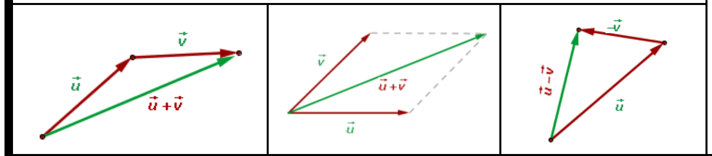
Espai vectorial $(V_2, + \cdot)$

Suma de vectors

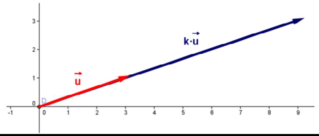
$\vec{u} = (a,b) \in V_2; \vec{v} = (c,d) \in V_2 \rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (a+c, b+d) \in V_2$



- $\cdot\ Si\ \vec{u} \in V_2\ i\ \vec{v} \in V_2 \rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in V_2$
- $\cdot\ \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
- $\cdot\ \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $\cdot\ \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
- $\cdot\ \vec{u} + \overrightarrow{-u} = \overrightarrow{-u} + \vec{u} = \vec{0}$

Multiplicació d'un vector per un escalar

$\vec{u} = (a,b) \in V_2; k \in R \rightarrow k\vec{u} = (ka, kb) \in V_2$



- $\cdot\ Si\ \vec{u} \in V_2\ i\ \lambda \in R \rightarrow \lambda\vec{u} \in V_2$
- $\cdot\ \lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
- $\cdot\ (\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
- $\cdot\ \alpha(\beta\vec{u}) = \overrightarrow{(\alpha\beta)u}$
- $\cdot\ 1\vec{u} = \vec{u}$

Dependència lineal

Combinació lineal de vectors CL

Si $\vec{u}, \vec{v} \in V_2$ direm que $\vec{v}$ és CL de $\vec{u} \leftrightarrow \vec{v} = \lambda\vec{u}$ on $\lambda \in R$
Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_2$ direm que $\vec{w}$ és CL de $\vec{u}$ i $\vec{v} \leftrightarrow \vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ on $\alpha, \beta \in R$
Aquest procés pot generalitzar-se a més vectors

Vectors LD

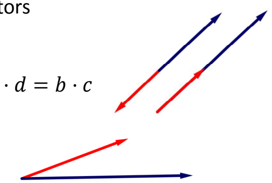
Si $\vec{u}, \vec{v} \in V_2$ direm que $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són LD $\leftrightarrow$ un d'ells és CL de l'altre
Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_2$ direm que $\vec{u}, \vec{v}$ i $\vec{w}$ són LD $\leftrightarrow$ un d'ells és CL dels altres
Aquest procés pot generalitzar-se a més vectors

Dos vectors LD

$\vec{u} = (a,b) \in V_2; \vec{v} = (c,d) \in V_2$ són LD $\leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

Vectors LI

Un conjunt de vectors és LI si no són LD



Sistema de generadors SG

Un conjunt de vectors $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \ldots, \vec{u_n}$ de V_2 són SG $\leftrightarrow$ qualsevol vector de V_2 es pot posar com CL d'aquells vectors.

Un espai vectorial direm que és de dimensió finita si pot ser generat per un número finit de vectors.

Base de V_2

Base d'un espai vectorial

Un conjunt de vectors $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \ldots, \vec{u_n}$ de V_2 són base$\leftrightarrow$**són LI i SG**

Teorema de la base

Totes les bases d'un e.v. tenen el mateix nombre de vectors. Aquest número rep el nom de dimensió de l'espai vectorial. Aixi tenim que $Dim(V_2) = 2$

Conseqüències del teorema de la base

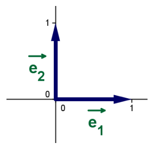
- En V_2 dos vectors LI formen base.
- En V_2 dos vectors SG formen base.
- En V_2 dos vectors LI són SG.

