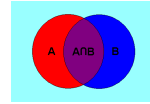
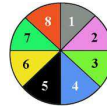


Probabilitat



Experiment aleatori E

Un **experiment aleatori** és aquell que abans de realitzar-lo no es pot predir el resultat que s'obtindrà. En cas contrari, es diu determinista.

Al realitzar un experiment aleatori no sabem quin resultat va a donar-se, però, si que coneixem per endavant tots els seus possibles resultats.

Exemples

Experiment E_1 llançar un dau i anotar el resultat.

Experiment E_2 traure una carta d'una baralla espanyola i anotar el resultat.

Experiment E_3 llançar una moneda i anotar el resultat.

Experiment E_4 traure una bola d'una urna que té 5 boles roges, 4 blaves i 11 verdes i anotar el color.

Espai mostral Ω

L'espai mostral és el conjunt de tots els resultats possibles d'un experiment aleatori. Se sol designar amb la lletra Ω .

Exemples

En l'experiment E_1 , $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$

En l'experiment E_2 , $\Omega_2 = \{1\text{oros}, 2\text{oros}, \dots, 1\text{copes}, 2\text{copes}, \dots, 1\text{espases}, 2\text{espases}, \dots, 1\text{bastos}, 2\text{bastos}, \dots, \text{rei bastos}\}$

En l'experiment E_3 , $\Omega_3 = \{\text{cara}, \text{creu}\}$

En l'experiment E_4 , $\Omega_4 = \{\text{roja}, \text{blava}, \text{verda}\}$

Esdeveniment

Cadascun dels possibles resultats d'un experiment s'anomena *esdeveniment elemental*.

Anomenarem esdeveniment a qualsevol subconjunt de l'espai mostral. Es denota amb lletra majúscula.

Conjunt de tots els esdeveniments $P(\Omega)$

Al conjunt format per tots els esdeveniments, al realitzar un experiment aleatori, li direm $P(\Omega)$.

Esdeveniment segur Ω

És l'esdeveniment que sempre es dona al realitzar un experiment.

El mateix espai mostral és l'esdeveniment segur Ω

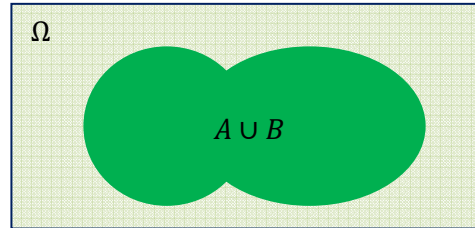
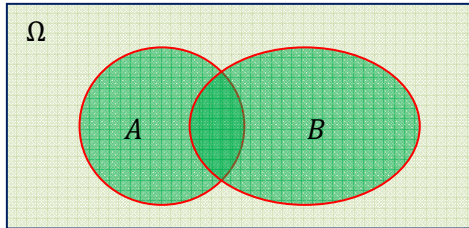
Esdeveniment impossible \emptyset

L'esdeveniment que mai es dona al realitzar un experiment. Es representa per \emptyset (conjunt buit).

Operacions amb esdeveniments

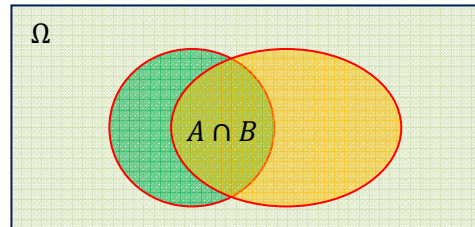
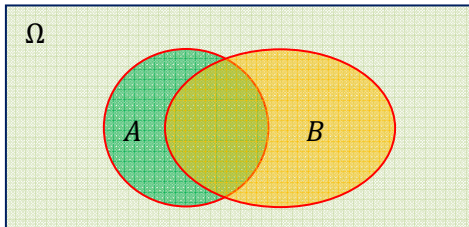
Unió \cup

Si A i B són esdeveniments, anomenem esdeveniment *unió* de A i B a un altre esdeveniment $A \cup B$ que es dóna si es dóna A o es dóna B , almenys un dels dos.



