidatos a ser raíces del polinomio $7x^3 + 23x^2 - 2x - 6$:

  Tales números enteros candidatos deben ser divisores de -6, el término independiente del polinomio. Por ello, los únicos números enteros que pueden ser raíz de ese polinomio son:

  $$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$$

- Las únicas posibles raíces enteras del polinomio $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$ también son:

  $$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$$

En este caso 2 y –3 son raíces enteras del polinomio.

Algo más general podemos afirmar sobre clases de números y raíces de un polinomio:

Dado un polinomio cualquiera

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

cuyos coeficientes son todos números enteros, sus **raíces racionales**, si las tuviera, necesariamente tienen por numerador algún divisor del término independiente, a_0, y por denominador algún divisor del coeficiente del término de mayor grado, a_n.

Ejemplos:

- En el polinomio $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$ los números racionales candidatos a ser raíces suyas tienen por numerador a un divisor de -6 y por denominador a un divisor de 2. Por lo tanto, los únicos números racionales que pueden ser raíz de ese polinomio son:

  $$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6,\ \frac{\pm 1}{2},\ \frac{\pm 2}{2} = \pm 1,\ \frac{\pm 3}{2},\ \frac{\pm 6}{2} = \pm 3$$

  Además de 2 y -3, también es raíz $\frac{-1}{2}$; los demás no lo son.

- Las únicas posibles raíces racionales del polinomio $2x^4 + 7x^3 - 11x^2 - 4x - 3$ son:

  $$\pm 1,\ \pm 3,\ \frac{\pm 1}{2},\ \frac{\pm 3}{2}$$

  En este caso ninguno de esos números es raíz del polinomio.

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

22. Emplea la regla de Ruffini para dictaminar si los siguientes números son o no raíces de los polinomios citados:

a) $\alpha = 3$ de $x^3 - 4x^2 + 5$

b) $\beta = -2$ de $-x^3 - 2x^2 + x + 2$

c) $\gamma = 1$ de $-2x^4 + x + 1$

d) $\sigma = -1$ de $2x^3 + 2x^2$

23. Para cada uno de los siguientes polinomios señala, en primer lugar, qué números enteros son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

a) $x^3 - x^2 + 2x - 2$

b) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$

c) $2x^3 + x^2 - 18x - 9$

d) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x$

24. Comprueba que $\frac{-1}{2}$ es raíz del polinomio $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$.

25. Para cada uno de los siguientes polinomios indica qué números racionales son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

a) $3x^2 + 4x - 5$

b) $2x^3 - 9x^2 + 12x + 2$

1.5. Factorización de polinomios

Todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales, alguna de las cuales puede aparecer repetida entre esos no más de n números reales.

Basándonos en el cálculo de las raíces de un polinomio vamos a realizar el proceso de descomposición de un polinomio en forma de producto de otros polinomios más sencillos.(Factorización de un polinomio):

Nos vamos a basar en el siguiente enunciado:

La *condición necesaria y suficiente* para que un polinomio $P(x)$ sea divisible por $(x - a)$ es que a sea una raíz de $P(x)$.

Podemos reescribir este resultado de la siguiente manera:

Un polinomio $P(x)$ es divisible por $(x - a) \Leftrightarrow a$ es una raíz de $P(x)$.

Vamos a demostrarlo:

Si $P(x)$ es divisible por $(x - a) \Rightarrow a$ es una raíz de $P(x)$: ***Condición necesaria***

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

En efecto: Si $P(x)$ divisible por $(x - a) \Rightarrow r = 0 \Rightarrow P(a) = 0$ (por el teorema del resto) $\Rightarrow a$ es raíz de $P(x)$

Si a es una raíz de $P(x) \Rightarrow (x - a)$ divide a $P(x)$: ***Condición suficiente***

En efecto: a raíz de $P(x) \Rightarrow P(a) = 0$ (por el teorema del resto).

El resto de la división de $P(x)$ entre $(x - a)$ es $0 \Rightarrow (x - a)$ divide a $P(x)$ por la definición de raíz.

Como consecuencia inmediata se tiene: si a es una raíz de $P(x) \Rightarrow P(x) = c(x)\,(x - a)$

El polinomio dado queda descompuesto en forma de producto de dos factores. Repitiendo el proceso para $c(x)$, éste se puede descomponer a su vez de nuevo y así sucesivamente.

Llegando al resultado general: Dado el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ cuyas n raíces son x_1, x_2 , …, x_n ,dicho polinomio se puede descomponer factorialmente de la siguiente forma:

$$P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

Decimos que un polinomio es **reducible** si admite una factorización mediante polinomios de grado inferior al suyo. En caso contrario el polinomio será **irreducible**.

Ejemplo:

- Descomponer factorialmente el polinomio: $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

Como el coeficiente de x^3 es 1, según vimos en el apartado de cálculo de raíces de un polinomio, las posibles raíces racionales, de existir, han de ser divisores de 2.por tanto pueden ser: $+1$, -1, $+2$, -2.

Comprobamos si el 1 es raíz. Aplicamos el teorema de *Ruffini*:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 1 & & 1 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}$$

Por tanto, 1 es raíz y tenemos:

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)(x^2 - 3x + 2)$$

Resolviendo ahora la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$, resulta $x = 1$ y $x = 2$.

Por tanto, $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ y en definitiva, el polinomio tendrá la siguiente descomposición factorial:

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)(x - 1)(x - 2) = (x - 1)^2 (x - 2)$$

siendo sus raíces $x_1 = 1$, doble y $x_2 = 2$.

Hay polinomios que no admiten raíces, es decir, que no se anulan nunca.

Ejemplos:

- El polinomio $t(x) = x^2 + 4$ no tiene raíces puesto que al evaluarlo en cualquier número real α siempre nos da un valor positivo y, por lo tanto, distinto de 0:

$$t(\alpha) = \alpha^2 + 4 > 0$$

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Además, este polinomio de grado dos, $t(x)=x^2+4$, es un polinomio irreducible porque, al carecer de raíces, no podemos expresarlo como producto de polinomios de menor grado.

- Otro polinomio sin raíces reales es $u(x)=(x^2+1)^2=(x^2+1)\cdot(x^2+1)=x^4+2x^2+1$.

Actividades propuestas

26. Supongamos que tenemos dos polinomios, $p_1(x)$ y $p_2(x)$, y un número real α.

a) Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio suma $p_1(x)+p_2(x)$?

b) Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio producto $p_1(x)\cdot p_2(x)$?

c) ¿Hay alguna relación entre las raíces del polinomio $p_1(x)$ y las del polinomio $4\cdot p_1(x)$?

27. Construye un polinomio de grado 4 tal que posea tres raíces distintas.

28. Determina un polinomio de grado 4 tal que tenga, al menos, una raíz repetida.

29. Construye un polinomio de grado 4 de forma que tenga una única raíz.

30. Conjetura, y luego demuestra, una ley que nos permita saber cuándo un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$$

admite al número 0 como raíz.

31. Demuestra una norma que señale cuándo un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$$

admite al número 1 como raíz.

32. Determina las raíces de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $x+5$ b) $-x+3$ c) $7x-5$ d) $-3x-11$

e) $-7x$ f) x^2-8x g) $4x^2-x-3$ h) x^3-4x i) x^3+25x

1.6. Fracciones algebraicas

Una **fracción algebraica** es una expresión de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \qquad Q(x)\neq 0$$

dónde tanto $P(x)$ como $Q(x)$ son polinomios.

Ejemplos:

- *Así son fracciones algebraicas las siguientes expresiones:*

$$\frac{7x^3-2x}{6x^2+5x-9} \qquad \frac{4x^2-9x}{2x^2+33} \qquad \frac{3x^2y+2xy^2}{7xy}$$

Son expresiones algebraicas, son **fracciones algebraicas**. En general, no son un polinomio. Sólo lo es en el muy particular caso en el que el denominador es un número real diferente de cero, esto es, un polinomio de grado 0.

Es sencillo constatar que las expresiones anteriores no son un polinomio: cualquier polinomio puede tener un valor numérico para cualquier número real x. Sin embargo esas expresiones no pueden ser evaluadas para los valores que anulan el denominador.

- Podríamos creer que la siguiente fracción algebraica sí es un polinomio:

$$\frac{-3x^3+5x^2-3x}{x}=\frac{-3x^3}{x}+\frac{5x^2}{x}+\frac{-3x}{x}=-3x^2+5x-3$$

La expresión de la derecha sí es un polinomio, pues se trata de una suma de monomios, pero la de la izquierda no lo es ya que no puede ser evaluada en $x=0$. No obstante, esa fracción algebraica y el polinomio, cuando son evaluados en cualquier número diferente de cero, ofrecen el mismo valor.

Son **expresiones equivalentes** allí donde ambas tienen sentido.

Simplificación de fracciones algebraicas

De la misma manera que se hace con las fracciones numéricas, para simplificar fracciones algebraicas se descomponen numerador y denominador en factores, simplificando, posteriormente, aquellos que son comunes.

Ejemplo:

- *Una fracción algebraica como*

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}$$

puede ser simplificada gracias a que el numerador y el denominador admiten factorizaciones en las que algún polinomio está presente en ambas.

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}=\frac{(x^2+1)\cdot(x+3)\cdot(x-3)}{(x^2+1)\cdot(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-3)}=\frac{x+3}{(x+2)\cdot(x+1)}$$

Como ya hemos apuntado en otras ocasiones, las expresiones final e inicial no son idénticas pero sí son equivalentes en todos aquellos valores para los que ambas tienen sentido, esto es, para aquellos en los que no se anula el denominador.

Operaciones con fracciones algebraicas

Las operaciones con fracciones algebraicas se realizan de la misma forma que las respectivas operaciones con fracciones numéricas.

Puesto que las fracciones algebraicas obtenidas a partir de dos polinomios son, en potencia, números

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

reales, operaremos con tales expresiones siguiendo las propiedades de los números reales.

- **Suma o resta.** Para sumar o restar dos fracciones algebraicas deberemos conseguir que tengan igual denominador. Una manera segura de lograrlo, aunque puede no ser la más adecuada, es ésta:

$$\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot q_2}+\frac{p_2\cdot q_1}{q_2\cdot q_1}\equiv\frac{p_1\cdot q_2+p_2\cdot q_1}{q_1\cdot q_2}$$

- **Producto.** Basta multiplicar los numeradores y denominadores entre sí:

$$\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot p_2}{q_1\cdot q_2}$$

- **División.** Sigue la conocida regla de la división de fracciones numéricas:

$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot p_2}$$

Ejemplo:

- *En una suma de fracciones algebraicas como ésta*

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}$$

podemos alcanzar un común denominador en las fracciones a partir de la descomposición de cada denominador:

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}=\frac{3x-2}{x\cdot(x+1)}+\frac{4}{(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}+\frac{4\cdot x}{(x+1)\cdot(x-2)\cdot x}=$$
$$=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)+4x}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{3x^2-4x+4}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}$$

Conviene destacar que en el resultado final se ha optado por dejar el denominador factorizado. De esa forma, entre otras cuestiones, se aprecia rápidamente para qué valores de la indeterminada esa fracción algebraica no admite ser evaluada.

