Principi d'inducció matemàtica

$\sum vf$

Enunciat

Siga $\boldsymbol{S_r} \subseteq \mathbb{N}$ amb les propietats: $\begin{cases} \boldsymbol{r \in S} \\ \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}\ (\boldsymbol{k} > r),\ \boldsymbol{k \in S_r \longrightarrow (k+1) \in S_r} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{S_r} = \mathbb{N}$. Podem utilitzar el principi d'inducció per demostrar una proposició de la forma $\boldsymbol{p(n)}$, $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$. És suficient considerar $\boldsymbol{S_r} = \{\boldsymbol{n} \in \mathbb{N} / \boldsymbol{p(n)}$ és certa$\}$

Exemple 1 $\forall \boldsymbol{n} \geq 1$

$$1+2+3+4+5+\cdots n = \frac{(n+1)\cdot n}{2}$$

Demostració

La igualtat és certa per $\boldsymbol{n=1}$

$$\boldsymbol{1 = \frac{(1+1)\cdot 1}{2}}$$

Suposant que la igualtat és certa per $\boldsymbol{n}$, hem de demostrar que és certa per $(\boldsymbol{n+1})$

$$\boldsymbol{1+2+3+4+5+\cdots n} + (n+1) =$$

$$= \frac{\boldsymbol{(n+1)\cdot n}}{\boldsymbol{2}} + (n+1) = \frac{(n+1)\cdot n + 2\cdot(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$$

Exemple 2 $\forall \boldsymbol{n} \geq 1$

$$1+3+5+\cdots(2n-1) = n^2$$

Demostració

La igualtat és certa per $\boldsymbol{n=1}$

$$\boldsymbol{1 = 1^2}$$

Suposant que la igualtat és certa per $\boldsymbol{n}$, hem de demostrar que és certa per $(\boldsymbol{n+1})$

$$\boldsymbol{1+3+5+7+\cdots+(2n-1)} + (2n+1) =$$

$$= \boldsymbol{n^2} + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Exemple 3 $\forall \boldsymbol{n} \geq 1$

$$\boldsymbol{n^3 - n = \dot{6}} \longrightarrow \boldsymbol{(n-1)\cdot n\cdot(n+1) = \dot{6}}$$

Demostració

La igualtat és certa per $\boldsymbol{n=1}$

$$\boldsymbol{1^3 - 1 = 0 = \dot{6}}$$

Suposant que la igualtat és certa per $\boldsymbol{n}$, hem de demostrar que és certa per $(\boldsymbol{n+1})$

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 =$$

$$= n^3 + 3n^2 + 2n = n\cdot(n^2+3n+2) =$$

$$= n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$$

Exemple 4 $\forall \boldsymbol{n} \geq 1$

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n\cdot(n+1) = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}$$

Demostració

La igualtat és certa per $\boldsymbol{n=1}$

$$\boldsymbol{1\cdot 2 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(1+2)}{3}}$$

Suposant que la igualtat és certa per $\boldsymbol{n}$, hem de demostrar que és certa per $(\boldsymbol{n+1})$

$$\boldsymbol{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots n\cdot(n+1)} + (n+1)\cdot(n+2) =$$

$$= \frac{\boldsymbol{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}}{\boldsymbol{3}} + (n+1)\cdot(n+2) =$$

$$= (n+1)\cdot(n+2)\cdot\left[\frac{n}{3}+1\right] = \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{3}$$

Exemple 5 $\forall \boldsymbol{n} \geq 1$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n\cdot(2n+1)\cdot(2n-1)}{3}$$

