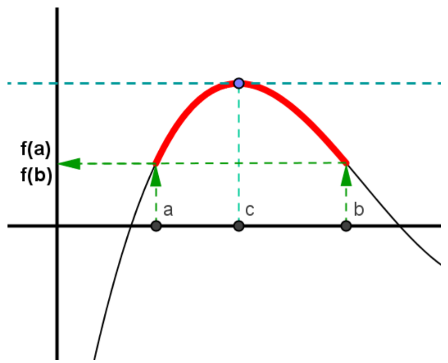
$\Sigma \nu f$

Propietats de les funcions derivables $f:]a,b[\longrightarrow R$

Teorema de Rolle

$f: [a,b] \longrightarrow R$
$f(x)$ contínua en $[a,b]$
$f(x)$ derivable en $]a,b[$
$f(a) = f(b)$

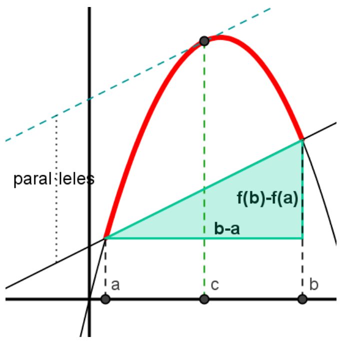
$\longrightarrow \exists c \in]a,b[/ f'(c) = 0$



Teorema del valor mitjà de Lagrange

$f: [a,b] \longrightarrow R$
$f(x)$ contínua en $[a,b]$
$f(x)$ derivable en $]a,b[$

$\longrightarrow \exists c \in]a,b[/ f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Corol·lari1

$f: [a,b] \longrightarrow R$
$f(x)$ contínua en $[a,b]$
$f(x)$ derivable en $]a,b[$
$f'(x) = 0$

$\rightarrow f(x) = C \in R$

Corol·lari2

$f: [a,b] \longrightarrow R$
$f(x), g(x)$ contínues en $[a,b]$
$f(x), g(x)$ derivables en $]a,b[$
$f'(x) = g'(x)$

$\rightarrow f(x) = g(x) + C$

Teorema de Cauchy

$f, g: [a,b] \longrightarrow R$
$f(x), g(x)$ contínues en $[a,b]$ $\longrightarrow \exists c \in]a,b[/ f'(c)[g(b)-g(a)] = g'(c)\,[f(b)-f(a)]$
$f(x), g(x)$ derivables en $]a,b[$

Teorema de L'Hôpital

$f, g: [a,b] \longrightarrow R$
$f(x), g(x)$ contínues en $[a,b]$
$f(x), g(x)$derivables en $]a,b[$
$f(c) = g(c) = 0$
$g(x) \neq 0$
$g'(c) \neq 0$
$\exists \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$

$\longrightarrow \exists \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$

També si $c = \pm\infty$

S'aplica directament en les indeterminacions:

$\dfrac{\infty}{\infty}$ $\quad$ $\dfrac{0}{0}$

Pot adaptar-se per resoldre les indeterminacions:

$\infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad \infty^0 \qquad 0^0 \qquad 1^\infty$

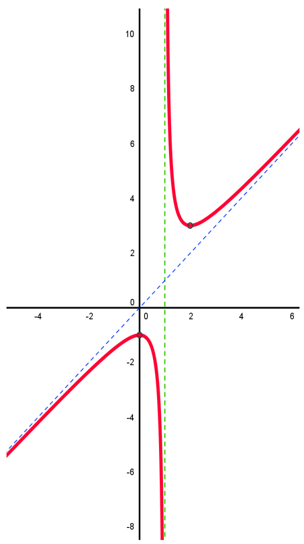
Estudi i representació de funcions $f:]a,b[\longrightarrow R$

Punts a estudiar

1.- $D(f)$
2.- Punts de tall amb els eixos.
Eix Y ($x = 0$)
Eix X ($f(x) = 0$)
3.- Periodicitat.
4.- Simetries.
5.- Continuïtat.
6.- Derivabilitat.
7.- Monotonia.
8.- Màxims i mínims relatius.
9.- Curvatura.
10.- Punts d'inflexió.
11.- Asímptotes.
12.- Taula de valors.

Exemple

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$



Domini $D(f) = R - \{1\}$

Punts de tall amb els eixos

Eix Y ($x = 0$) $f(0) = -1 \rightarrow (0,-1)$

Eix X ($f(x) = 0$) $\frac{x^2-x+1}{x-1} = 0 \rightarrow x^2 - x + 1 = 0$

no talla l'eix X.

Periodicitat No és periòdica.

Simetries No presenta cap tipus de simètria.

$f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

$f(-x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{-x - 1}$ $\qquad f(x) \neq f(-x)$

$-f(x) = \dfrac{-x^2 + x - 1}{x - 1}$ $\qquad f(-x) \neq -f(x)$

Continuïtat $f(x)$ és contínua en $R - \{1\}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to 1+} f(x) = +\infty$

Derivabilitat

$f'(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$

Monotonia

$Signe[f'(x)]$	+	0	-	1	-	2	+
$f(x)$	↗	0	↘	1	↘	2	↗

Màxims i mínims relatius

Màxim en $(0,-1)$ $\qquad$ mínim en $(2,3)$

Curvatura

$Signe[f''(x)]$	-	1	+
$f(x)$	∩	1	∪

Punts d'inflexió No hi ha cap punt d'inflexió.

Asímptotes

Asímptota Vertical $\boxed{x = 1}$

Asímptota Horitzontal No hi ha

Asímptota Obliqua $y = mx + n$

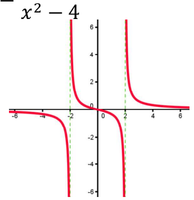
$m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 - x} = 1$

$n = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2 - x} = 0$

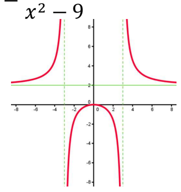
$\boxed{y = x}$ també si $x \rightarrow -\infty$

Funcions i gràfiques

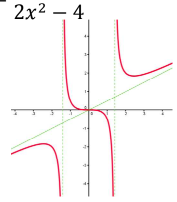
$f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$



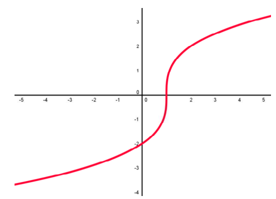
$f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 9}$



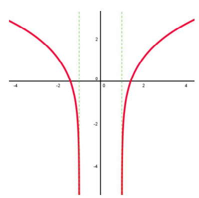
$f(x) = \dfrac{x^3}{2x^2 - 4}$



$f(x) = 2\sqrt[3]{x} - 1$



$f(x) = Ln(x^2 - 1)$



$f(x) = 4xe^x$