Intersecció \cap

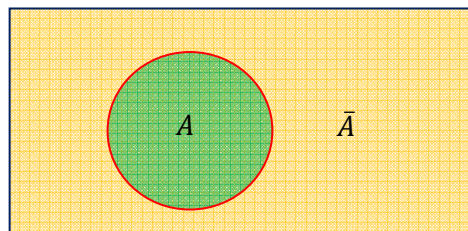
Si A i B són esdeveniments, anomenem esdeveniment *intersecció* de A i B a un altre esdeveniment $A \cap B$ que es dóna si es dóna A i es dóna B , els dos a la vegada.



Esdeveniments incompatibles A i B són incompatibles $\leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

Complementació

Si A és un esdeveniment, anomenem esdeveniment *complementari* o *contrari* de A a un altre esdeveniment \bar{A} que es dóna si no es dóna A .



Propietats de les operacions

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

$$\bar{\bar{A}} = A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$\bar{\emptyset} = \Omega$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\bar{\Omega} = \emptyset$$

$$A \cup \Omega = \Omega$$

$$A \cap \Omega = A$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$A \cup \bar{A} = \Omega$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Σ sumatori; \cap intersecció; \cup unió; \emptyset conjunt buit; \in pertany; \forall per a tot; \rightarrow aleshores
 \subseteq inclòs en; \prod Producte; / de forma que; \leftrightarrow si i sols si; \exists existeix; $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$; **Probabilitat**

Experiment compost

En moltes ocasions un experiment aleatori està format per la successió d'altres més senzills, se'n diu compost.

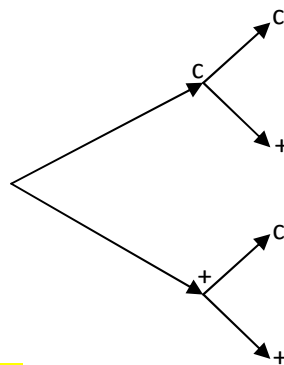
Per exemple: tirar dos daus i anotar la suma, llançar dues monedes i anotar el resultat,...

En aquests casos per obtenir l'espai mostral es pot utilitzar alguna d'aquestes tècniques:

Construir una taula de doble entrada, si es combinen dos experiments simples.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Fer un diagrama d'arbre, més útil si es combinen dos o més experiments simples.



Probabilitat d'un esdeveniment

La *probabilitat* d'un esdeveniment, A , indica el grau de possibilitat que ocorregui aquest esdeveniment. S'expressa mitjançant un número comprès entre 0 i 1, i ho escrivim $P(A)$.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Si $P(A)$ és pròxim a 0 l'esdeveniment és poc probable i serà més probable com més s'aproxime a 1, que és la probabilitat de l'esdeveniment segur, $P(\Omega) = 1$.

$$P(\Omega) = 1$$

Quan es repeteix un experiment aleatori moltes vegades, la freqüència relativa amb que apareix un esdeveniment tendeix a estabilitzar-se cap a un valor fix, a mesura que augmenta el nombre de proves realitzades.

Aquest resultat, conegut com **lleis dels grans números**, ens porta a definir la probabilitat d'un esdeveniment com el número cap al que tendeix la freqüència relativa en repetir l'experiment moltes vegades.

$$P(A) = f_r(A)$$

Regla de Laplace

Quan dos esdeveniments tenen la mateixa probabilitat de passar, en realitzar un experiment aleatori, es diuen **equiprobables**.

