Combinatòria

$\sum vf$

La **combinatòria** és la rama de les matemàtiques que estudia l'enumeració, construcció i propietats d'agrupacions que satisfan certes condicions establertes. En cada problema de combinatòria hem de distinguir: **1. Població.** És el conjunt d'elements que estem estudiant. Denotarem amb n el nombre d'elements d'aquest conjunt. **2.Mostra.** És una agrupació d'elements de la població. Denotarem amb m (ordre de la mostra) el nombre d'elements de la mostra. Els diferents tipus de mostra estan determinades per dos aspectes: **Ordre.** És a dir, si és important que els elements de la mostra apareguen ordenats o no. **Repetició.** La possibilitat de repetició ono dels elements.

Factorial Factorial de n a: $n! = \begin{cases} 1 & si\ n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & si\ n > 0 \end{cases}$ Si $n \neq 0 \rightarrow n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

Número combinatori Anomenem número combinatori de n sobre m a: $\binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$

Propietats

$\binom{n}{0} = 1$ | $\binom{n}{1} = n$ | $\binom{n}{n} = 1$ | $\binom{n}{n-1} = n$ | $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ | $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Binomi de Newton

$$(a \pm b)^n = \binom{n}{0} a^n \cdot b^0 \pm \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 \pm \binom{n}{3} a^{n-3} \cdot b^3 + \cdots \pm \binom{n}{2} a^2 \cdot b^{n-2} + \binom{n}{1} a^1 \cdot b^{n-1} \pm \binom{n}{0} a^0 \cdot b^n$$

$$(a \pm b)^1 = a \pm b$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

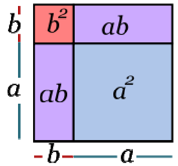
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$

$$(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$$

Els coeficients són els números combinatoris. Mireu el triangle de Tartàglia.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



Triangle de Tartàglia. Triangle de Pascal

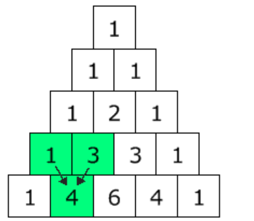
Nombres combinatoris

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

……………………………………………………………………………

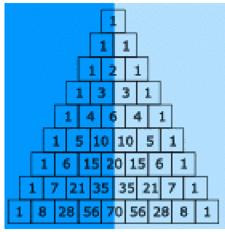
Formació

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

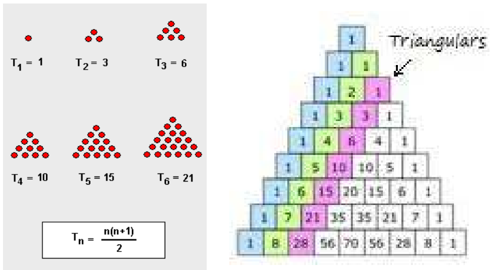


Simetria

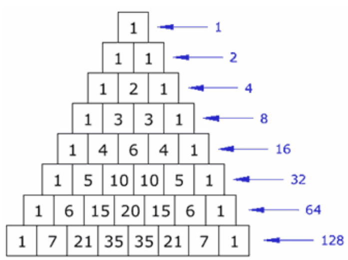
$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$



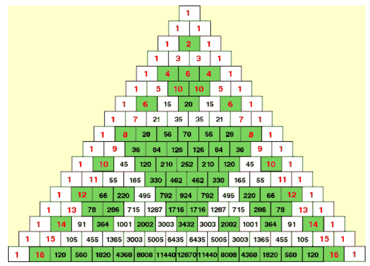
Nombres triangulars



Potències de 2

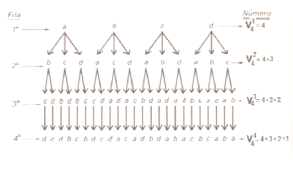


Fractal de Sierpinski (eliminem els nombres parells)



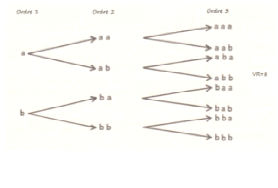
Variacions i permutacions ordinàries

Formació



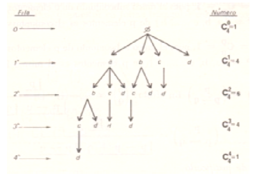
Variacions amb repetició

Formació



Combinacions ordinàries

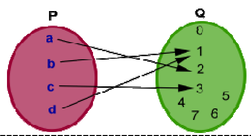
Formació

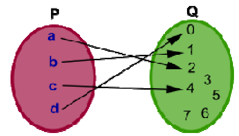


Combinacions amb repetició

Explicació

Siguen: $P = \{a, b, c, d\}$ i $Q = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$





$$\sum_{x \in P} f(x) = 7 = r$$

Tota aplicació f del conjunt P al conjunt Q de manera que la suma de totes les imatges és $r = 7$, determina una combinació amb repetició d'ordre $m = 7$ dels $p = 4$ elements del conjunt P.

A l'exemple de la gràfica1, la combinació que es formaria seria:

$$\left.\begin{array}{l} a\ 2\ vegades \\ b\ 1\ vegada \\ c\ 3\ vegades \\ d\ 1\ vegada \end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{a\ a\ b\ c\ c\ c\ d}$$

A l'exemple de la gràfica2, la combinació que es formaria seria: **a a b c c c c**

Encara que variara l'ordre, per supost, d'elements no repetits, estaríem parlant de la mateixa combinació. A diferència del que passa amb les permutacions, que al variar l'ordre, d'elements no repetits, la permutació és diferent.

Agrupació	Quants elements té la població?	Quants elements intervenen en una mostra? (ordre de la mostra)	Es poden repetir elements en cada agrupació?	Si canvia l'ordre de col·locació, l'agrupació és diferent?	Nombre d'agrupacions
Permutacions ordinàries	n	n	No	Sí	$P_n = n!$
Permutacions circulars	n	n	No	Sí	$PC_n = P_{n-1} = (n-1)!$
Variacions ordinàries	n	m	No	Sí	$V_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$
Combinacions ordinàries	n	m	No	No	$C_n^m = \binom{n}{m}$
Permutacions amb repetició	n	$n \begin{cases} a_1 es\ repeteix\ k_1 vegades \\ a_2 es\ repeteix\ k_2 vegades \\ a_3 es\ repeteix\ k_3 vegades \\ \ldots \\ a_k es\ repeteix\ k_r vegades \end{cases}$ $k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_r = n$	Sí	Sí, si no són elements repetits	$PR_n^{k_1,k_2,k_3,\ldots k_r} = \dfrac{n!}{k_1! \, k_2! \, k_3! \ldots k_r!}$
Variacions amb repetició	n	m (pot ser $m > n$)	Sí	Sí, si no són elements repetits	$VR_n^m = n^m$
Combinacions amb repetició	n	m (pot ser $m > n$)	Sí	No	$CR_n^m = \binom{n+m-1}{m}$