Actividades propuestas

33. Simplifica, si es posible, las siguientes expresiones:

a) $\frac{x^2+4x}{x^3+3x^2-6x-8}$ b) $\frac{x^2-1}{x^3+3x^2-6x-8}$ c) $\frac{x^2-1}{x^3+x^2-6x}$

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

34. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{3x^2-6x}{9x^2+15}$ b) $\dfrac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2}$ c) $\dfrac{x^2y+3xy^2}{4xy}$ d) $\dfrac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab}$

35. Realiza las siguientes operaciones teniendo en cuenta las factorizaciones de los denominadores:

a) $\dfrac{5}{-3x+12}+\dfrac{x+2}{x^2-4x}$ b) $\dfrac{-x}{x^2-2x+1}-\dfrac{3x-1}{x^2-1}$

36. Efectúa los siguientes cálculos:

a) $\dfrac{2x+1}{x^2+1}+\dfrac{4}{x}$ b) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{3}{x+1}$ c) $\dfrac{-x}{x^2+3x}\cdot\dfrac{1}{x-1}$ d) $\dfrac{x-2}{x^2+3x}:\dfrac{x-2}{x+3}$

37. Realiza las siguientes operaciones alterando, en cada apartado, únicamente uno de los denominadores, y su respectivo numerador:

a) $\dfrac{-x^2+x-1}{x^3}-\dfrac{3x+2}{x^2}$ b) $\dfrac{x-2}{x^2+3x}-\dfrac{8}{x+3}$

38. Comprueba las siguientes identidades simplificando la expresión del lado izquierdo de cada igualdad:

a) $\dfrac{8a^4b^3}{2a^2b^2}=4a^2b$ b) $\dfrac{4x^3y^2-3xy^2}{2xy}=2x^2y-\dfrac{3}{2}y$

c) $\dfrac{3x^2-9x}{6x+12}=\dfrac{x^2-3x}{x+4}$ d) $\dfrac{6a^2b^2+8a^2b-10ab}{2ab^2+16a^2b}=\dfrac{3ab+4a-5}{b+8a}$

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. ECUACIONES E INECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

En este apartado vamos a centrarnos en la resolución de ecuaciones e inecuaciones de primer y segundo grado y en su interpretación gráfica, para luego exponer los sistemas de ecuaciones e inecuaciones y su aplicación a las Ciencias y a las Ciencias Sociales.

Ya sabes que:

2.1. Resolución de ecuaciones de primer grado

Recuerda que:

La técnica para resolver una ecuación de primer grado consiste siempre en transformar la ecuación inicial en otra equivalente hasta conseguir aislar la incógnita en el primer miembro:

Ejemplo:

- Resolver la ecuación: $\frac{7(x-1)}{3}+\frac{5x}{6}=1-\frac{x}{2}$
- *Primer paso: Suprimir los denominadores.*

El mínimo común múltiplo de los denominadores es 6, multiplicamos por 6 toda la ecuación.

$$\frac{6.7(x-1)}{3}+\frac{6.5x}{6}=6.1-\frac{6.x}{2}\Rightarrow 14(x-1)+5x=6-3x$$

- *Segundo paso: Efectuar los paréntesis:*

$$14x-14+5x=6-3x$$

- *Tercer paso: Trasponer términos y simplificar:*

$$14x+5x+3x=6+15\Rightarrow 22x=20$$

- *Cuarto paso: despejar la incógnita, simplificando el resultado.*

$$x=\frac{20}{22}=\frac{10}{11}$$

- *Quinto paso: Comprobar el resultado.*

Sustituimos el resultado obtenido en la ecuación dada y comprobamos que se verifica la igualdad.

Recuerda que:

Las ecuaciones permiten resolver muchos tipos de problemas.

El tratamiento habitual ante un problema concreto es el siguiente:

1. **Plantear una ecuación que concuerde con el enunciado.**
2. **Resolver la ecuación.**
3. **Comprobar el resultado e interpretarlo**

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- La suma de tres números enteros consecutivos es 108. ¿Cuáles son esos números?

Llamando x al menor. Los tres números, al ser consecutivos, serán:

1º número: x

2º número: $x+1$

3º número: $x+2$

Planteamos ahora la ecuación correspondiente al enunciado: la suma ha de ser 108. Por tanto:

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 108$$

Los paréntesis, en este caso, no son necesarios debido a la propiedad asociativa de la suma de números reales. Se han puesto, exclusivamente, para aclarar la ecuación que estamos escribiendo.

Eliminamos los paréntesis y agrupamos términos nos queda:

$$x + x + 1 + x + 2 = 108 \Rightarrow x + x + x = 108 - 1 - 2 = 105 \Rightarrow 3x = 105$$

Despejando la incógnita:

$$x = \frac{105}{3} = 35.$$

Por tanto los números son 35, 36 y 37, cuya suma es 108.

2.2. Ecuaciones de segundo grado

Ya sabes que:

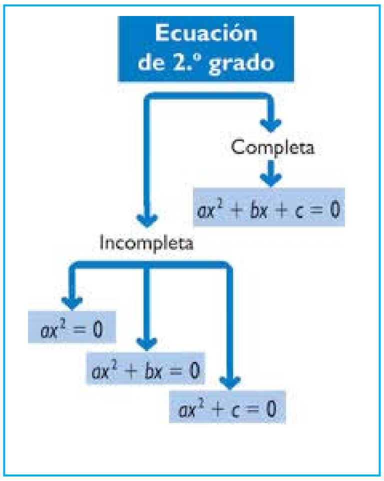
Recuerda que

Una ecuación de segundo grado es aquella que tiene como forma general la siguiente:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}, \text{ con } \boldsymbol{a \neq 0}.$$

Una ecuación tiene tantas soluciones como su grado.

Ya sabes que al ser de grado 2 tendrá 2 soluciones o 1 o ninguna en el campo real.



Según sea la ecuación de segundo grado sus soluciones se pueden hallar:

Caso 1: El coeficiente de la x es 0: $b = 0$:

En este caso la ecuación es de la forma: $ax^2 + c = 0$.

Para hallar las soluciones basta con despejar la x:

$$ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \Rightarrow x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}; x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Ejemplo:

- Resolver la ecuación: $2x^2 - 8 = 0$

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Se despeja x^2:

$$2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = -2$$

Caso 2: El término independiente es 0: $c = 0$

La ecuación es ahora de la forma:

$$ax^2 + bx = 0.$$

Para resolver basta con sacar factor común a la x:

$$ax + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; ax + b = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{a}$$

En este caso siempre una de las dos soluciones va a ser la $x = 0$.

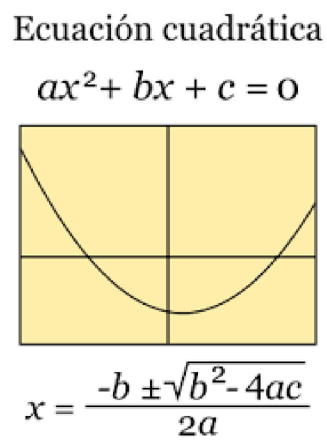
Los casos 1 y 2 son **ecuaciones de segundo grado incompletas**, que también se pueden resolver aplicando la fórmula general. Sin embargo es más rápido resolverlas de la manera que acabamos de exponer.

Caso 3: Resolución analítica de una ecuación de segundo grado completa:

Solución gráfica de una ecuación de segundo grado: Consideramos la función

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Su representación gráfica es una parábola, donde las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son los puntos de corte de ésta con el eje de abscisas.



Fuente Wikipedia

Solución analítica de una ***ecuación de segundo grado completa:*** Partiendo de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ vamos a obtener el valor de x:

Pasamos el término independiente al segundo miembro quedando expresado de la siguiente manera:

$$ax^2 + bx = -c$$

Multiplicamos toda la ecuación por $4a$:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Sumamos b^2 a ambos miembros:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

El primer miembro es el cuadrado del binomio $2ax + b$. Por tanto:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Extraemos la raíz cuadrada:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Pasamos b al segundo miembro y dividimos por $2a$, con lo que obtenemos el siguiente resultado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Por tanto:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Es la fórmula general para calcular las dos soluciones de la ecuación de segundo grado

Particularidades:

El radicando, $b^2 - 4ac$, recibe el nombre de **discriminante** de la ecuación. Se representa por la letra griega Δ. Según sea el signo del discriminante pueden darse tres casos:

- $\Delta > 0$: La ecuación tendrá las dos soluciones x_1 y x_2
- $\Delta = 0$: La ecuación tiene una única **solución doble**, las dos soluciones de la ecuación son iguales:

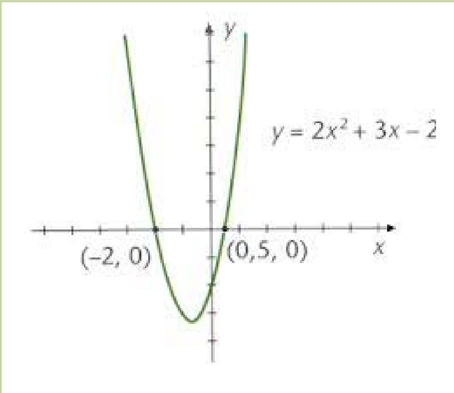
$$x = \frac{-b \pm 0}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

- $\Delta < 0$: El radicando es negativo, la ecuación no tiene raíces reales, (la raíz da lugar a un número ** complejo no real,).

Ejemplo:

- Resolver la ecuación:

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$



Su solución gráfica es una parábola con el vértice hacia abajo al tener positivo el coeficiente de x^2, como hemos representado aquí.

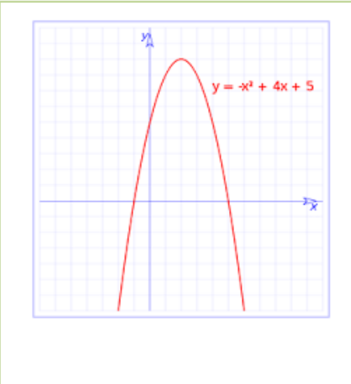
Vamos a ver que sus soluciones analíticas son los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas.

Comprobémoslo:

$2x^2 + 3x - 2 = 0$. Aplicando la fórmula general de resolución de una ecuación de segundo grado completa.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.2.(-2)}}{2.2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -2,$$

que coinciden con los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas.



Ejemplo:

- Vamos a considerar ahora un ejemplo de una ecuación de segundo grado con el coeficiente de x^2 negativo $-x^2 + 4x + 5$ cuya representación gráfica es una parábola con el vértice hacia arriba:

Como en el ejemplo anterior aplicamos la fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado, la ecuación es:

$$-x^2 + 4x + 5$$

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Cuya solución es:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.(-1).5}}{2.(-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{-2} = \frac{-4 \pm 6}{-2} \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = 5\,,$$

que coinciden con el corte de la parábola con el eje de abscisas.

