Σvf

Càlcul integral

Primitiva d'una funció

$F(x)$ és una primitiva de $f(x)$en $[a,b] \leftrightarrow F'(x)=f(x)\ \forall x\in[a,b]$

Si $f(x)$ té primitiva → $f(x)$ té infinites primitives. $[F(x)+C]'=F'(x)=f(x)$ on $C\in R$

Integral indefinida

El conjunt de totes les primitives de $f(x)$ es denota per: $\int f(x)\,dx=F(x)+C$ on $C\in R$

La integral indefinida és lineal: $\int[f(x)\pm g(x)]\,dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$ $\quad\int k\cdot f(x)\,dx=k\cdot\int f(x)dx$

Taula de primitives. $u=u(x)$

$\int dx=x+C$

$\int f'(x)\cdot dx=f(x)+C$

$\int x^n\cdot dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\ \ on\ n\neq -1$

$\int\frac{1}{x}\cdot dx=Ln(x)+C$

$\int\frac{-1}{x^2}\cdot dx=\frac{1}{x}+C$

$\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot dx=\sqrt{x}+C$

$\int e^x\cdot dx=e^x+C$

$\int a^x\cdot Ln(a)\cdot dx=a^x+C$

$\int cos(x)\cdot dx=sin(x)+C$

$\int -sin(x)\cdot dx=cos(x)+C$

$\int sec(x)\cdot tan(x)\cdot dx=sec(x)+C$

$\int -csec(x)\cdot ctan(x)\cdot dx=csec(x)+C$

$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx=arcsin(x)+C$

$\int\frac{1}{1+x^2}\cdot dx=arctan(x)+C$

$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\cdot dx=arcsec(x)+C$

$\int dx=x+C$

$\int u'(x)\cdot dx=u(x)+C$

$\int u^n\cdot u'\cdot dx=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C\ \ on\ n\neq -1$

$\int\frac{1}{u}\cdot u'\cdot dx=Ln(u)+C$

$\int\frac{-1}{u^2}\cdot u'\cdot dx=\frac{1}{u}+C$

$\int\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'\cdot dx=\sqrt{u}+C$

$\int e^u\cdot u'\cdot dx=e^u+C$

$\int a^u\cdot u'\cdot Ln(a)\cdot dx=a^u+C$

$\int cos(u)\cdot u'\cdot dx=sin(u)+C$

$\int -sin(u)\cdot u'\cdot dx=cos(u)+C$

$\int sec(u)\cdot tan(u)\cdot u'\cdot dx=sec(u)+C$

$\int -csec(u)\cdot ctan(u)\cdot u'\cdot dx=csec(u)+C$

$\int\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'\cdot dx=arcsin(u)+C$

$\int\frac{1}{1+u^2}\cdot u'\cdot dx=arctan(u)+C$

$\int\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\cdot u'\cdot dx=arcsec(u)+C$

$\int\frac{1}{cos^2(x)}\cdot dx=\int sec^2(x)\cdot dx=\int[1+tan^2(x)]\cdot dx=tan(x)+C$

$\int\frac{1}{cos^2(u)}\cdot u'\cdot dx=\int sec^2(u)\cdot u'\cdot dx=\int[1+tan^2(u)]\cdot u'\cdot dx=tan(u)+C$

$\int\frac{-1}{sin^2(x)}\cdot dx=\int -csec^2(x)\cdot dx=\int -[1+ctan^2(x)]\cdot dx=ctan(x)+C$

$\int\frac{-1}{sin^2(u)}\cdot u'\cdot dx=\int -csec^2(u)\cdot u'\cdot dx=\int -[1+ctan^2(u)]\cdot u'\cdot dx=ctan(u)+C$

Integració per parts

$\int u\cdot v'\cdot dx=u\cdot v-\int v\cdot u'\cdot dx$

S'aplica pel producte d'una funció per la derivada de l'altra. El procediment pot ser reiteratiu, la segona integral ha de ser igual o més senzilla que la primera.

Integració de funcions racionals $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ on $grau[P(x)]<grau[Q(x)]$

Si $grau[P(x)]\geq grau[Q(x)]$, es fa la divisió polinòmica $P(x)$ entre $Q(x)$ i queda: $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int C(x)\cdot dx+\int\frac{R(x)}{Q(x)}\cdot dx$ on $C(x)$ és el quocient i $R(x)$ el residu de la divisió i $grau[R(x)]<grau[Q(x)]$

$Q(x)$ sols té arrels reals simples

$Q(x)=(x-x_1)\cdot(x-x_2)\dots(x-x_n)$. La descomposició és:

$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\dots+\frac{A_n}{x-x_n}$

Calculem $A_1,A_2,\dots,A_n$ L'integral és suma d'integrals immediates:

$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\frac{A_1}{x-x_1}dx+\int\frac{A_2}{x-x_2}dx+\dots+\int\frac{A_n}{x-x_n}dx$

$Q(x)$ sols té arrels reals múltiples

$Q(x)=(x-x_0)^k$. La descomposició és:

$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_0}+\frac{A_2}{(x-x_0)^2}+\dots+\frac{A_k}{(x-x_0)^k}$

Calculem $A_1,A_2,\dots,A_n$ L'integral és suma d'integrals immediates:

$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\frac{A_1}{x-x_0}dx+\int\frac{A_2}{(x-x_0)^2}dx+\dots+\int\frac{A_k}{(x-x_k)^k}dx$

$grau[Q(x)]=2$. Arrels complexes simples

$\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$

Es descompon com suma d'una integral de tipus logarítmica + una de tipus arctangent.

$Q(x)$ té arrels reals simples, multiples i arrels complexes simples

$Q(x)=(x-x_1)\cdot(x-x_2)\dots(x-x_n)\cdot(x-x_0)^k\cdot(ax^2+bx+c)$. La descomposició és:

$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\dots+\frac{A_n}{x-x_n}+\frac{B_1}{x-x_0}+\dots+\frac{B_k}{(x-x_0)^k}+\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}$

Calculem $A_1,\dots,A_n,B_1\dots,B_k,m,n$ D'aquesta forma, l'integral és suma d'integrals immediates:

$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\frac{A_1}{x-x_1}dx+\dots+\int\frac{A_n}{x-x_n}dx+\int\frac{B_1}{x-x_0}dx+\dots+\int\frac{B_k}{(x-x_k)^k}dx+\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$

Integració de funcions trigonomètriques $\int f(sinx,cosx)\cdot dx$

$\int\frac{sin\,(A)}{cos\,(A)}\cdot\frac{sin\,(B)}{cos\,(B)}\cdot dx$	Transformació de producte a suma	$sin(A)\cdot cos(B)=\frac{1}{2}[sin(A+B)+sin(A-B)]$
		$cos(A)\cdot cos(B)=\frac{1}{2}[cos(A+B)+cos(A-B)]$
		$sin\,(A)\cdot sin\,(B)=\frac{1}{2}[cos(A-B)-cos(A+B)]$
$\int sin^n(x)\cdot cos^m(x)\cdot dx$	Si m i n són parells, aplicarem reiteradament les transformacions : $sin^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2}$ i $cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2}$	
	Si $\boldsymbol{m}$ (o n) és imparell. $\int sin^n(x)\cdot cos^m(x)dx=\int sin^n(x)\cdot cos^{m-1}(x)\cdot\cos(x)\,dx$ que es transforma en suma d'integrals de la forma $\int sin^k(x)\cdot\cos(x)\,dx$	

Es transforma en racional amb el canvi adequat		**Canvi**			
$\int f[sin(x)\cdot cos(x)]\cdot dx$	f és imparell en $sin(x)$; $f[-sin(x),cos(x)]=-f[sin(x),cos(x)]$.	$cos(x)=t$	$sin(x)=\sqrt{1-t^2}$	$dx=\frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$	
	f és imparell en $cos(x)$; $f[sin(x),-cos(x)]=-f[sin(x),cos(x)]$.	$sin(x)=t$	$cos(x)=\sqrt{1-t^2}$	$dx=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$	
	f parell en $sin(x)\,cos(x)$; $f[-sin(x),-cos(x)]=f[sin(x),cos(x)]$	$tan(x)=t$	$sin(x)=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$	$cos\,(x)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$	$dx=\frac{1}{1+t^2}$
$\int f[sin(x)\cdot cos(x)]\cdot dx$	Cap del tipus anteriors i també per a totes. $\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$	$\tan\left(\frac{x}{2}\right)=t$	$sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}$	$cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$	$tan(x)=\frac{2t}{1-t^2}$

Integració de funcions irracionals

$\int f\left(x,\sqrt{p(x)}\right)\cdot dx$

Es transformen en trigonomètriques--racionals fent els canvis adequats

Canvi evident $\quad p(x)=t^2\rightarrow p'(x)\,dx=2t\,dt$

Exemple: $\quad\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$, canvi $x+1=t^2\rightarrow dx=2t\,dt$

$\int\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx=\int\frac{t^2-1}{t}2t\,dt=2\int(t^2-1)\,dt$, ja immediata

Canvi $x=sin\,(t)$ o $x=cos(t)$

$\int f\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)dx$

Canvi $x=tan(t)$

$\int f\left(x,\sqrt{1+x^2}\right)dx$

Canvi $x=sec(t)$

$\int f\left(x,\sqrt{x^2-1}\right)dx$