Si en un espai mostral tots els esdeveniments elementals són equiprobables, l'experiment es diu regular i la probabilitat d'un esdeveniment qualsevol A , es pot calcular amb la **Regla de Laplace**, segons la qual n'hi ha prou en comptar, i fer el quocient entre el número d'esdeveniments elementals que componen A i el nnúmero total d'esdeveniments elementals de l'espai mostral Ω . Se sol enunciar així:

$$P(A) = \frac{\text{número d'elements favorables a } A}{\text{número d'elements possibles}} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

Exemple1:

E experiment que consisteix en llançar un dau i anotar el resultat.

Espai mostral $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

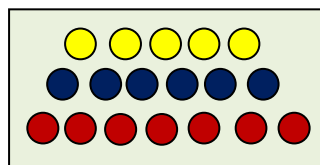
Considerem els esdeveniments:

$$A = \{2,4,6\} \text{ eixir número parell} \qquad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{3,4,5,6\} \text{ eixir un número major que 2} \qquad P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Exemple2:

E experiment que consisteix en traure una bola de l'urna i anotar el color.



Espai mostral $\Omega = \{7 \text{ roges}, 6 \text{ blaves}, 5 \text{ grogues}\}$

Considerem els esdeveniments:

$$A = \{5 \text{ grogues}\} \text{ eixir bola de color groc} \qquad P(A) = \frac{5}{18}$$

$$B = \{6 \text{ blaves}\} \text{ eixir bola de color blau} \qquad P(B) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

Propietats de la probabilitat

E experiment

Ω espai mostral

A i B esdeveniments

$0 \leq P(A) \leq 1$	$P(\Omega) = 1$
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	$P(\emptyset) = 0$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	Si A i B són incompatibles $\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Exercicis resoltos

1.- Quina és la probabilitat de traure un basto al traure una carta de la baralla?

$$\text{Siga } A \text{ l'esdeveniment traure basto} \rightarrow P(A) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

2.- Al llançar un dau, quina és la probabilitat d'eixir un número múltiple de 3?

$$\text{Siga } A = \{3, 6\} \text{ l'esdeveniment eixir un múltiple de 3} \rightarrow P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

3.- Al llançar dos daus, quina és la probabilitat de que el producte siga 12? I què siga imparell?

$$\text{Siga } A \text{ l'esdeveniment producte 12} \rightarrow P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

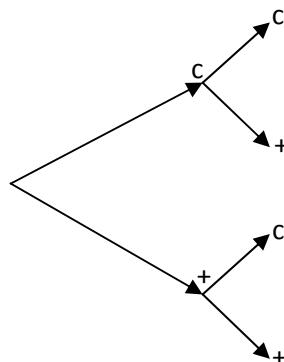
$$\text{Siga } B \text{ l'esdeveniment producte imparell} \rightarrow P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

4.- Al llançar dues monedes, quina és la probabilitat d'eixir dues cares? I d'eixir una cara i una creu?

$$\text{Siga } A \text{ l'esdeveniment eixir dues cares} \rightarrow P(A) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Siga } B \text{ l'esdeveniment eixir una cara i una creu} \rightarrow P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



5.- Considerem l'esdeveniment A eixir copes i B eixir figures. Calculeu $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(\bar{A})$ i $P(A \cup B)$.

$$P(A) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

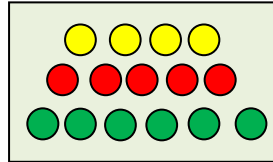
$$P(A \cap B) = \frac{3}{40}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

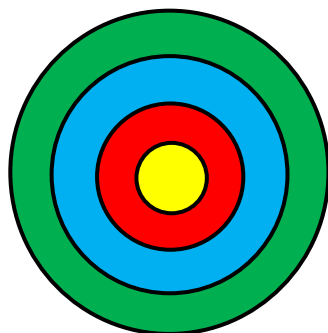
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{3}{10} - \frac{3}{40} = \frac{10+12-3}{40} = \frac{19}{40}$$

Exercicis proposats

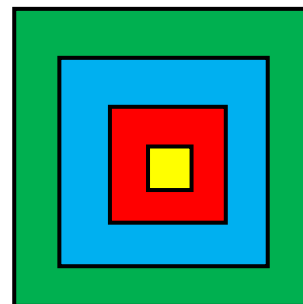
- 1.- Calculeu la probabilitat de que al traure una carta d'una baralla espanyola isca una sota.
- 2.- Quina és la probabilitat de traure un número més gran que 3 al tirar un dau?
- 3.- Traguem una bola de la següent urna, quina és la probabilitat de traure una bola groga? I de que siga verda?