Suma y producto de las soluciones en una ecuación de segundo grado

Vamos a calcular ahora a qué es igual la suma y el producto de las dos raíces de una ecuación de segundo grado.

Llamamos:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a las dos soluciones o raíces.

Veamos en primer lugar, a qué es igual la suma de ambas:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} + -b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{b}{a}$$

Es decir:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Veamos ahora el producto:

$$x_1 . x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} . \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Es decir: $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$

Fórmula de *Cárdano*. $x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Las igualdades anteriores nos permite resolver el problema inverso al habitual: en lugar de dada una ecuación hallar sus raíces o soluciones, podremos, sabiendo cuáles son las soluciones de una ecuación, hallar la expresión de dicha ecuación.

En efecto, consideramos la ecuación de segundo grado de siempre, de soluciones x_1 y x_2:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dividiendo toda la ecuación por el coeficiente de x^2:

BY NC SA

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

Ecuación equivalente a la dada.

Fijándonos en dicha ecuación, vemos que el coeficiente de la x es igual a la suma de las dos raíces con el signo contrario, mientras que el término independiente es igual al producto de las dos raíces.

Como consecuencia: si las dos raíces de una ecuación de segundo grado son x_1 y x_2, la ecuación es:

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1.x_2=0 \Leftrightarrow x^2-sx+p=0$$

Ejemplo:

- Las dos raíces de una ecuación de segundo grado son $x_1 = 1/2$ y $x_2 = 2/3$. ¿Cuál es esa ecuación?

Sumando las dos raíces tenemos: $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$. Lo llamamos s.

Multiplicamos las dos raíces y tenemos: $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. Lo llamamos p.

Por la fórmula anterior obtenemos que la ecuación es:

$$x^2-\frac{7}{6}x+\frac{1}{3}=0.$$

Si quitamos denominadores nos queda:

$$6x^2-7x+2=0.$$

- Otra forma de resolver este tipo de problemas es hacer uso de la factorización de polinomios que se estudió en páginas anteriores.

Consideramos la ecuación de segundo grado completa $ax^2+bx+c=0$ de soluciones x_1 y x_2.

Sabemos que esta primera ecuación es equivalente a esta otra: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

En consecuencia, el polinomio correspondiente a la misma es:

$$p(x)=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$$

Tiene como raíces los números x_1 y x_2 y su descomposición factorial es:

$$p(x)=(x-x_1)(x-x_2)$$

Si efectuamos el producto, podemos escribir la ecuación correspondiente:

$$(x-x_1)(x-x_2)=0$$

Se pueden plantear múltiples problemas de la vida real y de aplicación a otras ciencias.

Las pautas a seguir son iguales que las de las ecuaciones de primer grado.

Veamos un ejemplo:

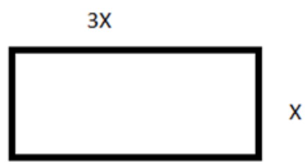
Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- Queremos sembrar de césped una parcela rectangular de 27 m^2, de manera que uno de los lados de la misma sea el triple que el otro. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?

Llamando x al lado más pequeño del rectángulo, el otro, al ser triple, medirá $3x$.

Puesto que el área del rectángulo es igual al producto de la base por la altura:



$$3x \cdot x = 27 \Rightarrow 3x^2 = 27 \Rightarrow x^2 = 9$$

Por tanto las dos soluciones de esta ecuación son $x = 3$ y $x = -3$.

Pero puesto que no tienen sentido que una longitud sea negativa para una parcela, la única solución válida para es $x = 3$ m. Según esto las dimensiones de la parcela son 3 m y 9 m.

Ecuaciones bicuadradas:

Se llaman ecuaciones **bicuadradas** a las ecuaciones del tipo siguiente:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Son ecuaciones de cuarto grado, en las cuales la incógnita aparece únicamente elevada a potencias pares. Al ser de cuarto grado, tendrá 4 soluciones.

El proceso general para resolver este tipo de ecuaciones es hacer un cambio de variable.

Haciendo $t=x^2$ tendremos la expresión siguiente:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Rightarrow a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0 \Rightarrow at^2 + bt + c = 0$$

Conseguimos convertir la ecuación de cuarto grado en una ecuación de segundo grado fácil de resolver, de ahí que lo haya incluido como una ecuación de segundo grado particular.

Se resuelve la ecuación de segundo grado como tal y una vez resuelta debemos realizar el último paso:

Hemos hallado el valor de t, pero la incógnita es x. Con lo cual hemos de deshacer el cambio efectuado:

$$\text{Si } x^2 = t \Rightarrow x = \pm\sqrt{t}$$

Ejemplo:

- Resolver la ecuación $3x^4 + x^2 - 4 = 0$

Efectuando el cambio $x^2 = t$, la ecuación se convierte en :

$$3t^2 + t - 4 = 0$$

Que resolvemos para t:

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$t=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4.3.(-4)}}{2.3}=\frac{-1\pm 7}{6}\Rightarrow t_1=1;t_2=-\frac{4}{3}$$

Es decir, las dos soluciones de esta ecuación son $t_1 = 1$ y $t_2 = -4/3$, deshacemos el cambio:

$$x^2=t=1\Rightarrow x=\pm 1$$

$$x^2=t=-\frac{4}{3}\Rightarrow x=\pm\sqrt{-\frac{4}{3}}=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}i$$

Esta última solución no es un número real, pues una raíz cuadrada negativa no tiene solución real. Se encuentra dentro de los números imaginarios que ya conoces del capítulo anterior.

En definitiva, las cuatro soluciones de la ecuación bicuadrada inicial son:

$$x_1=1;x_2=-1;x_3=\frac{2\sqrt{3}}{3}i;x_4=-\frac{2\sqrt{3}}{3}i$$

Actividades propuestas

39. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2x-4}{3x-2}=\frac{4}{7}$

b) $\frac{x+8}{x-1}-\frac{x+4}{x+1}=\frac{12x}{x^2-1}$

c) $\frac{3(2x+1)}{4}-\frac{5x+3}{6}+4x+\frac{x+1}{3}=x+\frac{151}{12}$

40. Resolver:

a. $\frac{x^2}{25}+\frac{(x+3)^2}{9}=1$

b. $\frac{x^2}{16}=1+\frac{3/4x}{9}$

c. $4x^4+8x^2-12=0$

d. $80x^4-48x^2-12=0$

41. Sumando siete unidades al doble de un número más los 3/2 del mismo obtenemos como resultado el séxtuplo de dicho número menos 23.¿De que número se trata?

42. Las dimensiones de un rectángulo son 54 y 36 metro. Trazar una paralela al lado que mide 36 m de modo que se forme un rectángulo semejante al primero. ¿Cuáles son las longitudes de los segmentos en que dicha paralela divide al lado de 54 m?

43. Deseamos vender un coche, un piso y una finca por un total de 300000 €.Si la finca vale 4 veces más que el coche y el piso cinco veces más que la finca .¿Cuánto vale cada cosa?

2.3. Resolución de inecuaciones de primer grado y su interpretación gráfica

Una **inecuación** es una desigualdad algebraica en la que aparecen una o más incógnitas.

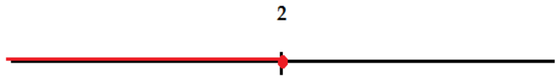
El **grado** de una inecuación es el mayor de los grados al que están elevadas sus incógnitas.

Así,

- $4 \geq x + 2$ y $x + y \geq 2$ son inecuaciones de primer grado, mientras que $x^2 - 5 \geq x$ es de segundo grado.

Resolver una inecuación consiste en encontrar los valores que la verifican. Éstos se denominan **soluciones** de la misma.

Por ejemplo:

- $4 \geq x + 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2]$ $\Leftrightarrow$ 

Inecuaciones equivalentes

Dos inecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución.

A veces, para resolver una inecuación, resulta conveniente encontrar otra equivalente más sencilla. Para ello, se pueden realizar las siguientes transformaciones:

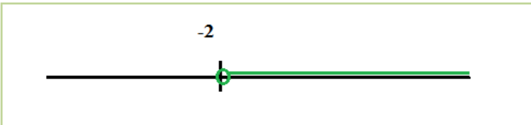
- Sumar o restar la misma expresión a los dos miembros de la inecuación.

$$5x + 4 < 9 \Leftrightarrow 5x + 4 - 4 < 9 - 4 \Leftrightarrow 5x < 5$$

- Multiplicar o dividir ambos miembros por un número positivo.

$$5x < 5 \Leftrightarrow 5x : 5 < 5 : 5 \Leftrightarrow x < 1$$

- Multiplicar o dividir ambos miembros por un número negativo y cambiar la orientación del signo de la desigualdad.

$x < 2 \Leftrightarrow (-x) \cdot (-1) > 2 \cdot (-1) \Leftrightarrow x > -2 \Leftrightarrow (-2, +\infty) \Leftrightarrow$ 

Inecuaciones de primer grado con una incógnita

Una inecuación de primer grado con una incógnita puede escribirse de la forma:

$$ax > b,\ ax \geq b,\ ax < b \quad \text{o bien} \quad ax \leq b.$$

Para resolver la inecuación en la mayoría de los casos conviene seguir el siguiente procedimiento:

1º) **Quitar denominadores**, si los hay. Para ello, se multiplica los dos miembros de la ecuación por el m.c.m. de los denominadores.

2º) **Quitar los paréntesis**, si los hay.

3º) **Transponer** los términos con x a un miembro y los números al otro.

4º) **Reducir** términos semejantes.

5º) **Despejar** la x.