Demostració

La igualtat és certa per $\boldsymbol{n=1}$

$$\boldsymbol{1^2 = \frac{1\cdot(2\cdot 1+1)\cdot(2\cdot 1-1)}{3}}$$

Suposant que la igualtat és certa per $\boldsymbol{n}$, hem de demostrar que és certa per $(\boldsymbol{n+1})$

$$\boldsymbol{1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2} + (2n+1)^2 =$$

$$= \frac{\boldsymbol{n\cdot(2n+1)\cdot(2n-1)}}{\boldsymbol{3}} + (2n+1)^2 =$$

$$= (2n+1)\left[\frac{n\cdot(2n-1)}{3} + (2n+1)\right] = (2n+1)\cdot\frac{2n^2+5n+3}{3} =$$

$$= (2n+1)\cdot\frac{(n+1)\cdot(2n+3)}{3} = \frac{(n+1)\cdot(2n+3)\cdot(2n+1)}{3}$$

Exemple 6 $\forall \boldsymbol{n} \geq 1$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2$$

Demostració

La igualtat és certa per $\boldsymbol{n=1}$

$$\boldsymbol{1 = \left[\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right]^2}$$

Suposant que la igualtat és certa per $\boldsymbol{n}$, hem de demostrar que és certa per $(\boldsymbol{n+1})$

$$\boldsymbol{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3} + (n+1)^3 =$$

$$= \left[\frac{\boldsymbol{n\cdot(n+1)}}{\boldsymbol{2}}\right]^2 + (n+1)^3 =$$

$$= (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right] = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} =$$

$$= \frac{(n+1)^2\cdot(n+2)^2}{4} = \left[\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\right]^2$$

Per tant, també $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$

Exemple 7 $\forall \boldsymbol{n} > 4$

$$2^n > n^2$$

Demostració

La igualtat és certa per $\boldsymbol{n=5}$

$$\boldsymbol{2^5 > 5^2}$$

Suposant que la igualtat és certa per $\boldsymbol{n}$, hem de demostrar que és certa per $(\boldsymbol{n+1})$

$$2^{n+1} = 2\cdot\boldsymbol{2^n} > 2\cdot\boldsymbol{n^2} =$$

$$= n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Exemple 8 $\forall \boldsymbol{p} > 0$

$$(1+p)^n \geq 1 + p\cdot n$$

La igualtat és certa per $\boldsymbol{n=1}$

$$\boldsymbol{(1+p)^1 \geq 1 + p\cdot 1}$$

Suposant que la igualtat és certa per $\boldsymbol{n}$, hem de demostrar que és certa per $(\boldsymbol{n+1})$

$$(1+p)^{n+1} = \boldsymbol{(1+p)^n}\cdot(1+p) \geq$$

$$\geq \boldsymbol{(1+p\cdot n)}\cdot(1+p) = 1 + p + p\cdot n + p^2\cdot n \geq$$

$$\geq 1 + p + p\cdot n = 1 + p\cdot(n+1)$$

Exemple 9 $\forall \boldsymbol{n} \geq 1$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

Demostració

La igualtat és certa per $\boldsymbol{n=1}$

$$\boldsymbol{1^2 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6}}$$

Suposant que la igualtat és certa per $\boldsymbol{n}$, hem de demostrar que és certa per $(\boldsymbol{n+1})$

$$\boldsymbol{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2} + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{\boldsymbol{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}}{\boldsymbol{6}} + (n+1)^2 =$$

$$= (n+1)\cdot\left[\frac{n\cdot(2n+1)}{6} + (n+1)\right] =$$

$$= (n+1)\cdot\frac{2n^2+7n+6}{6} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2n+3)}{6}$$

Exemple 10 $\forall \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{1}$

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Demostració

La igualtat és certa per $\boldsymbol{n=1}$

$$\boldsymbol{1 + r = \frac{1-r^2}{1-r} = \frac{(1-r)\cdot(1+r)}{1-r} = 1 + r}$$

Suposant que la igualtat és certa per $\boldsymbol{n}$, hem de demostrar que és certa per $(\boldsymbol{n+1})$

$$\boldsymbol{1 + r + r^2 + \cdots + r^n} + r^{n+1} = \frac{\boldsymbol{1 - r^{n+1}}}{\boldsymbol{1 - r}} + r^{n+1} =$$

$$= \frac{1 - r^{n+1} + (1-r)\cdot r^{n+1}}{1 - r} =$$

$$= \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1} - r^{n+2}}{1 - r} = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}$$