$\sum vf$

Número Real R

Irracionals I

Número Irracional I

Definició

Direm que un número és irracional si no pot expressar-se com una fracció.

Com a conseqüència de la definició, qualsevol decimal racional (exacte, periòdic pur o periòdic mixt) no serà número irracional. És irracional el número x=1,123456789101112131415161718… (les xifres decimals són els números naturals) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $1+\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{4}$… també són irracionals.

Al conjunt format per tots els números irracionals s'anomena **I. Propietat** $Si\ a \in Q\ i\ b \in I \rightarrow a+b \in I\ i\ a \cdot b \in I$

$\sqrt{2}, \pi, e, \phi$

Es pot demostrar que $\sqrt{2}$ és Irracional.

El número π és un número Irracional i, per tant, no pot expressar-se en forma de fracció. Té infinites xifres decimals i aproximadament val 3,14159265358979…

No és possible dibuixar amb regla i compàs un punt en R a distància π de l'origen.

Leibniz va demostrar que la següent sèrie convergeix a π. $\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \frac{4}{13} - \frac{4}{15} + \frac{4}{17} - \frac{4}{19} + \cdots$

Un altre número interessant e =2,718281828… també és irracional. I també el número d'or $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Radicals

Radical d'índex n

índex · radical · radicand

Siga $a \in R$ i $n \in N$, anomenem radical d'índex n del número a a: $\sqrt[n]{a}$

Arrel n-èssima. Direm que $\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a$

	Radicand	Índex	Número d'arrels reals	Exemple
$\sqrt[n]{a}$	a>0	n imparell	Una arrel positiva	$\sqrt[3]{27} = 3$
		n parell	Dos arrels (+,-)	$\sqrt{9} = \pm 3$; $\sqrt[4]{16} = \pm 2$
	a=0	n parell o imparell	Una arrel	0
	a<0	n imparell	Una arrel negativa	$\sqrt[3]{-8} = -2$
		n parell	Cap arrel	$\nexists \sqrt{-8}$

Propietats dels radicals

Si existeixen les arrels, s'acompleixen les següents propietats:

$\sqrt[n]{a^n} = a$ $\quad (\sqrt[n]{a})^n = a$ $\quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ $\quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $\quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$ $\quad \sqrt[n \cdot m]{a^n} = \sqrt[m]{a}$

Traure factors d'un radical. Ens basem en la següents propietats: $\sqrt[n]{a^n} = a$ $\quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

Ex: $\sqrt[3]{x^5 \cdot a^4 \cdot 81 \cdot y^3} = \sqrt[3]{x^3 x^2 \cdot a^3 \cdot a \cdot 3^3 \cdot 3 \cdot y^3} = x \cdot a \cdot 3 \cdot y \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot a \cdot 3}$

Introduir factors a un radical. Per introduir factors farem el procés invers a traure factors. Ex: $x \cdot \sqrt[4]{y} = \sqrt[4]{x^4 \cdot y}$

Radicals semblants

Direm que dos radicals són semblants si tenen el mateix radical i el mateix radicand. Ex: $\sqrt{x \cdot y^2 \cdot a}$ $\quad \sqrt{x \cdot a}$

Propietat: Sols poden sumar-se o restar-se radicals semblants: Ex: $3\sqrt{a} - \sqrt{a} = 2\sqrt{a}$; $\quad 5\sqrt[3]{xy^2} + 2\sqrt[3]{xy^2} = 7\sqrt[3]{xy^2}$

Radicals amb índex comú

L'índex comú de diversos radicals és el MCM(dels índex dels radicals) $\sqrt[3]{9}$ $\quad \sqrt[6]{20}$ $\quad \sqrt{7}$

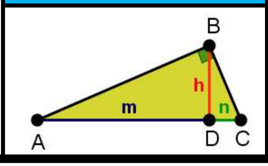
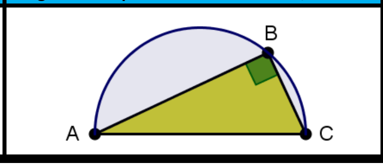
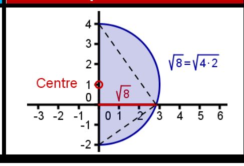
Amb el mateix índex: $\sqrt[6]{9^2}$ $\quad \sqrt[6]{20}$ $\quad \sqrt[6]{7^3}$

Propietat: Sols poden multiplicar-se o dividir-se radicals que tinguen el mateix índex.

Racionalització

El procés de transformar una fracció amb radicals en el denominador, en un altra fracció equivalent, que no els tinga, es coneix amb el nom de racionalitzar. Ex: $\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{10 \cdot \sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$; $\quad \frac{3}{\sqrt{7}-2} = \frac{3 \cdot (\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2) \cdot (\sqrt{7}+2)} = \frac{3 \cdot (\sqrt{7}+2)}{7-4} = (\sqrt{7}+2)$

Representació gràfica d'arrels quadrades. Ens basarem en les següents propietats:

Teorema de l'altura $h^2 = m \cdot n$	Angle inscrit que abarca un diametre, és recte	Representació
		

Reals R

Número Real R

El conjunt format per la unió dels racionals **Q** i dels irracionals **I** formen el conjunt dels nombres reals $R = Q \cup I$.

$$\left.\begin{matrix} N \subset Z \subset Q \\ \cup \\ I \end{matrix}\right\} = R$$

N					0·	1·	2·	3·	4·	5·	6·
Z	-4·	-3·	-2·	-1·	0·	1·	2·	3·	4·	5·	6·
Q	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
R	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