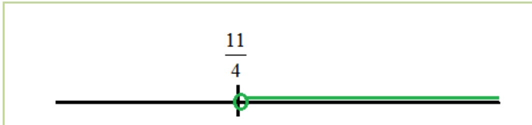
Ejemplo:

- $$\frac{x-5}{3}-\frac{(x-8)}{6}>\frac{3-x}{2} \Leftrightarrow \frac{2(x-5)-(x-8)}{6}>\frac{3(3-x)}{6} \Leftrightarrow 2(x-5)-(x-8)>3(3-x)$$

$$\Leftrightarrow 2x-10-x+8>9-3x \Leftrightarrow 2x-x+3x>10-8+9 \Leftrightarrow$$

$$4x>11 \Leftrightarrow x>\frac{11}{4}$$

$$x \in \left(\frac{11}{4},+\infty\right)$$



Actividades propuestas

44. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $5 + 3x < 2x + 4$ b) $3 + 4x \leq 8x + 6$ c) $5 + 4x > 3x + 2$ d) $1 + 3x \geq 5x + 7$

45. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $4(3 + 2x) < -(6x + 8)$ b) $7(2 + 3x) \leq 5(6x + 3)$ c) $9(2 + 4x) + 4(5x - 2) > 3(2x + 1)$

46. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $6 + 3x < x/3 + 1$ b) $5 + 5x/2 \leq 9x/2 + 1$ c) $(2 + 5x)/3 > 4x + 1$ d) $(1 + 5x)/2 + 1 \geq (3x + 6)/4$

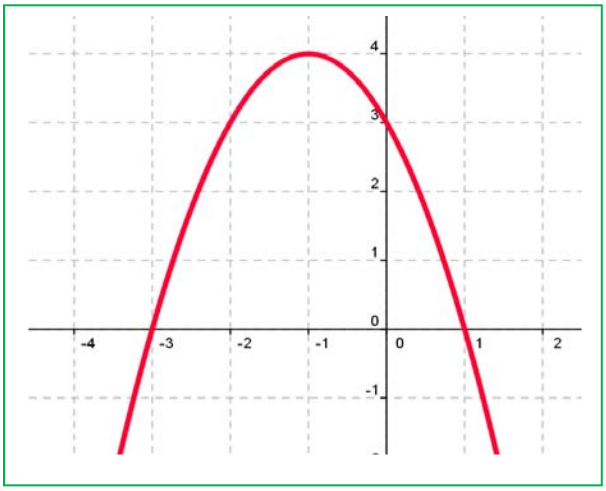
47. Escribe una inecuación cuya solución sea el siguiente intervalo:

a) $[2, \infty)$ b) $(-\infty, 3)$ c) $(4, \infty]$ d) $(-\infty, 2)$

48. Calcula los valores de x para que sea posible calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{2x-3}$ b) $\sqrt{-x-9}$ c) $\sqrt{2-7x}$ d) $\sqrt{-2x+7}$

2.4. Resolución de inecuaciones lineales de segundo grado



Una inecuación de segundo grado con una incógnita puede escribirse de la forma:

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

empleando cualquiera de los cuatro signos de desigualdad.

Para resolverla, calculamos las soluciones de la ecuación asociada, las representamos sobre la recta real, quedando por tanto la recta dividida en tres, dos o un intervalo, dependiendo de que la ecuación tenga dos, una o ninguna solución.

En cada uno de ellos, el signo del polinomio se mantiene constante, por lo que bastará con determinar el signo que tiene dicho polinomio para un valor cualquiera de cada uno de los intervalos. Para saber si las soluciones de la ecuación verifican la inecuación, bastará con sustituirla en la misma y comprobarlo.

Ejemplo:

- *Representa gráficamente la parábola*

$$y = x^2 + 4x + 6$$

e indica en qué intervalos es $x^2 + 4x + 6 > 0$.

Observa en la gráfica que la parábola toma valores positivos entre –3 y 1. La solución de la inecuación es:

$$x \in (-3, 1).$$

El punto –3 no es solución, ni tampoco el punto 1, pues el problema tiene una desigualdad estricta, >. Si tuviera la desigualdad $\geq$, $x^2 + 4x + 6 \geq 0$, la solución sería:

$$x \in [-3, 1\}.$$

Si fuera $x^2 + 4x + 6 < 0$, la solución sería: $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

Si fuera $x^2 + 4x + 6 \leq 0$, la solución sería: $x \in (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$.

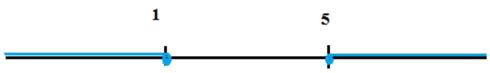
Ejemplo:

- $x^2 - 6x + 5 \geq 0$

Las raíces de $x^2 - 6x + 5 = 0$ son $x = 1$ y $x = 5$.

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 5)$	5	$(5, +\infty)$
Signo de $x^2 - 6x + 5$	+		–		+
$x^2 - 6x + 5 \geq 0$	si		no		si

Por tanto, la solución es $x \in (-\infty, 1] \cup [5, \infty)$



Actividades propuestas

49. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 1 \geq 0$ b) $x^2 - 4 \leq 0$ c) $x^2 - 9 > 0$ d) $x^2 + 4 \geq 0$
e) $2x^2 - 50 < 0$ f) $3x^2 + 12 \leq 0$ g) $5x^2 - 45 > 0$ h) $x^2 + 1 \geq 0$

50. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + x \leq 0$ b) $x^2 - 5x > 0$ c) $x^2 \leq 8x$
d) $x^2 \leq 3x$ e) $2x^2 - 3x > 0$ f) $5x^2 - 10x < 0$

51. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 2x - 3 \leq 0$

b) $-x^2 - 2x + 8 \geq 0$

c) $x^2 + 9x + 14 > 0$

d) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

CC BY NC SA

e) $-x^2 - 4x - 5 < 0$

f) $x^2 + 8x + 16 > 0$

g) $x^2 + x + 3 \geq 0$

h) $2x^2 - 3x - 5 \leq 0$

52. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + x - 6 > 0$

b) $x^2 - x - 12 \leq 0$

c) $x^2 - \mathrm{x} - 20 < 0$

d) $x^2 + 5x - 14 \geq 0$

e) $-2x^2 + 3x + 2 > 0$

f) $3x^2 + 2x - 1 \leq 0$

g) $5x^2 - 7x - 6 \geq 0$

h) $2x^2 + x - 15 < 0$

53. Calcula los valores de x para que sea posible obtener las siguientes raíces:

a) $\sqrt{x^2 - 1}$ b) $\sqrt{-x^2 + 4}$ c) $\sqrt{x^2 + 5x + 6}$ d) $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$

54. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $(2x + 5)(2x - 5) \leq 11$ b) $(2x - 5)(4x - 3) - (x - 10)(x - 2) \geq 50$ c) $\dfrac{3x-2}{x} \leq \dfrac{5-2x}{x+3}$

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Los sistemas de ecuaciones lineales son ecuaciones en las que todas sus incógnitas están elevadas a la unidad, no pudiendo aparecer el producto de dos de ellas.

Es un conjunto de ecuaciones que debe verificarse para los mismos valores de las incógnitas, llamadas **soluciones.**

Resolver un sistema es encontrar los valores que, sustituidos en las incógnitas, cumplan todas las ecuaciones a la vez

Se clasifican atendiendo a criterios diversos: número de ecuaciones o de incógnitas, tipo de las soluciones…

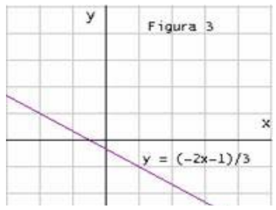
Los sistemas de ecuaciones lineales atendiendo, al tipo de de solución, se clasifican en, los que tienen solución se llaman *compatibles* y los que no, *incompatible*. Los compatibles pueden ser

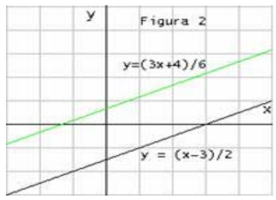
- **Compatible determinado:** si posee una solución
- **Compatible indeterminado:** si posee más de una solución (poseen infinitas)

Sistemas de ecuaciones y posiciones de sus rectas en el plano:

Sistema Compatible
- Determinado
  - Solución única
  - Rectas secantes
- Indeterminado
  - Infinitas soluciones
  - Rectas coincidentes

Sistema Incompatible
- No tiene solución
- Rectas paralelas





Vamos a repasar los tres métodos elementales de resolución de sistemas lineales con dos ecuaciones y con dos incógnitas que son:

Ejemplo

- Resolveremos el siguiente sistema:

$5x - y = 3$

$2x + 3y = 8$

- ***Método de sustitución:***

El proceso consiste en despejar una cualquiera de las incógnitas de una cualquiera de las ecuaciones y sustituir en la otra.

Despejamos por ejemplo, la y de la primera ecuación:

$$y = 5x - 3$$

Y sustituimos en la segunda:

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$2x + 3\,(5x - 3) = 8 \;\Rightarrow x = 1$

Y, por tanto $y = 2$

- ***Método de Igualación:***

Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones, igualando posteriormente ambas expresiones.

Despejamos, por ejemplo, la y en ambas ecuaciones:

$$\underline{\mathbf{5x - y = 3}}$$

$$2x + 3y = 8 \Rightarrow y = 5x - 3$$

$$y = \frac{8 - 2x}{3}$$

Igualando:

$$5x - 3 = \frac{8 - 2x}{3} \Rightarrow x = 1$$

Posteriormente, para hallar $\boldsymbol{y}$ se sustituye el valor encontrado de x en una cualquiera de las dos ecuaciones iniciales, y se calcula el correspondiente valor *de* $\boldsymbol{y}$.

- ***Método de reducción:***

Este método consiste en transformar alguna de las ecuaciones en otras equivalentes de manera que al sumarlas o restarlas se eliminen una de las incógnitas.

Multiplicando la primera ecuación por 3, obtenemos el sistema equivalente al siguiente:

$$\underline{\mathbf{5x - y = 3}} \qquad \underline{\mathbf{15x - 3y = 9}} \Rightarrow 17x = 17 \quad \Rightarrow x = 1$$

$$2x + 3y = 8 \quad \Rightarrow \quad 2(1) + 3y = 8$$

Gráficamente las ecuaciones con dos incógnitas representan en el plano una recta.

En el caso anterior, la ecuación: $y = 5x - 3$ y la ecuación: $y = \dfrac{8 - 2x}{3}$ son dos rectas en el plano.

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

Resolver analítica y graficamente el sistema de ecuaciones : $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

Dos rectas son secantes si sólo tienen un punto en común. Al resolver el sistema que forman sus ecuaciones obtenemos una solución que se corresponde con las coordenadas del punto de corte.

Analítica

Resolvemos el sistema por reducción.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 1^a \\ 2^a(2) \end{matrix} \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 7x = 7 \\ x = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 3 \cdot 1 + 2y = 7 \\ y = 2 \end{matrix} \quad \text{Sol}: (1,\ 2)$$

Graficamente

Hacemos la tabla de valores de cada una de las ecuaciones.

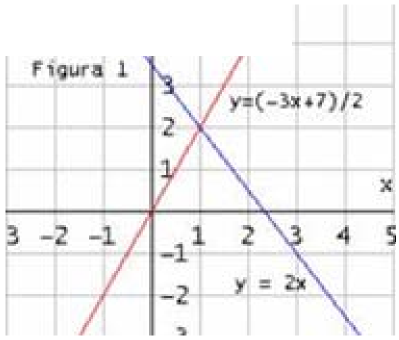
Representamos las dos rectas que forman el sistema de ecuaciones.

$1^a \quad 3x + 2y = 7 \rightarrow y = \dfrac{-3x + 7}{2} \rightarrow$

x	0	1
y	3,5	2

$2^a \quad y = 2x \rightarrow$

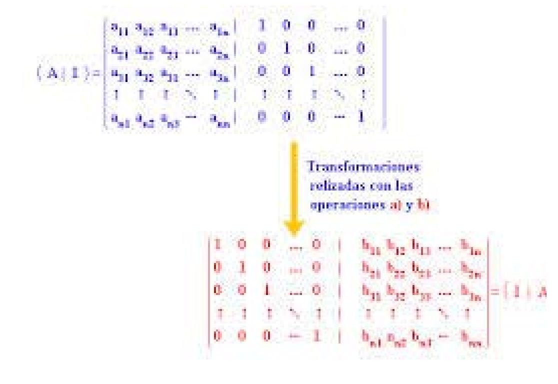
x	0	1
y	0	2



Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.1. Resolución por el método de Gauss

GAUSS: Fuente Google



El método de *Gauss* está basado en el método de reducción también llamado de cascada o triangulación.