- 4.- A l'IES hi ha 75 alumnes de 1rESO, 72 de 2nESO, 61 de 3rESO, 78 de 4tESO, 55 de 1rBatx i 48 de 2nBatx. Triem a l'atzar un alumne, quina és la probabilitat de que siga un alumne de batxillerat? I que siga de 3rESO? I que siga d'ESO?
- 5.- Si escollim a l'atzar un número natural entre 0 i 100, quina és la probabilitat de que siga múltiple de 5? I que siga múltiple de 3?
- 6.- El Fontanero ens ha dit que vindrà un dia laboral de la setmana que ve. Quina és la probabilitat de que vinga dimarts?
- 7.- Considerem l'esdeveniment A: el resultat de multiplicar dues xifres és 24. Quina és la probabilitat d'aquest esdeveniment A?
- 8.- Si A és un esdeveniment, quin significat té la següent igualtat $P(A) = 1/2$.
- 9.- Quina és la probabilitat de que al traure una carta d'una baralla espanyola isca un número més menut que 6?
- 10.- Sabem que $P(A) = 0'3$, $P(B) = 0'6$ i $P(A \cup B) = 0'8$. Que val $P(A \cap B)$?
- 11.- Si sempre li peguem a la diana, quina és la probabilitat de pagar-li a cada color? (quocient entre àrees)



Radis 5, 10, 15 i 20

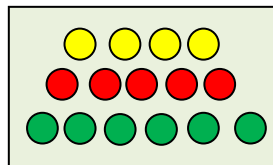


Costats 5, 15, 25 i 35

12.- Al seleccionar a l'atzar un quadre, quina és la probabilitat de tocar el vaixell?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A																		
B							■											
C							■	■										
D				■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■				
E		■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
F																		

13.- Traguem una bola de la següent urna, a continuació en traguem un altra. Quina és la probabilitat de que siguin del mateix color? (Feu un dígrama d'arbre assignant probabilitat a cada rama)



14.- En les mateixes condicions de l'exercici 14, però, reemplaçant a l'urna la primera bola.

15.- Al llançar dues monedes a l'aire, quina és la probabilitat de eixir dues cares? I una cara i una creu?

16.- De l'urna A agafem una bola i la posem en l'urna B, a continuació traguem una bola d' l'urna B. Quina és la probabilitat de que la bola siga roja? I de que siga groga?



17.- Un estudiant ha preparat 25 temes dels 90 que consta el temari d'oposicions. Si triem dos temes a l'atzar, quina és la probabilitat de que li toquen dos temes que haja estudiat?

18.- Si es tira un dau quina és la probabilitat d'obtenir un nombre de punts més gran que 4?. I la d'obtenir un nombre parell de punts?

19.- Quina és la probabilitat de que en tirar tres monedes juntes isca com a mínim una cara?

20.- Quina és la probabilitat de que en tirar dos daus s'obtinga un doble?

21.- Quina és la probabilitat d'obtenir una fitxa doble si agafem una fitxa de dòmino?

22.- Al agafar una fitxa d'un dòmino, quina és la probabilitat d'obtenir una puntuació de set (contant les dues parts de la fitxa)

23.- Al llançar un dau, considerem els esdeveniments: $A = \{2,3,5\}$ i $B = \{1,2,6\}$. Quins esdeveniments són: $\bar{A} =$ $A \cap B =$ $\bar{B} \cup A =$ $\overline{A \cup B} =$ $B \cup \bar{A} =$