Base Canònica de V_2

Els vectors $\vec{e_1} = (1,0) \in V_2$ i $\vec{e_2} = (0,1) \in V_2$ són base de V_2 i aquesta base rep el nom de base canònica de V_2

Base Ortonormal de V_2

$$\vec{u}, \vec{v} \in V_2 - \{\vec{0}\}\ base\ ortonormal \leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v} \\ \|\vec{u}\| = \|v\| = 1 \end{cases}$$



Producte escalar

Si $\vec{u}, \vec{v} \in V_2$ definim $\vec{u} \cdot \vec{v}$ de forma que:

- $\cdot : V_2 x V_2 \rightarrow R \quad \vec{u} \cdot \vec{v} \in R\ \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V_2$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}\ \ \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V_2$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}\ \ \forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_2$
- $\lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v}\ \ \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V_2\ i\ \forall \lambda \in R$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0\ \ \forall\, \vec{u} \in V_2$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0\ \leftrightarrow\ \vec{u} = \vec{0}$ $\qquad \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$ per conveni

Producte escalar referit a la base canònica

$$\boldsymbol{Si\ \vec{u} = (u_1, u_2)\ i\ \vec{v} = (v_1, v_2) \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2}$$

Norma d'un vector

$\boldsymbol{Si\ \vec{u} \in V_2, definim}\ \|\vec{u}\| = +\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}};\ \boldsymbol{Si\ \vec{u} = (u_1, u_2)} \rightarrow \|\vec{u}\| = +\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

Propietats de la norma

- $\cdot\ \|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2\ \forall \vec{u} \in V_2$
- $\cdot\ \|\vec{u}\| \geq 0\ \forall \vec{u} \in V_2$
- $\cdot\ \|\vec{u}\| = 0\ \leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
- $\cdot\ \|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|\ \ \forall \vec{u} \in V_2\ i\ \forall k \in R$
- $\cdot\ (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V_2$ desigualtat de Cauchy-Schwartz
- $\cdot\ \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V_2$ desigualtat triangular o de Mikowski

Angle que formen dos vectors

Siguen $\vec{u}, \vec{v} \in V_2 - \{\vec{0}\} \rightarrow -1 \leq \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \leq 1$ per la D. Caychy-Schwartz

Definim $\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$ on $\alpha = \angle \vec{u}, \vec{v} \leq 180^o$

Producte escalar ordinari

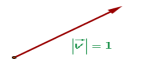
De la definició anterior tenim: $\quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\alpha)$

Si $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \rightarrow \alpha < 90^o$
Si $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \rightarrow \alpha > 90^o$
Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \alpha = 90^o$ vectors ortogonals; $\vec{u} = (u_1, u_2) \perp \vec{v} = (-u_2, u_1)$

Vector unitari

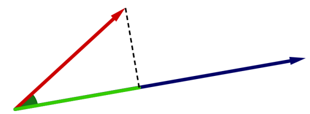
$\vec{u} \in V_2 - \{\vec{0}\}\ és\ unitari \leftrightarrow \|\vec{u}\| = 1$

Si $\vec{u} \in V_2 - \{\vec{0}\} \rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\ és\ unitari$

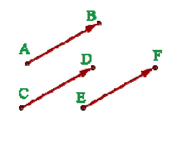


Projecció ortogonal

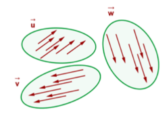
Siguen $\vec{u}, \vec{v} \in V_2 - \{\vec{0}\}$ definim $P_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\| P_{\vec{v}}^{\vec{u}}$



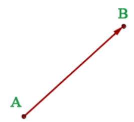
Vectors equipolents



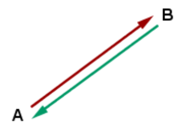
Vectors lliures



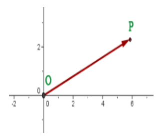
Vector fixe



Vectors oposats



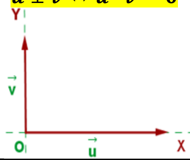
Vector de posició



Vectors Concurrents

Vectors Ortogonals

$\boldsymbol{\vec{u} \perp \vec{v} \leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$



Σvf