La ventaja que tiene este método es que es fácilmente generalizable a sistemas con cualquier número de ecuaciones y de incógnitas.

Este método consiste en obtener, para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, un sistema equivalente cuya primera ecuación tenga tres incógnitas; la segunda, dos; y la tercera una. Se obtiene así un sistema triangular de la forma siguiente:

> **Recuerda que:**
>
> Un sistema equivalente a otro cuando ambos tienen las mismas soluciones.
>
> Son sistemas cuyas ecuaciones son complicadas, en su lugar resolvemos otro sistema que tenga las mismas soluciones que el propuesto (sistema equivalente) y que sea de ecuaciones mucho más sencilla

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ 0 + B'y + C'z = D' \\ 0 + 0 + C''z = D'' \end{cases}$$

La resolución del sistema es inmediata; en la tercera ecuación calculamos sin dificultad el valor de z, llevamos este valor de z a la segunda ecuación y obtenemos el valor de y, y con ambos valores calculamos el valor de x en la primera ecuación.

Ejemplo:

- Resuelve, aplicando el método de Gauss, el sistema:

$$\begin{aligned} x + 4y + 3z &= -1 \\ 2x - 3y - 2z &= 1 \\ -x + 2y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

El proceso es el siguiente:

1. Se elimina la incógnita x en las ecuaciones segunda y tercera, sumando a éstas, la primera ecuación multiplicada por 2 y 1, respectivamente, quedando el sistema:

$$\begin{array}{ll} & x + 4y + 3z = -1 \\ E2 - 2E1 & 0 - 11y - 8z = 3 \\ E3 + E1 & 0 + 6y + 7z = 1 \end{array}$$

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. Suprimimos la incógnita y de la tercera ecuación sumando a la misma, previamente multiplicada por 11, la segunda multiplicada por 6:

$$\begin{array}{ll} & x + 4y + 3z = -1 \\ & 0 - 11y - 8z = 3 \\ 11E3 + 6E2 & 0 + 0 + 29z = 29 \end{array}$$

3. Se resuelve el sistema escalonado empezando por la tercera ecuación:

$$29z = 29 \Rightarrow z = \frac{29}{29} \Rightarrow z = 1$$

Ahora, en la segunda ecuación:

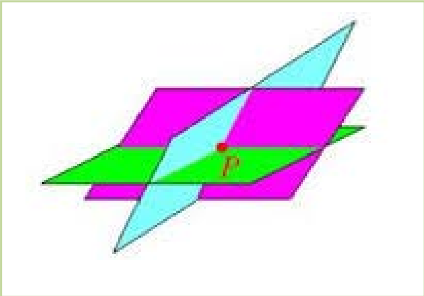
$$-11y - 8\,(1) = 3 \Leftrightarrow -11y = -11 \Leftrightarrow y = -1$$

Y, por último, en la primera:

$$x + 4\,(-1) + 3.1 = -1 \Leftrightarrow x = -1 + 1 = 0$$

La solución del sistema es:

$$x = 0,\ y = -1,\ z = 1$$



Geométricamente como cada ecuación lineal con tres incógnitas representa un plano, podemos decir que los tres planos se cortan en el punto (0, –1, 1) que es el único punto común a los tres.

Es un sistema **compatible determinado.**

3.2. Discusión de sistemas aplicando el método de Gauss

Discutir un sistema consiste en explicar razonadamente sus posibilidades de solución dependiendo del valor de sus coeficientes y términos independientes. En los sistemas escalonados la discusión se hace a partir de la ecuación más simple, que supondremos que es la última. Así, estudiando la tercera ecuación del sistema [2], *a''*33*z* 5 *b''*3, se determinan las posibilidades de solución del sistema inicial, verificándose:

Partimos del sistema inicial

$$\begin{array}{ll} a_{11}x + a_{12}\,y + a_{13}z = b_1 & \text{(E1)} \\ a_{21}x + a_{22}\,y + a_{23}z = b_2 & \text{(E2)} \\ a_{31}x + a_{32}\,y + a_{33}z = b_3 & \text{(E3)} \end{array}$$

que transformamos en otro equivalente a él, de la forma:

$$\begin{array}{ll} a_{11}x + a_{12}\,y + a_{13}z = b_1 & \text{(E1)} \\ 0 + a'_{22}\,y + a'_{23}z = b'_2 & \text{(E'2)} \\ 0 + 0 + a_{33}''z = b''_3 & \text{(E''3)} \end{array}$$

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Para ello se elimina la incógnita x de la ecuación segunda ($E2$) y (E3) y las incógnitas x e y de la tercera ecuación ($E3$).

Así, estudiando la tercera ecuación del sistema propuesto, $a_{33}''z = b''_3$, se determinan las posibilidades de solución del sistema inicial, verificándose:

- Si $a_{33}'' \neq 0$ el sistema es **compatible determinado**, pues siempre se puede encontrar una solución única empezando a resolver el sistema por la tercera ecuación.
- Si $a_{33}'' = 0$ y $b''_3 = 0$ el sistema es **compatible indeterminado**, pues la ecuación $E3$ desaparece (queda $0z = 0$, que se cumple para cualquier valor de z resultando así un sistema con dos ecuaciones y tres incógnitas), el sistema anterior queda:

$$\begin{array}{lclcl} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 & & a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 & & a_{11}x + a_{12}y = b_1 - a_{13}z \\ a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 & \Leftrightarrow & a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 & \Leftrightarrow & a'_{22}y = b'_2 - a'_{23}z \\ 0z = 0 & & & & \end{array}$$

Para resolver este sistema hemos de suponer la incógnita z conocida y hallar las otras en función de ella. (En la práctica, suele hacerse $z = k$.)

- Si $a_{33}'' = 0$ y $b''_3 \neq 0$ el sistema es **incompatible**, pues la ecuación E3 queda 0z = $b''_3 \neq 0$, que evidentemente es absurda, pues cualquier valor de z multiplicado por 0 debe dar 0.

Ejemplo:

- Discute y halla la solución del sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ -x + 3y - z &= -2 \\ 2x - y + 4z &= 6 \end{aligned}$$

Utilizando el método de Gauss se tiene:

$$\begin{array}{lclclcl} x + 2y + 3z = 4 & & & & x + 2y + 3z = 4 & & x + 2y + 3z = 4 \\ -x + 3y - z = -2 & \Leftrightarrow & E2 + E1 & \Leftrightarrow & 5y + 2z = 2 & \Leftrightarrow & 5y + 2z = 2 \\ 2x - y + 4z = 6 & & E3 - 2E1 & & -5y - 2z = -2 & E3 + E2 & 0z = 0 \end{array}$$

Como la ecuación E3 se ha anulado el sistema es **compatible Indeterminado**, ya que tiene menos ecuaciones que incógnitas, tendrá infinitas soluciones, pudiendo expresarlas todas en función de una de ellas.

Este sistema es equivalente a:

$$\begin{array}{lcl} x + 2y + 3z = 4 & & x + 2y = 4 - 3z \\ 5y + 2z = 2 & \Leftrightarrow & 5y = 2 - 2z \end{array}$$

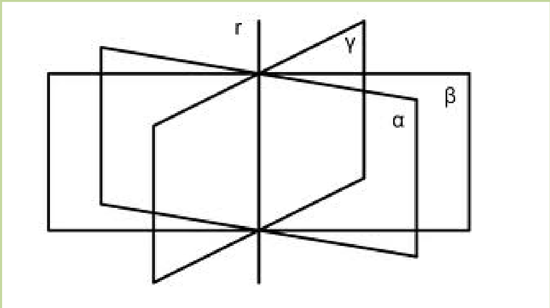
Despejando y en $E2$, resulta $y = \dfrac{2 - 2z}{5}$. Sustituyendo en $E1$:

$$x + 2.\left(\frac{2-2z}{5}\right) = 4 - 3z \Leftrightarrow x = 4 - \frac{4-4z}{5} - 3z \Leftrightarrow x = \frac{16-11z}{5}$$

Haciendo $z = k$, la solución es:

$$x = \frac{16-11k}{5}; y = \frac{2-2k}{5}; z = k$$

Geométricamente, las ecuaciones del sistema anterior representan a tres planos con infinitos puntos comunes alineados según una recta.



Actividades resueltas:

- Resolver por el método de *Gauss* el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ 3x + y + 4z = 5 \end{cases}$$

Eliminamos x en la 2ª y 3ª ecuaciones. Para ello hacemos: E2 – 2E1 y E3 - 3E1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -5y + z = -5 \\ -5y + z = -4 \end{cases}$$

Eliminamos y en la 3ª ecuación, para ello hacemos: E3 - E2:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -5y + z = -5 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

La última ecuación $0 = 1$ es un absurdo que nos dice que el sistema es **incompatible, sin solución**.

Geométricamente, los planos que representan a las ecuaciones no tienen ningún punto en común.

- Resuelve, aplicando el método de Gauss, el sistema:

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = -1 \\ 2x - 3y - 2z = 1 \\ 2x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$$

El proceso es el siguiente:

1. Se elimina la incógnita x en las ecuaciones segunda y tercera, sumando a éstas, la primera ecuación multiplicada por -2 y 1, respectivamente: *E*2 - 2*E*1; *E*3 + *E*1, quedando el sistema:

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$\begin{cases} x+4y+3z=-1 \\ 0-11y-8z=3 \\ 0+6y+7z=1 \end{cases}$$

2. Suprimimos la incógnita y de la tercera ecuación sumando a la misma, previamente multiplicada por 11, la segunda multiplicada por 6: 11*E*3 + 6*E*2.

$$\begin{cases} x+4y+3z=-1 \\ 0-11y-8z=3 \\ 0+0+29z=29 \end{cases}$$

3. Se resuelve el sistema escalonado empezando por la tercera ecuación:

$$29z = 29 \Rightarrow z = 1.$$

Ahora, en la segunda ecuación:

$$-11y - 8\ .\ 1 = 3 \Leftrightarrow -11y = 11 \Leftrightarrow y = -1$$

Y por último, en la primera:

$$x + 4\ .\ (-1) + 3\ (1) = -1 \Leftrightarrow x = -1 + 1 = 0.$$

La solución del sistema es:

$$x = 0,\ y = -1,\ z = 1.$$

Actividades propuestas

55. Resolver por el método de *Gauss* los sistemas:

a) $\begin{cases} 4x+2y-z=5 \\ 5x-3y+z=3 \\ 2x-y+z=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 7x+2y-z=0 \\ 3x+5y+4z=0 \end{cases}$

56. Resuelve y discute si es posible el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+y-2z=2 \\ x-y-z=1 \end{cases}$$

57. Discutir y resolver cuando sea posible, los siguientes sistemas lineales de ecuaciones.

a) $\begin{cases} x-6y-4z=-7 \\ x+8y+4z=6 \\ x+y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y-6z-4t=6 \\ 3x+2y-3z+8t=-7 \\ 3x-y-6z-4t=2 \\ 4x-y+3z+12t=0 \end{cases}$

3.3. Problemas de ecuaciones lineales

Se pueden plantear problemas de la vida diaria que se pueden resolver aplicando el método de *Gauss*, ya que dan lugar a sistemas de más de dos ecuaciones e incógnitas.

