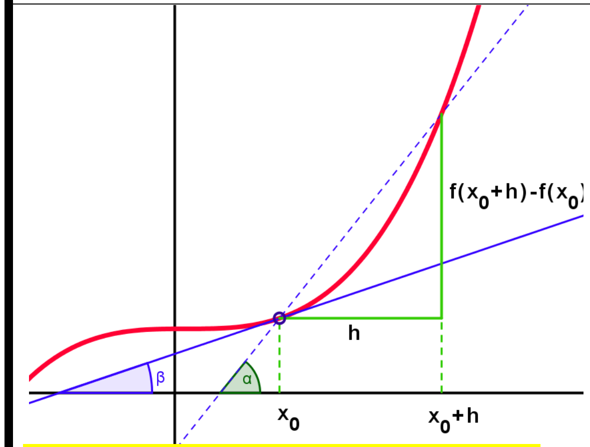
Càlcul diferencial $f:]a,b[\longrightarrow R$

Derivada d'una funció en un punt $x_0 \in]a,b[$

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad si\ existeix\ i\ és\ finit$$



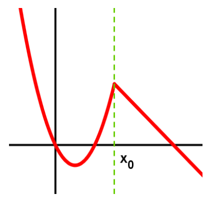
$f'(x_0) = m$ és el pendent de la recta tangent a $f(x)$ en x_0

$$m = Tan(\beta) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} Tan(\alpha) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

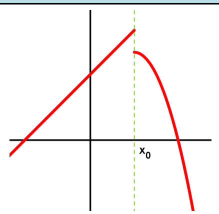
$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad si\ existeix\ i\ és\ finit$$

Derivabilitat ⟶ Continuïtat

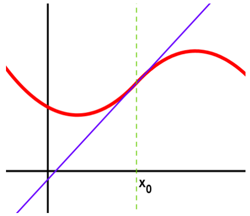
$f(x)$ contínua no derivable en x_0



$f(x)$ no contínua en $x_0 \rightarrow \nexists f'(x_0)$



Derivabilitat ≡ Suavitat



$f(x)$ derivable en x_0

Regles de derivació $u = u(x)$ i $v = v(x)$

Derivada de la composició de funcions. Regla de la cadena $(g \circ f)'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x)$

$f(x) = K \in R \rightarrow f'(x) = 0$

$f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$

$f(x) = u^n \rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

$f(x) = \frac{1}{u} \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{u^2} \cdot u'$

$f(x) = \sqrt{u} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

$f(x) = k \cdot u \rightarrow f'(x) = k \cdot u'$

$f(x) = u \pm v \rightarrow f'(x) = u' \pm v'$

$f(x) = u \cdot v \rightarrow f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$

$f(x) = \frac{u}{v} \rightarrow f'(x) = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

$f(x) = e^u \rightarrow f'(x) = e^u \cdot u'$

$f(x) = a^u \rightarrow f'(x) = a^u \cdot u' \cdot Ln(a)$

$f(x) = Ln(u) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{u} \cdot u'$

$f(x) = Log_a(u) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{u} \cdot u' \cdot \frac{1}{Ln(a)}$

$f(x) = \sin(u) \rightarrow f'(x) = \cos(u) \cdot u'$

$f(x) = \cos(u) \rightarrow f'(x) = -\sin(u) \cdot u'$

$f(x) = tan(u) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{cos^2(u)} \cdot u' = sec^2(u) \cdot u' = [1 + tan^2(u)] \cdot u'$

$f(x) = ctan(u) \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{sin^2(u)} \cdot u' = -csec^2(u) \cdot u' = -[1 + ctan^2(u)] \cdot u'$

$f(x) = \sec(u) \rightarrow f'(x) = \sec(u) \cdot tan(u) \cdot u'$

$f(x) = \csc(u) \rightarrow f'(x) = -\csc(u) \cdot ctan(u) \cdot u'$

$f(x) = arcsin(u) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

$f(x) = arccos(u) \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

$f(x) = arctan(u) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

$f(x) = arcctan(u) \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'$

$f(x) = arcsec(u) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{u \cdot \sqrt{u^2-1}} \cdot u'$