La recta real R és densa i completa

Intervals

$[a,b] = \{x \in R / a \leq x \leq b\}$ $\quad]a,b[= \{x \in R / a < x < b\}$

$[a,b[= \{x \in R / a \leq x < b\}$ $\quad]a,b] = \{x \in R / a < x \leq b\}$

$[a,+\infty[= \{x \in R / x \geq a\}$ $\quad]a,+\infty[= \{x \in R / x > a\}$

$]-\infty,b] = \{x \in R / x \leq b\}$ $\quad]-\infty,b[= \{x \in R / x < b\}$ $\quad]-\infty,+\infty[= R$

Operacions amb intervals. Unió $\cup$ i Intersecció $\cap$. Definim $I \cup J = \{x \in R / x \in I\ o\ x \in J\}$ Definim $I \cap J = \{x \in R / x \in I\ i\ x \in J\}$

Centre i radi de l'interval $[a,b]$ **ó** $]a,b[$ **centre** $c = \frac{a+b}{2}$ **i radi** $r = \frac{|b-a|}{2}$

Valor absolut. Si $a \in R$ definim $|a| = +\sqrt{a^2}$. Aquesta definició és equivalent a: $|a| = \begin{cases} -a & si\ a \leq 0 \\ a & si\ a > 0 \end{cases}$

Notació científica. Un número decimal en notació científica s'expressa de la forma $a \cdot 10^n$ $on\ 1 \leq |a| < 10\ i\ n \in Z$. El valor de a rep el nom de **mantissa** i el valor de n rep el nom **ordre de magnitud**. Ex1. $x = 3'12 \cdot 10^4$ Ex2. $x = -2'0342 \cdot 10^{-3}$

Operacions amb notació científica

Per sumar o restar dos números amb notació científica han de tenir el mateix ordre de magnitud. $1'23 \cdot 10^4 + 2'34 \cdot 10^4 = 3'57 \cdot 10^4$

Per multiplicar o dividir dos números en notació científica, es multipliquen o es divideixen les mantisses, per un costat, i les potències de 10, per altre. $1'23 \cdot 10^{-2} \cdot 2'34 \cdot 10^5 = 4'3911 \cdot 10^3$

Operacions en R **+ suma** **- resta** ***multiplicació** **/divisió**

Propietats de la suma +

1.- La + en R és ll. c. i. $\quad a \in R,\ b \in R \rightarrow a+b \in R$

2.- La + en R és commutativa $\quad a+b = b+a\ \ \forall a,b \in R$

3.- La + en R és associativa $\quad (a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c\ \ \forall a,b,c \in R$

4.- L'element neutre de + en R és 0 $\quad a+0 = 0+a = a\ \ \forall a \in R$

5.- L'element simètric d' $a \in R$ és $-a \in R$ $\quad a+(-a) = (-a)+a = 0\ \ \forall a \in R$

Propietats de la multiplicació * (.) (cap signe)

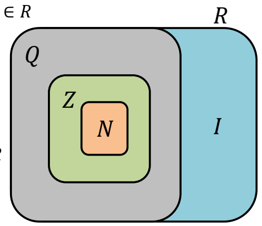
1.- La * en R és ll. c. i. $\quad a \in R,\ b \in R \rightarrow a * b \in R$

2.- La * en R és commutativa $\quad a * b = b * a\ \ \forall a,b \in R$

3.- La * en R és associativa $\quad (a * b) * c = a * (b * c) = a * b * c\ \ \forall a,b,c \in R$

4.- L'element unitat de * en R és 1 $\quad a * 1 = 1 * a = a\ \ \forall a \in R$

5.- L'element invers d' $a \in R^*$ és $\frac{1}{a} \in R$ $\quad a * \frac{1}{a} = \frac{1}{a} * a = 1\ \ \forall a \in R^*$



Propietats distributives de la multiplicació * respecte de la suma +

$a * (b+c) = a * b + a * c\ \ \forall a,b,c \in R$ $\quad [\rightarrow (llevar\ parèntesi)\ \ \leftarrow (traure\ factor\ comú)]$

$(b+c) * a = b * a + c * a\ \ \forall a,b,c \in R$

Potència d'exponent racional i base real. Definim $\begin{cases} a^n = \begin{cases} 1 & si\ n = 0\ i\ a \neq 0 \\ a \cdot a^{n-1} & si\ n > 0 \end{cases} \\ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad si\ a \neq 0 \\ a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \end{cases}$ on $n \in N, m \in N^*\ i\ a \in R$

Propietats de les potències

$a^1 = a\ \ \forall a \in R$ $\quad a^n \cdot a^m = a^{m+n}\ \ \forall a \in R\ i\ m,n \in Q$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}\ \ \forall a \in R^*\ i\ m,n \in Q$ $\quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}\ \ \forall a \in R\ i\ m,n \in Q$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n\ \ \forall a,b \in R\ i\ n \in Q$ $\quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n\ \ \forall a \in R, b \in R^*\ i\ n \in Q$

Simplificació de radicals $\sqrt[n \cdot m]{a^n} = \sqrt[m]{a}$ Ex: $\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = 3^{\frac{2}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Prioritat de les operacions. Sempre en aquest ordre: (), potències i arrels, multiplicació o/i divisió, suma o/i resta. Aquest ordre pot ser alterat per ( ). En cas de la mateixa prioritat sempre d'esquerre a dreta.

Igualtats notables

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$ $\quad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$