Antes de resolver un problema vamos a dar unos consejos que vendrán bien para su pronta y eficaz resolución.

Recuerda que:

En la resolución del problema no importa tanto llegar a obtener la solución del problema como el **proceso** seguido en el mismo, que es el que realmente nos ayuda a potenciar nuestra forma de pensar. Para empezar debemos familiarizarnos con el problema, comprendiendo el enunciado y adquiriendo una idea clara de los datos que intervienen en éste, las relaciones entre ellos y lo que se pide.

En la fase de familiarización con el problema se deben tener en cuenta las pautas siguientes:

Antes de hacer trata de entender

Tómate el tiempo necesario.

Actúa sin prisa y con tranquilidad

Imagínate los elementos del problema y juega con ellos

Pon en claro la situación de partida, la intermedia y a la que debes llegar.

Buscar estrategias para resolver el problema y una vez encontrada llevarla adelante.

Revisar el proceso y sacar consecuencias de él: El resultado que hemos obtenido, hacemos la comprobación y observamos que verifica las condiciones impuestas por el problema.

Ejemplo:

- Averigua cuántos hombres, mujeres y niños hay en una reunión sabiendo que: Si hubiera un niño más, habría igual número de niños que de hombres y mujeres juntos. Si hubiese 8 mujeres más, el número de éstas doblaría a la suma de hombres y niños. El triple de la cantidad de hombres más el número de mujeres es igual al número de niños más 5.

Si llamamos x al número de hombres, al de mujeres y y al de niños z, obtendremos el sistema siguiente:

$$\begin{cases} z+1=x+y \\ y+8=2(x+z) \\ 3x+y=z+5 \end{cases}$$

Pasamos las incógnitas al 1º miembro y obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+2z=8 \\ 3x+y-z=5 \end{cases}$$

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Vamos a resolverlo aplicando el método de *Gauss*:

Eliminamos x en la 2ª y 3ª ecuación. Para ello hacemos E2-2E1; E3-3E1

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 0-3y+4z=6 \\ 0-2y+2z=2 \end{cases}$$

La 3ª ecuación es simplificable, la dividimos por 2, quedando E3/2:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ -3y+4z=6 \\ -y+z=1 \end{cases}$$

Eliminamos y en la 3ª ecuación. Para ello hacemos -3E3+E2:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ -3y+4z=6 \\ z=3 \end{cases}$$

Obtenemos así un sistema en forma escalonada muy sencillo de resolver. De la 3ª ecuación obtenemos el valor de z: $z = 3$. Sustituyendo $z = 3$ en la 2ª ecuación:

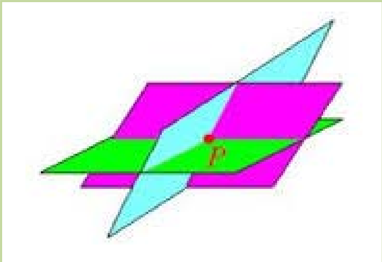
$$-3y + 4(3) = 6 \Rightarrow -3y = -6 \Rightarrow y = 2$$

Sustituyendo los valores de y y de z obtenidos en la 1ª ecuación:

$$x + 2 - 3 = 1 \Rightarrow x = 2$$

Es un sistema **compatible determinado** con solución única:

x =2 hombres, y = 2 mujeres, z= 3 niños.



Comprobamos el resultado. En efecto un niño más, 4, es igual al número de mujeres más hombres, 2 + 2. 8 mujeres más, 10, dobla al número de hombres y niños: 2(2 + 3). El triple de la cantidad de hombres, 6, más el número de mujeres, 6 + 2 = 8, es igual al número de niños más 5, 3 + 5.

Geométricamente son tres planos que se cortan en el punto (2, 2, 3) que es el único punto común a los tres.

Actividades propuestas

58. Compramos 8 kg de café natural y 5 kg de café torrefacto, pagando 66 €. Calcula el precio del kilo de cada tipo de café, sabiendo que si mezclamos mitad y mitad resulta el kilo a 5 €.

59. Una madre tiene el doble de la suma de las edades de sus hijos. La edad del hijo menor es la mitad de la de su hermano.la suma de las edades de los niños y la de la madre es 45 años. ¿Qué edades tienen?

60. Deseamos vender un coche, un piso y una finca por un total de 300000 €. Si la finca vale cuatro veces más que el coche y el piso cinco veces más que la finca, ¿cuánto vale cada cosa?

61. Las tres cifras de un número suman 18.Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, se obtiene 594; la cifra de las decenas es media aritmética entre las otras dos. Halla dicho número.

3.4. Sistemas de inecuaciones lineales

Un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas es el conjunto de dos o más inecuaciones, que debe satisfacerse a la vez.

Para su resolución, se procede de la manera siguiente:

- Se resuelve cada inecuación por separado.
- **El conjunto solución** del sistema, también llamado **región factible**, está formada por las soluciones comunes a todas las inecuaciones.

Ejemplo:

- Tomemos como ejemplo el sistema de inecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$$

1º Representamos la región solución de la primera inecuación.

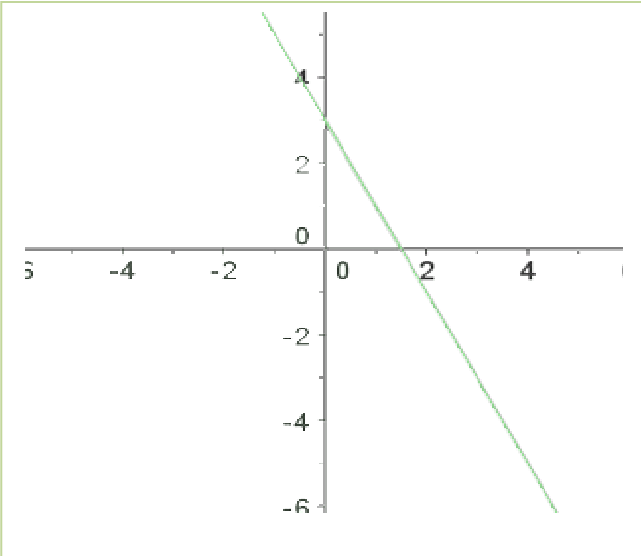
Transformamos la desigualdad en igualdad.

$$2x + y = 3$$

Damos a una de las dos variables dos valores, con lo que obtenemos dos puntos.

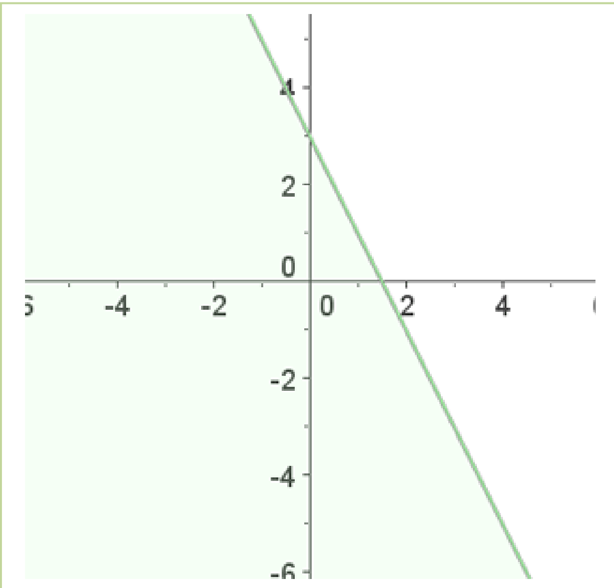
$x = 0; \quad 2 \cdot 0 + y = 3; \quad y = 3; \qquad (0, 3)$

$x = 1; \quad 2 \cdot 1 + y = 3; \quad y = 1; \qquad (1, 1)$



Al representar y unir estos puntos obtenemos una recta.

Tomamos un punto, por ejemplo el (0, 0), los sustituimos en la desigualdad. Si se cumple, la solución es el semiplano donde se encuentra el punto, si no la solución será el otro semiplano.



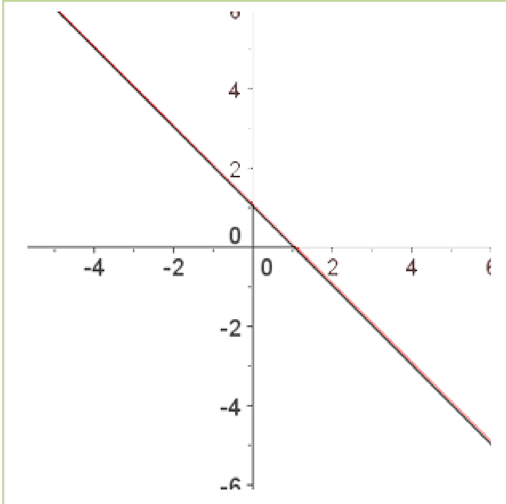
$2x + y \leq 3$

$2 \cdot 0 + 0 \leq 3 \qquad 0 \leq 3 \qquad$ **Sí**

El semiplano que está sombreado es la solución de la primera inecuación.

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Hacemos lo mismo con la segunda inecuación:



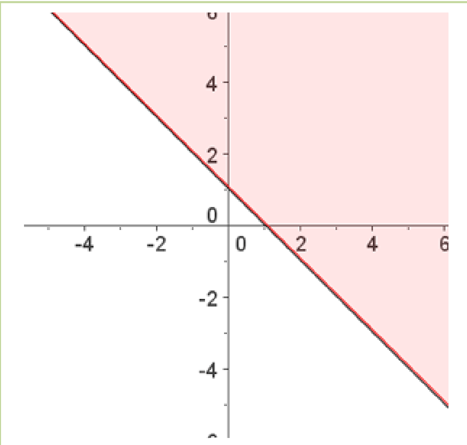
2º Representamos la región solución de la segunda inecuación.