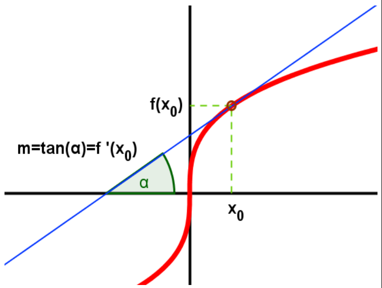
$f(x) = arccsec(u) \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{u \cdot \sqrt{u^2-1}} \cdot u'$

Derivada logarítmica $f(x) = u^v \rightarrow Ln[f(x)] = v \cdot Ln(u) \rightarrow \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = v' \cdot Ln(u) + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' \rightarrow f'(x) = f(x) \cdot [v' \cdot Ln(u) + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u']$

Aplicacions de la derivada $f:]a,b[\longrightarrow R$ derivable, $x_0 \in]a,b[$

Recta tangent a $f(x)$ en $x = x_0$

$$t \equiv \begin{cases} (x_0, f(x_0)) \\ m = f'(x_0) \end{cases}$$

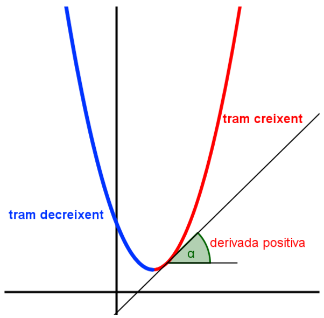


$$y - f(x_0) = m \cdot (x - x_0)$$

Monotonia

Si $f'(x_0) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent en x_0

Si $f'(x_0) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent en x_0

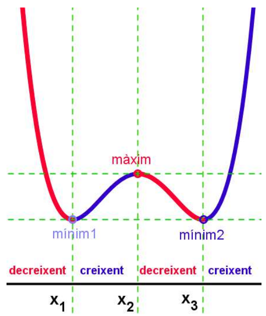


Si $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ *és creixent*

Si $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ *és decreixent*

Màxims i mínims relatius

Condició necessària de màxim i mínim relatiu: $f'(x_0) = 0$



Condició suficient1:

Si la funció passa de ser decreixent ($f'(x) < 0$) a creixent ($f'(x) > 0$), hi ha un mínim relatiu.

Si la funció passa de ser creixent ($f'(x) > 0$) a decreixent ($f'(x) < 0$), hi ha un màxim relatiu.

Condició suficient2 (criteri de la 2na derivada):

$f''(x_0) < 0 \rightarrow$ *màxim r.* $f''(x_0) > 0 \rightarrow$ *mínim r.*

Concavitat i convexitat. Punts d'inflexió

$f(x)$ és còncava en $x_0 \leftrightarrow \exists E(x_0)$ on $f(x)$ està per dalt de la recta tangent a $f(x)$ en x_0

$f(x)$ és convexa en $x_0 \leftrightarrow \exists E(x_0)$ on $f(x)$ està per baix de la recta tangent a $f(x)$ en x_0

Si $f''(x_0) > 0 \rightarrow f(x)$ còncava en x_0

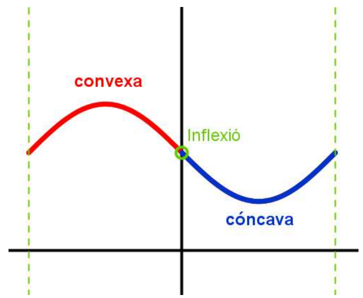
Si $f''(x_0) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa en x_0

Per estudiar la curvatura d'una funció, estudiarem el signe de la segona derivada.

Si $f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ *és còncava*

Si $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ *és convexa*

Si en x_0, $f(x)$ canvia de curvatura $\rightarrow x_0$ és un punt d'inflexió.



Condició necessària de punt d'inflexió: $f''(x_0) = 0$

Condició suficient de punt d'inflexió: $f''(x_0) = 0$ i $f'''(x_0) \neq 0$