$x + y = 1$

$x = 0; \quad 0 + y = 1; \quad y = 1; \quad (0, 1)$

$x = 1; \quad 1 + y = 1; \quad y = 0; \quad (1, 0)$

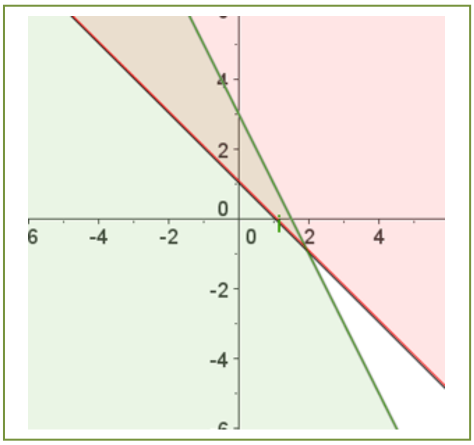
Tomamos un punto, el (0, 0) por ejemplo y lo sustituimos en la inecuación, como no se cumple la desigualdad será el semiplano en el que no está el punto.



$x + y \geq 1$

$0 + 0 \geq 1$ **No**

3º La solución es la intersección de las regiones soluciones.



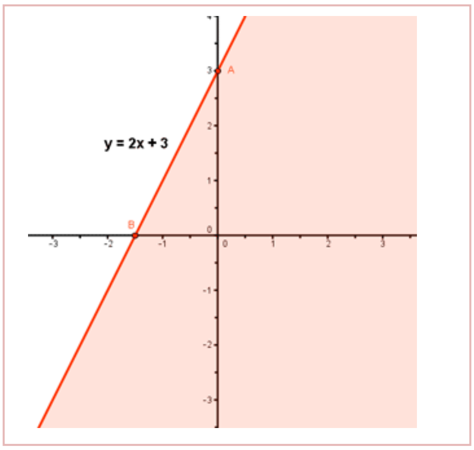
Actividades resueltas:

- Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y \geq -3 \\ x + y < 2 \end{cases}$$

Conjunto de soluciones de la primera inecuación:

$2x - y = -3 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x + 3.$



Puntos de corte de la recta con los ejes:

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2x + 3 = 3 \quad \Rightarrow \quad A = (0, 3)$

$y = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 2x + 3 \quad \Rightarrow \quad x = -3/2 \quad \Rightarrow \quad B = (-3/2, 0)$

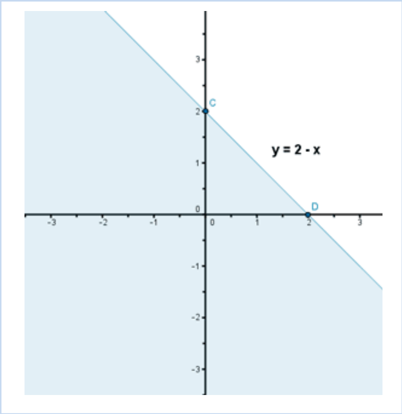
Probamos con puntos a ambos lados de la recta para ver cuál cumple la inecuación:

$(0, 0), \quad 2x - y \geq -3 \quad \Rightarrow \quad 0 \geq -3$ SI

Como se cumple la igualdad para el punto propuesto la región factible es el semiplano al que pertenece el punto referido.

Conjunto de soluciones de la segunda inecuación:

$$x + y = 2 \qquad y = 2 - x$$



Puntos de corte de la recta con los ejes:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2 - x = 2 \quad \Rightarrow \quad C = (0, 2)$$

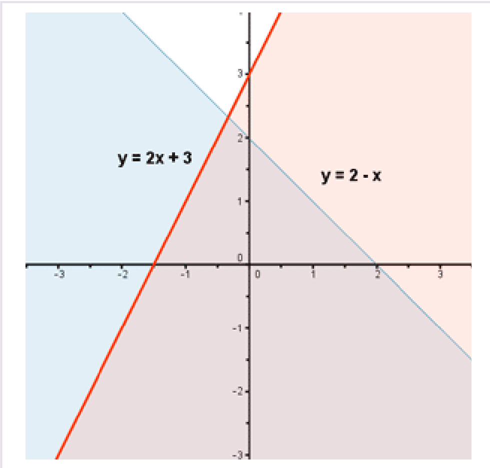
$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 2 - x \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad D = (2, 0)$$

Probamos con puntos a ambos lados de la recta para ver qué región verifica la inecuación:

$$(0, 0), \quad x + y < 2 \quad \Rightarrow \quad 0 < 2$$

Como se cumple para el punto dado el semiplano elegido es en el que está el punto.

El conjunto de soluciones del sistema, o región factible, está formado por aquellos puntos que cumplan ambas inecuaciones, por tanto, la solución es la intersección de ambos semiplanos:



Actividades propuestas

62. Encuentra la región factible del sistema:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6x + 5y \leq 30 \\ x + 2y \leq 8 \end{cases}$$

63. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{x - 2y + 3}{3} \geq \dfrac{x - y + 1}{2} \\ 1 - \dfrac{2x - 4 - y}{3} + \dfrac{2x + 3y}{2} \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ y - 2x \geq 3 \\ y \leq 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x+1) \cdot 10 + x \leq 6(2x+1) \\ 4(x-10) < -6(2-x) - 6x \end{cases}$

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

El origen del Álgebra

El origen del Álgebra no está en Grecia, está en Bagdad, hacia el año 773, con su Casa de la Sabiduría, un observatorio y una biblioteca. Los libros llegaban en distintas lenguas y fue preciso traducirlos al árabe. Libros de todo tipo, científicos, filosóficos… En esa época Bagdad era la nueva Alejandría gobernada por el califa *Harún al-Raschid*, que promovió la búsqueda de manuscritos.

El matemático más importante fue *al-Jwarizmi*. Si lees este nombre en voz alta te sonará parecido a *algoritmo*, palabra que se deriva de él. Nació en lo que hoy es Uzbekistán. Escribió el primer libro de Álgebra (الجبر, al-Jabr) palabra que en árabe significa colocar, recomponer.

Pretendía convertir lo oscuro en claro y lo complejo en simple.

Cervantes, en el Quijote, habla de un *algebrista* que arreglaba huesos rotos o dislocados.

Hasta ahora se había trabajado con números conocidos, pero al-Jwarizmi dice "*esa cosa que busco, voy a nombrarla, pero como no la conozco, la llamaré cosa*". Y cosa en árabe se dice *chei*. Lo que se hace en álgebra es utilizar la cosa, la incógnita, como si se conociese, y se intenta descubrirla.

La noción de ecuación se debe a al-Jwarizmi. Con ellas no resuelve un problema numérico concreto sino una familia de problemas. Es una igualdad entre dos expresiones donde al menos en una de ellas hay una incógnita.

Resolvieron, él y sus seguidores, ecuaciones de primer, segundo y tercer grado.

Álgebra elemental es la parte del álgebra que se enseña generalmente en los cursos de Matemáticas, resolviendo ecuaciones y como continuación de la aritmética.

Álgebra abstracta es el nombre dado al estudio de las estructuras algebraicas.

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Historia del Álgebra en Europa

En el siglo XIII *Leonardo de Pisa*, hijo de Bonaccio, ***Fibonacci***, aprendió árabe. Escribió *Liber abaci*, y trajo las cifras árabes (o hindúes) a Europa.

En 1494 ***Luca Pacioli*** escribió la primera obra de álgebra impresa. No aporta conocimientos nuevos pero recoge los conocidos. Llamaba ***cosa*** a la incógnita.

Hasta ***Tartaglia*** (1499 – 1557) no se vuelve sobre problemas como la solución de ecuaciones de **tercer** grado.

En un desafío se proponen problemas como estos:

- *"Encuentra un número que sumado a su raíz cúbica de 6"*
- *"Reparte 100 monedas entre dos personas sabiendo que a la primera le corresponde la raíz cúbica de la segunda"*
- *"Se presta un capital con la condición de que se devuelva a final de un año con unos intereses de la raíz cúbica del capital. Se devuelven 800 monedas, cuánto se prestó"*

En 1572 *Raffaelle Bombelli* publica *Álgebra*, donde empieza a manejar los números complejos.

Euler (1707 – 1783) nombra a la unidad imaginaria con la letra i.

Se resuelven ecuaciones por radicales (como sabes resolver la ecuación de segundo grado). Son ecuaciones algebraicas formadas por polinomios de primer, segundo, tercer … grado. Se discute sobre el número de soluciones, extrañándose de que una ecuación de tercer grado pudiera tener más de una solución.

Fue *Karl* ***Gauss*** (1777 – 1855) quien, con el **teorema fundamental del álgebra**, dejó resuelto ese problema del número de soluciones de una ecuación algebraica: ***Una ecuación algebraica de grado n tiene siempre n raíces en el campo complejo***.

Niels Henrik ***Abel*** (1802 – 1829) demostró la imposibilidad de resolver por radicales la ecuación general de **quinto grado**.

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Noción	*Descripción*	*Ejemplos*
Polinomio	Expresión construida a partir de la suma de monomios	$-x^3+4x^2+8x+6$ Grado 3
Grado de un polinomio	El mayor grado de sus monomios	
Suma, resta y producto de polinomios	El resultado siempre es otro polinomio	$p = -3x+6$; $q = x^2+4$. $p+q = x^2-3x+10$; $p-q = -x^2-3x+2$; $p\cdot q = -3x^3+6x^2-12x+24$.
División de dos polinomios	Se obtienen otros dos polinomios, los polinomios cociente ($c(x)$) y resto ($r(x)$), ligados a los polinomios iniciales, los polinomios dividendo ($p(x)$) y divisor ($q(x)$)	$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$
Regla de Ruffini	Nos puede ayudar a la hora de factorizar un polinomio y conocer sus raíces	
Teorema del resto	El valor numérico que adopta un polinomio $p(x)$ al particularizarlo en $x=\alpha$ coincide con el resto que aparece al dividir $p(x)$ entre $x-\alpha$.	
Raíz de un polinomio	Un número real concreto α es **una raíz**, o **un cero**, del polinomio p, si al evaluar p en $x=\alpha$ obtenemos el número 0, es decir, si $p(\alpha)=0$	2 es raíz de $-3x+6$. 1 y -3 son raíces de x^2+2x-3
Factorización de un polinomio	Consiste en expresarlo como producto de otros polinomios de menor grado	$x^5-3x^3-x^2+3=$ $=(x^2-3)\cdot(x^3-1)$
Fracciones algebraicas	Es una fracción de expresiones polinómicas	$\dfrac{x^2-1}{x^3+x^2-6x}$
Resolución de ecuaciones de 1º grado	Son igualdades algebraicas con una sola incógnita y de grado uno.	$\dfrac{7(x-1)}{3}+\dfrac{5x}{6}=1-\dfrac{x}{2}$
Resolución de ecuaciones de segundo grado	Igualdades algebraicas con una sola incógnita y elevada al cuadrado.	$-x^2+4x+5$ Cuya solución es: x_1=-1; x_2=5
Resoluciones de inecuaciones de 1º grado	Desigualdades algebraicas con una sola incógnitas de grado uno	$\dfrac{x-3}{3}-\dfrac{(x-7)}{6}>\dfrac{4-x}{2}$
Resolución de inecuaciones de 2º grado	Desigualdades algebraicas con una sola incógnita, elevadas al cuadrado.	$x^2-6x+5>0$ su solución es el intervalo (1, 5).
Sistemas de ecuaciones lineales, por el método de Gauss	Los sistemas de ecuaciones lineales son ecuaciones en las que todas sus incógnitas están elevadas a la unidad, no pudiendo aparecer el producto de dos de ellas. Resolución por el método de Gauss.	$x+4y+3z=-1$ $2x-3y-2z=1$ $-x+2y+4z=2$
Sistemas de inecuaciones lineales	Los sistemas de inecuaciones lineales son inecuaciones en las que todas sus incógnitas están elevadas a la unidad.	

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Polinomios:

1. Estudia si hay números reales en los que las siguientes expresiones no pueden ser evaluadas:

a) $\dfrac{7x-9}{(x+3)\cdot(2x-16)}$ b) $\dfrac{-5x+7}{x^2-5x+6}$

c) $\dfrac{9x^3-2x}{-2x^4-3x^2-4}$ d) $\dfrac{2x-3y+5}{x^2+y^2}$

2. Calcular cuánto debe valer la letra m para que el valor numérico de la expresión algebraica siguiente sea –2 para $x=0$.

$$\frac{x^3-mx+4}{(x^4-1)(mx+2)}$$

3. Consideremos los polinomios $p(x)=-3x^3+2x^2-5x-4$, $q(x)=2x^4+3x^3-4x^2+5x+6$ y $r(x)=3x^2+5x-7$. Realiza las siguientes operaciones:

a) $p+q+r$ b) $p-q$

c) $p\cdot r$ d) $p\cdot r-q$

4. Efectúa las divisiones de polinomios:

a) $3x^4-2x^3-5x^2+7x-9$ entre $3x^2+2x-5$

b) $6x^5-7x^4+8x^3+9x^2-10x-5$ entre x^3+3x+5

5. Señala sin efectuar la división, si las siguientes divisiones son exactas o no:

a) $\dfrac{x^5+7x^4-13x^3+5x^2-17x+5}{x-3}$

b) $\dfrac{x^5+x^4-3x^3+3x^2-4x+4}{x-2}$

c) $\dfrac{9x^5+7x^4-3x^3+5x^2-17x-1}{x-1}$

6. Construye un polinomio de grado 2 tal que el número 4 sea raíz suya.

7. Escribe dos polinomios de grados diferentes y que tengan en común las raíces 2 y 3.

8. Construye un polinomio de grado 4 tal que tenga únicamente dos raíces reales.

9. Encuentra un polinomio $q(x)$ tal que al dividir $p(x)=x^6+x^4+x^2+x+1$ entre $q(x)$ se obtenga como polinomio resto $r(x)=5x^4+5x^2+1$.

10. Halla las raíces enteras o racionales de los siguientes polinomios:

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

a) $4x^3+11x^2+6x-3$

b) $3x^3-2x^2+6x-3$

c) $3x^3-4x^2+2x-1$

d) $2x^3+x^2-6x-3$

11. Descompón los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles:

$3x^3+11x^2+5x+3$
$5x^3+5x^2+x-1$
$2x^3+x^2+6x-3$
$3x^3-6x^2+x-2$

12. Realiza las operaciones entre fracciones algebraicas:

$$\frac{x-1}{x^2-3x}-\frac{4x}{x^2-6x+9}$$
$$\frac{x-1}{x^2-3x}-\frac{2x^2}{x^2-6x+9}$$
$$\frac{x+2}{x^2-3x}\cdot\frac{2x}{x^2-6x+9}$$
$$\frac{x-1}{x^2-3x}:\frac{2x}{x^2-6x+9}$$

13. Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o trinomios, o de un producto *suma por diferencia*. En caso afirmativo expresa su procedencia.

x^2-6x+9
x^4+8x^2+16
$x^2+\sqrt{20}xy+5y^2$
$x^4+2x^3+x^2+2x+1$
$x^4-2x^3+x^2+2x+1$
x^2-36
$5x^2+1$
$5x^2-11$
x^4-3y^2

14. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{2}{x(5-x)}+\dfrac{6}{2(5-x)}$ b) $\dfrac{x+y}{x-y}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ c) $\dfrac{2x+1}{4x^2-1}$

15. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\left(x^4-\dfrac{1}{x^2}\right):\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)$ b) $\dfrac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x-a}:\dfrac{x+a}{x-a}$ c) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right):\dfrac{ab}{a-b}$

16. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{x-y}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{x+y}}:\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a+y}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a-y}}$ b) $\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right):\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)$ c) $\dfrac{\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}}\cdot\dfrac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}}{\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}}$

Ecuaciones, inecuaciones y sistemas:

17. Resolver las ecuaciones siguientes:

a) $\dfrac{3x-1}{2x-4}=\dfrac{5}{9}$ b) $\dfrac{x}{2}+5=\dfrac{3x}{6}-7$ c) $\dfrac{5}{x+1}=\dfrac{5x}{x-1}-2$

18. Resolver las siguientes ecuaciones indicando cuantas soluciones tienen y cuales son:

a) $\dfrac{16x^3-7}{2x^2-3}=5+8x$ b) $x^4+8x^2-12=0$

c) $80x^4-48x^2+7=0$ d) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(x+5)^2}{25}=1$

19. El cateto mayor de un triángulo rectángulo es una unidad mayor que el cateto menor. La hipotenusa es tres unidades mayor que el cateto menor. Se pide:

a) Escribir la expresión algebraica que resulta de aplicar el Teorema de Pitágoras.
b) Calcula la hipotenusa y los catetos.

20. En una competición de baloncesto a doble vuelta participan doce equipos. Cada partido ganado vale 2 puntos y los partidos perdidos, 1 punto (no puede haber empates). Al final de la competición, un equipo tiene 36 puntos. ¿Cuántos partidos ha ganado?

21. Una caja de forma cúbica se llena con cierto número de cubitos de un centímetro cúbico y sobran 71 cubitos; pero si todos los cubitos que hay se ponen en otra caja que tiene un centímetro más por cada arista, faltan 200 para llenarla. Calcula las longitudes de las aristas de las dos cajas y el número de cubitos que hay.

22. Las tres cifras de un número suman 18. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, se obtienen 594; la cifra de las decenas es la media aritmética entre las otras dos. Halla el número.

23. Queremos averiguar las edades de una familia formada por los padres y los dos hijos. Si sumamos sus edades de tres en tres, obtenemos 100, 73, 74 y 98 años, respectivamente. ¿Cuál es la edad de cada uno de ellos?

24. Resuelve:

a) $\dfrac{x}{3}-9<2$ b) $\dfrac{5x}{7}-7\le -5x$ c) $4(2x-3)>1-7x$

d) $\dfrac{3(x+4)}{5}<2x$ e) $\dfrac{2x-4}{3}+1>\dfrac{9x+6}{6}$ f) $\dfrac{7x}{2}-1<x-\dfrac{3x+5}{4}$

25. Calcula los valores de x para que sea posible calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{3x-6}$ b) $\sqrt{-x+3}$

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

c) $\sqrt{15-3x}$ d) $\sqrt{-6x-24}$

26. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $2x^2 - 8 < 0$ b) $-x^2 + 25 \leq 0$ c) $-x^2 + 49 \geq 0$

d) $5x^2 - 45 \geq 0$ e) $9x^2 - 1 > 0$ f) $16x^2 - 9 < 0$

g) $49x^2 - 36 < 0$ h) $121x^2 + 100 \leq 0$

27. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $-2x^2 + 50x \leq 0$ b) $7x^2 + 3x \geq 0$ c) $2x^2 < 8x$

d) $-2x^2 - 24x \geq 0$ e) $-7x^2 + 14x < 0$ f) $-5x^2 - 30x \geq 0$

28. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $5x^2 \leq 0$ b) $7x^2 > 0$

c) $-2x^2 < 0$ d) $6x^2 \geq 0$

29. Calcula los valores de x para que sea posible obtener las siguientes raíces:

a) $\sqrt{2x^2+x-3}$ b) $\sqrt{x^2+2x+1}$ c) $\sqrt{-1+2x-x^2}$

d) $\sqrt{x^2+3x+5}$ e) $\sqrt{-x^2+12x+36}$ f) $\sqrt{x^2+6x-27}$ g) $\sqrt{1-4x^2}$

30. Resuelve los siguientes sistemas por el método de *Gauss* y discute el resultado:

a) $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ x+y=2 \\ y+z=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y+t=3 \\ x+z-t=1 \\ y+z+t=3 \\ x-y+z=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y+2z=4 \\ 2x+y+5z=13 \\ x+y-4z=-6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3x+4y-z=6 \\ 6x-6y+2z=2 \\ x-y+2x=-2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+4y-8z=-8 \\ 4x+8y-2z=-2 \\ 8x-y-4z=-4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-2y+3z+4t=6 \\ 2x-y+z-t=1 \\ x-y+3z+2t=5 \\ 3x-y+2z-3t=1 \end{cases}$

AUTOEVALUACIÓN

1. El valor numérico de la expresión $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ en $x=2,\ y=-1,\ z=-1$ es:

a) 17 b) 15 c) –3 d) –5

2. Al dividir el polinomio $p(x)=x^5+x^4+x^3+1$ entre $q(x)=x^2+x+1$ el polinomio resto resultante:

a) debe ser de grado 2. b) puede ser de grado 2.

c) debe ser de grado menor que 2. d) ninguna de las opciones precedentes.

3. Todo polinomio con coeficientes enteros de grado tres

a) tiene tres raíces reales. b) tiene más de tres raíces reales c) tiene tres raíces complejas

4. ¿Es posible que un polinomio, con coeficientes enteros, de grado cuatro tenga exactamente tres raíces reales, ya sean diferentes o con alguna múltiple?

5. Tiene como solución *x* = 2 la inecuación siguiente:

a) $x<2$ b) $x>2$ c) $x\le 2$ d) $x+3<5$

6. La ecuación $x^2 \le 4$ tiene de soluciones:

a) $x\in(-2,2)$ b) $x\in[-2,2]$ c) $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ d) $x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

7. La solución de la inecuación $|-x+7|\le 8$ es:

a) [–1, 1] b) (–∞, –1] c) (–1, 1) d) [1, ∞)

8. Las soluciones posibles de $\sqrt{5x-9}$ son:

a) $x<9/5$ b) $x>9/5$ c) $x\le 9/5$ d) $x\ge 9/5$

9. La solución de la inecuación $\frac{2x-3}{x-2}<1$ es:

a) (1, 2) b) (–∞, 1) c) $x<1\cup x>2$ d) (–1, 2)

10. Justifica la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes frases:

a) La regla de Ruffini sirve para dividir dos polinomios cualesquiera.

b) La regla de Ruffini permite dictaminar si un número es raíz o no de un polinomio.

c) La regla de Ruffini solo es válida para polinomios con coeficientes enteros.

d) La regla de Ruffini es un algoritmo que nos proporciona todas las raíces de un polinomio.

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF