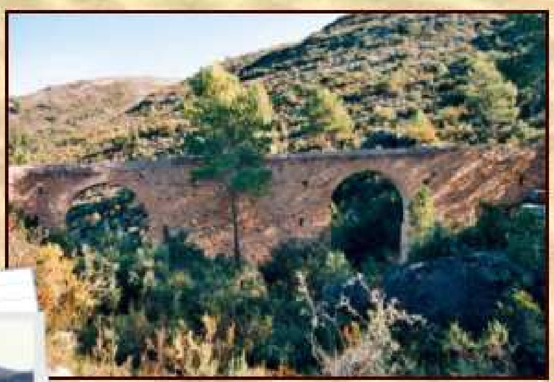
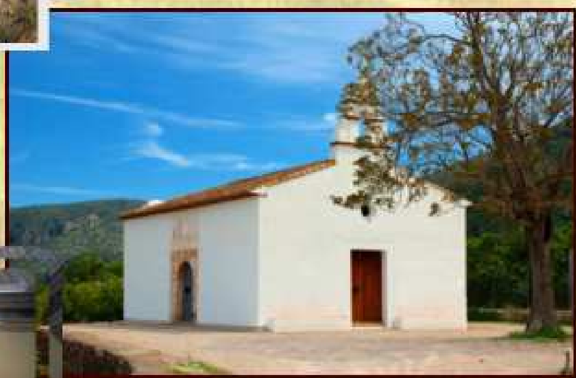
Polinomis

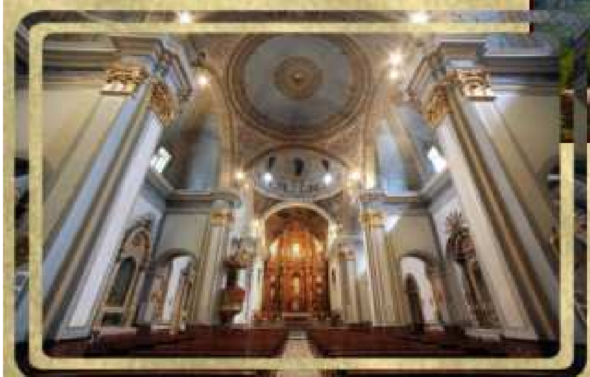


Les Arcades

Molló del terme



Ermita la Xara



Església Sant Pere

Polinomis

Monomi

Un *monomi* **(mono=uno)** és una expressió algebraica de la forma: $\boldsymbol{P(x) = a \cdot x^n}$ on $a \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$.

$\boldsymbol{x}$ rep el nom d'*indeterminada* o *variable* del monomi, pot emprar-se qualsevol lletra $(x, t, s, \dots)$

Coeficient del monomi

Grau del monomi

$$\boldsymbol{P(x) = a \cdot x^n}$$

Indeterminada

Exemples:

$P(x) = 3 \cdot x^5$	coeficient $a = 3$	grau $n = 5$
$Q(x) = -2 \cdot x^2$	coeficient $a = -2$	grau $n = 2$
$R(t) = -\sqrt{2} \cdot t^3$	coeficient $a = -\sqrt{2}$	grau $n = 3$
$\mathrm{T}(x) = 5 \cdot x$	coeficient $a = 5$	grau $n = 1$
$\mathrm{M}(x) = 7$	coeficient $a = 7$	grau $n = 0$

Monomis semblants

Dos monomis són *semblants* si tenen la mateixa indeterminada i el mateix grau.

Exemple: $P(x) = 4 \cdot x^3$ $\quad$ $Q(x) = -2 \cdot x^3$

Polinomi

Un *polinomi* **(poli=molts)** és la suma de dos o més monomis de grau diferent.

Si hi ha sols dos monomis, el polinomi rep el nom de *binomi*.

Exemples:

$P(x) = 3 \cdot x^5 + 4 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2$ $\quad$ grau $n = 5$

$Q(x) = x^3 + 4 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 4$ $\quad$ grau $n = 3$

No són polinomis: $P(x) = 3 \cdot x^4 - 4 \cdot x^{-2} - 4$ $\quad$ $Q(x) = 3 \cdot x^{\frac{1}{2}} + 5 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 3$

A l'hora d'escriure un polinomi, sol ordenar-se segons el grau de cada monomi i normalment, de major a menor.

En general, un polinomi té la forma:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$a_n \neq 0,\ a_{n-1}, \ldots a_2,\ a_1,\ a_0 \in R$ són els *coeficients* del polinomi.

$\boldsymbol{a_n}$ és el *coeficient principal* o *director*, que marca el grau del polinomi.

Si $a_n = 1$, el polinomi s'anomena *mònic*.

$\boldsymbol{a_0}$ és el coeficient anomenat *terme independent* del polinomi.

Conjunt de tots els polinomis

Al conjunt de tots els polinomis de variable x li direm $\mathcal{P}(x)$.

Operacions amb polinomis

Suma de polinomis

Per sumar dos polinomis es sumen els coeficients dels monomis semblants.

$$\boldsymbol{a \cdot x^n + b \cdot x^n = (a + b) \cdot x^n}$$

Exemple:

$P(x) = 4x^3 + 5x^2 - 4 \qquad Q(x) = -7x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 5$

$P(x) + Q(x) = -7x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

Propietats de la suma de polinomis

1.- $P(x) \in \mathcal{P}(x)$ i $Q(x) \in \mathcal{P}(x) \rightarrow Grau[P(x) + Q(x)] \leq Max\{Grau[P(x)], Grau[Q(x)]\}$

2.- $P(x) \in \mathcal{P}(x)$ i $Q(x) \in \mathcal{P}(x) \rightarrow P(x) + Q(x) \in \mathcal{P}(x)$ *Llei de composició interna*

3.- $P(x) \in \mathcal{P}(x)$ i $Q(x) \in \mathcal{P}(x) \rightarrow P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$ *Commutativa*

4.- $P(x) \in \mathcal{P}(x)$, $Q(x) \in \mathcal{P}(x)$ i $R(x) \in \mathcal{P}(x) \rightarrow [P(x) + Q(x)] + R(x) = P(x) + [Q(x) + R(x)]$ *Associativa*

5.- $P(x) \in \mathcal{P}(x) \rightarrow P(x) + 0 = P(x) \in \mathcal{P}(x)$ *Element neutre*

6.- $P(x) \in \mathcal{P}(x) \rightarrow P(x) + [-P(x)] = 0$ $\qquad -P(x)$s'anomena oposat o simètric de $P(x)$ *Element simètric*

Si $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \rightarrow [-P(x)] = -a_n x^n - \cdots - a_2 x^2 - a_1 x - a_0$

Multiplicació d'un número real per un polinomi

Si $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \ \in \mathcal{P}(x)$ i $\lambda \in R$

definim $\lambda \cdot P(X) = \lambda a_n x^n + \cdots + \lambda a_2 x^2 + \lambda a_1 x + \lambda a_0 \in \mathcal{P}(x)$

Exemple:

$$3 \cdot (2x^2 - 2x + 5) = 6x^2 - 6x + 15$$

Propietats de la multiplicació d'un número real per un polinomi

1.- $P(x), Q(x) \in \mathcal{P}(x)$ i $\lambda \in R \ \rightarrow \lambda \cdot [P(x) + Q(x)] = \lambda \cdot P(x) + \lambda \cdot Q(x)$

2.- $P(x) \in \mathcal{P}(x)$ i $\alpha, \beta \in R \rightarrow (\alpha + \beta) \cdot P(x) = \alpha \cdot P(x) + \beta \cdot P(x)$

3.- $P(x) \in \mathcal{P}(x)$ i $\alpha, \beta \in R \rightarrow (\alpha \cdot \beta) \cdot P(x) = \alpha \cdot (\beta \cdot P(x))$

4.- $P(x) \in \mathcal{P}(x) \rightarrow 1 \cdot P(x) = P(x)$

Multiplicació de polinomis

Per multiplicar dos polinomis, es multiplica cada monomi d'un d'ells per tots els altres de l'altre polinomi, sumant a continuació els monomis semblants.

$$(\boldsymbol{a x^m}) \cdot (\boldsymbol{b x^n}) = (\boldsymbol{a \cdot b}) \boldsymbol{x^{m+n}}$$

Exemple1: $P(x) = 4x^3 + 5x^2 - 4$ $\qquad Q(x) = -7x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 5$

$P(x) \cdot Q(x) = (4x^3 + 5x^2 - 4) \cdot (-7x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 5) =$

$= -28x^7 - 8x^6 + 4x^5 - 16x^4 + 20x^5 - 35x^6 - 10x^5 + 5x^4 - 20x^3 + 25x^2 + 28x^4 + 8x^3 - 4x^2 + 16x - 20 =$

$= -28x^7 - 43x^6 + 24x^5 + 17x^4 - 12x^3 + 21x^2 + 16x - 20$

Exemple2:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & -2x^3 & +5x^2 & +6x & -3 \\
 & & \times & 3x^2 & +x & -4 \\
\hline
 & & 8x^3 & -20x^2 & -24x & +12 \\
 & -2x^4 & +5x^3 & +6x^2 & -3x & \\
-6x^5 & +15x^4 & +18x^3 & -9x^2 & & \\
\hline
-6x^5 & +13x^4 & +31x^3 & -23x^2 & -27x & +12
\end{array}$$

Propietats de la multiplicació de polinomis

1.- $P(x) \in \mathcal{P}(x)$ i $Q(x) \in \mathcal{P}(x) \rightarrow Grau[P(x) \cdot Q(x)] = Grau[P(x)] + Grau[Q(x)]$

2.- $P(x) \in \mathcal{P}(x)$ i $Q(x) \in \mathcal{P}(x) \rightarrow P(x) \cdot Q(x) \in \mathcal{P}(x)$ *Llei de composició interna*

3.- $P(x) \in \mathcal{P}(x)$ i $Q(x) \in \mathcal{P}(x) \rightarrow P(x) \cdot Q(x) = Q(x) \cdot P(x)$ *Commutativa*

4.- $P(x) \in \mathcal{P}(x)$, $Q(x) \in \mathcal{P}(x)$ i $R(x) \in \mathcal{P}(x) \rightarrow [P(x) \cdot Q(x)] \cdot R(x) = P(x) \cdot [Q(x) \cdot R(x)]$ *Associativa*

5.- $P(x) \in \mathcal{P}(x) \rightarrow P(x) \cdot 1 = P(x) \in \mathcal{P}(x)$ *Element unitat*

6.- $P(x) \in \mathcal{P}(x)$, $Q(x) \in \mathcal{P}(x)$ i $R(x) \in \mathcal{P}(x) \rightarrow P(x) \cdot [Q(x) + R(x)] = P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot R(x)$ *Distributiva*

$\sum$*sumatori*; $\cap$ *intersecció*; $\cup$ *unió*; $\emptyset$ *conjunt buit*; $\in$ *pertany*; $\forall$ *per a tot*; $\rightarrow$ *aleshores*
$\subseteq$ *inclós en*; $\sqcap$ *Producte*; / *de forma que*; $\leftrightarrow$ *si i sols si*; $\exists$ *existeix*; $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$; $\mathcal{P}(x)$ *Polinomis*

Divisió de polinomis

Siguen $P(x) \in \mathcal{P}(x)$ i $Q(x) \in \mathcal{P}(x)$ on $grau[P(x)] \geq grau[Q(x)] \rightarrow \exists C(x) i\ R(x) \in \mathcal{P}(x)$ de forma que $P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)\ i\ grau[R(x)] < grau[Q(x)]$

$$\begin{array}{c|c} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array}$$

Per dividir dos polinomis es procedeix de la següent forma (*divisió euclídea*):

dividend

divisor

$$\begin{array}{rrrrr|rrr} 3x^4 & -2x^3 & +4x^2 & +2x & -3 & x^2 & -2x & -1 \\ \cline{6-8} -3x^4 & +6x^3 & +3x^2 & & & 3x^2 & +4x & +15 \\ \cline{1-5} 0 & 4x^3 & +7x^2 & +2x & -3 & & & \\ & -4x^3 & +8x^2 & +4x & & & & \\ \cline{1-5} & 0 & 15x^2 & +6x & -3 & & & \\ & & -15x^2 & +30x & +15 & & & \\ \cline{1-5} & & & +36x & +12 & & & \end{array}$$

quocient

residu

Divisió d'un polinomi per $(x - a)$. Regla de Ruffini

Per dividir un polinomi $P(x) \in \mathcal{P}(x)$ per $(x - a)$ on $a \in R$, podem aplicar la regla de Ruffini que ens dóna el quocient i el residu de la divisió de $P(x)$ entre $(x - a)$.

Exemple pràctic

Si volem calcular el quocient i el residu de la divisió $(x^4 - 3x^3 + 2x - 4) : (x - 2)$ procedirem de la següent forma:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -3 & 0 & 2 & -4 \\ 2 & & 2 & -2 & -4 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & -2 & \boxed{-8} \end{array}$$

El quocient de la divisió és $C(x) = x^3 - x^2 - 2x - 2$

El residu de la divisió és $R(x) = -8$

Valor numèric d'un polinomi en $x = a$

Donat el polinomi $P(x) \in \mathcal{P}(x)$, anomenem valor numèric de $P(x)$ en $x = a$ al valor $P(a)$.

Exemple:

Si $P(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 5$, el valor numèric de $P(x)$ en $x = -2$ és:

$$P(-2) = 4 \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 + (-2) - 5 = -32 - 8 - 2 - 5 = -47$$

Regla de Ruffini per calcular el valor numèric d'un polinomi en *x=a*

Si $P(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 5$, el valor numèric de $P(x)$ en $x = -2$ és:

	4	- 2	1	-5
-2		-8	20	-42
	4	-10	21	$\boxed{-47}$

De les propietats anteriors es desprén el següent teorema:

Teorema del residu:

El residu de la divisió de $P(x)$ per $(x - a)$ és $P(a)$.

Demostració:

En dividir $P(x)$ entre $(x - a)$, tindrem $P(x) = C(x) \cdot (x - a) + R(x),\ on\ grau[R(x)] = 0$

Si calculem $P(a)$: $\quad P(a) = C(a) \cdot (a - a) + R(a) = R(a)$

Arrel o zero d'un polinomi

Donat el polinomi $P(x) \in \mathcal{P}(x)$, direm que $a \in R$ és *arrel* o *zero* de $P(x) \leftrightarrow P(a) = 0$

Exemple: Si $P(x) = -2x^3 + 4x^2 - x - 1 \rightarrow x = 1$ és una arrel de $P(x)$ ja que $P(1) = 0$

Regla de Ruffini per calcular les arrels d'un polinomi

Es tracta de buscar aquells valors $a \in R$ que fan $P(a) = 0$

Si $P(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 5$, una arrel de $P(x)$ és *x=1* ja que:

	4	- 2	3	-5
1		4	2	5
	4	2	5	$\boxed{0}$

Per poder trobar les arrels d'un polinomi, podem repetir l'anterior procés amb el quocient de la divisió.

Exemple: Si $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, les arrels de $P(x)$ són *x=2*, *x=-1* i *x=3* ja que:

	1	- 4	1	6
2		2	-4	-6
	1	-2	-3	$\boxed{0}$
-1		-1	3	
	1	-3	$\boxed{0}$	
3		3		
	1	$\boxed{0}$		

Propietat de les arrels racionals d'un polinomi

Les possibles arrels racionals del polinomi $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ són de la forma: $x = \frac{\pm divisors(a_0)}{divisors(a_n)}$

Exemple:

Si $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 3$, les possibles arrels racionals de $P(x)$ són de la forma: $x = \frac{\pm divisors(3)}{divisors(2)} = \frac{\pm 1,3}{1,2} = (1, -1, 3, -3, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2})$

És possible que cap dels anteriors números siga arrel del polinomi; però, si $P(x)$ té alguna arrel racional, serà un dels valors anteriors.

Per calcular les arrels racionals d'un polinomi ens basarem en aquesta propietat anterior i en la regla de Ruffini.

També podem calcular les arrels d'un polinomi $P(x)$ resolent l'equació $P(x) = 0$, ja que els valors que volem calcular fan que el valor numèric del polinomi siga 0.

Generalment, per calcular les arrels d'un polinomi de primer o segon grau, es resol l'equació $P(x) = 0$. Si el grau és superior a dos, s'inicia el procés aplicant la regla de Ruffini i, a continuació, resolent l'equació que resulta d'igualar l'últim quocient a 0.

Si $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

	1	- 4	5	-2
1		1	-3	2
	1	-3	2	$\boxed{0}$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

Si una arrel està dues vegades, es diu que l'arrel és ***doble***. Si apareix tres vegades, es diu arrel ***triple***, i així successivament. En aquest exemple, *x=1* és una arrel doble.

Divisió exacta. Polinomis divisibles

$$P(x) \text{ és } divisible\ per\ Q(x) \leftrightarrow El\ residu\ de\ la\ divisió\ de\ P(x)\ per\ Q(x) \text{ és } 0.$$

Teorema del residu (ampliació)

De les propietats anteriors es desprén la següent versió del teorema del residu:

$$P(x)\ \text{ és } divisible\ per\ x-a \leftrightarrow P(a)=0 \leftrightarrow a \text{ és } arrel\ de\ P(x)$$

Factorització

El procés de factorització d'un polinomi consisteix a expressar-lo com producte de polinomis.

Exemple: $P(x)=3x^3-27x=3x(x^2-9)=3x(x+3)(x-3)$

Per factoritzar un polinomi:

Factor comú Sempre que es puga traurem factor comú: $P(x)=-2x^4+4x=2x(-x^3+2)$

Igualtats notables Recordem les igualtats:

Binomi al quadrat

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Suma per diferència

(a+b)·(a-b)= a^2-b^2

Binomi al cub

$$(a \pm b)^3=a^3 \pm 3a^2b+3ab^2 \pm b^3$$

Arrels del polinomi

$$Si\ x=a \text{ és } arrel\ de\ P(x) \to P(x)=(x-a)\cdot C(x)$$

Exemple: Si $P(x)=4x^3-2x^2+3x-5$, una arrel de $P(x)$ és *x=1* ja que:

	4	- 2	3	-5
1		4	2	5
	4	2	5	0

$$P(x)=(x-1)\cdot(4x^2+2x+5)$$

Exercici: Factoritzeu el polinomi $P(x)=3x^4-3x^3-12x^2+12x$

$P(x)=3x\cdot(x^3-x^2-4x+4)$ **Factor comú $3x$**

$P(x)=3x\cdot(x-1)\cdot(x^2-4)$ ***x=1* és arrel del polinomi. Factor $(x-1)$**

$P(x)=3x\cdot(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$ **Suma per diferència. Factors $(x+2)\cdot(x-2)$**

MCD i MCM

El procés per calcular el MCD i el MCM de dos polinomis és semblant a allò que realitzem amb els números enters.

Exemple:

$P(x) = x^2 - 3x + 2$

$P(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)\cdot(x-2)$

$MCM[P(x), Q(x)] = (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+1)$

$Q(x) = x^2 - 1$

$Q(x) = x^2 - 1 = (x-1)\cdot(x+1)$

$MCD[P(x), Q(x)] = (x-1)$

Fraccions algebraiques

Una fracció algebraica és una fracció de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$ on $P(x) i\ Q(x) \in \mathcal{P}(x)$.

Exemple: $\frac{5x^3-2x-3}{x^2-1}$ $\quad \frac{4x}{x^2-9}$ $\quad \frac{x^4-3x^2+4x-2}{x^2-3x+2}$

El treball amb fraccions algebraiques és semblant a allò que fem amb les fraccions numèriques.

Simplificació de fraccions

Per simplificar una fracció factoritzarem el numerador i denominador.

Exemple:

$$\frac{x^4-3x^2+4x-2}{x^2-3x+2} = \frac{(x-1)\cdot(x^3+x^2-2x+2)}{(x-1)\cdot(x-2)} = \frac{x^3+x^2-2x+2}{x-2}$$

Si es pot, és interessant simplificar les fraccions.

Suma de fraccions

Per sumar fraccions utilitzarem un procés semblant a la suma de fraccions numèriques.

Exemple:

$$\frac{3}{x-2} + \frac{x}{x+2} - \frac{2x}{x-1} = \frac{3(x+2)(x-1)+x(x-2)(x-1)-2x(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)(x-1)} = \frac{-x^3+13x-6}{(x-2)(x+2)(x-1)}$$

Aquesta fracció no es pot simplificar més.

Multiplicació de fraccions

Per multiplicar fraccions empraren un procés anàleg al producte de fraccions numèriques.

Exemple:

$$\frac{x}{x-2}\cdot\frac{x^3-4x}{x+1} = \frac{x\cdot x\cdot(x^2-4)}{(x-2)\cdot(x+1)} = \frac{x\cdot x\cdot(x-2)\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x+1)} = \frac{x\cdot x\cdot(x+2)}{x+1} = \frac{x^2\cdot(x+2)}{x+1}$$

Aquesta fracció no es pot simplificar més.

Exercicis proposats

1.- Calculeu les següents sumes i restes:

a $3x^2 + 5x^2 =$ b $-3x^2 + 5x^2 - 8x^2 + 4x^2 =$

c $7x^3 + 5x^3 =$ d $-4x^4 + 5x^4 - 3x^4 + 4x^4 =$

2.- Lleveu els parèntesi:

a $2(3x^3 + 5x^2) =$ b $-3(-3x^5 + 5x^3 - 8x^2 + 4x) =$

c $-2(7x^3 + 5x^2 - 3) =$ d $-(-4x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 4x - 5) =$

3.- Calculeu els següents productes:

a $3x^2 \cdot 5x^3 =$ b $-3x^5 \cdot 5x^3 \cdot x^2 \cdot 4x =$

c $7x^3 \cdot 5x^2 \cdot (-3) =$ d $-4x^4 \cdot x^3 \cdot 4x \cdot 5 =$

e $(2x-1)(3x^3 + 5x^2) =$ *f* $(x-3)(-3x^5 + 5x^3 - 8x^2 + 4x) =$

g $(x+2)(7x^3 + 5x^2 - 3) =$ *h* $-x(-4x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 4x - 5) =$

i $(3x^2 + 5)(2x - 3) =$ *j* $(-3x^3 - 8x^2 + 4)(x^2 - 1) =$

k $(x^3 + x^2 - 3)(3x - 1) =$ l $(x^3 - 3x^2 + 4x - 5)(-3x + 4) =$

m $(x^3 - 5x^2 + 4)(-2x^2 + 3) =$ n $(x^2 - 3)(3x - 2) =$

4.- Calculeu, aplicant productes notables:

a$(2x-3)^2 =$ b $(x^2 - 1)^2 =$ c $(3x+1)^2 =$

d $(4x+5)(4x-5) =$ e $(-2x^2 + 3)^2 =$ f $(x^2 - 3)(x^2 + 3) =$

g $(-x+4)^2 =$ h $(x-4)(x+4) =$ i $(2x+3)(2x-3) =$

5.- Si $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 4$, $Q(x) = x^2 + 3x + 2$ i $R(x) = 2x^3 + x + 3$, calculeu:

a $P(x) + Q(x) + R(x) =$ b $P(x) - R(x) =$ c $P(x) + R(x) - Q(x) =$

d $R(x) + Q(x) - P(x) =$ e $Q(x) + R(x) =$ f $P(x) - Q(x) =$

g $3P(x) - 2Q(x) =$ h $3R(x) - xQ(x) =$ i $P(x) - 3x^2Q(x) =$

j $Q(x) \cdot R(x) =$ k $P(x) \cdot R(x) =$ l $Q(x) \cdot P(x) =$

m $3P(x) - xQ(x) - [R(x)]^2 =$ n $Q(x) \cdot x^2 - R(x) \cdot Q(x) \cdot x =$

6.- Amb els mateixos polinomis de l'exercici anterior, calculeu el quocient i el residu de les següents divisions:

a $P(x): Q(x)$ b $R(x): Q(x)$ c $[P(x) + Q(x)]: Q(x)$

d $xR(x): Q(x)$ e $[P(x) - 2xQ(x)]: Q(x)$ f $[2P(x) - 6x^2Q(x)]: Q(x)$

7.- Si $P(x) = x^3 - 2x + 1$, $Q(x) = 5x^5 + 3x^3 - 2x^2 + x + 7$ i $R(x) = x^4 + 3x^3 - 3x + 5$, calculeu el quocient i el residu de les següents divisions:

a $Q(x): P(x)$ b $R(x): P(x)$ c $Q(x): R(x)$ d $xR(x): P(x)$

8.- Amb els mateixos polinomis de l'exercici anterior, calculeu el quocient i el residu de les següents divisions:

a $P(x): (x-1)$ b $Q(x): (x-1)$ c $R(x): (x-1)$

d $P(x): (x-2)$ e $Q(x): (x-2)$ f $R(x): (x-2)$

g $P(x): (x+1)$ h $Q(x): (x+1)$ i $R(x): (x+1)$

j $P(x): (x+2)$ k $Q(x): (x+2)$ l $R(x): (x+2)$

m $P(x): x$ n $Q(x): x$ o $R(x): x$

9.- Comproveu a l'exercici anterior que el residu de la divisió de $P(x)$ entre $(x-a)$ és $P(a)$.

10.- Si $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 4$, $Q(x) = x^2 + 3x + 2$ i $R(x) = 2x^3 + x + 3$, calculeu el valor numèric de:

a $P(x)\ en\ x = 1$ b $Q(x)\ en\ x = -1$ c $R(x)\ en\ x = 2$

d $P(x)\ en\ x = -2$ e $Q(x)\ en\ x = 3$ f $R(x)\ en\ x = -2$

11.- Si $P(x) = 4x^3 - 5x + 1$, $Q(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x + 3$ i $R(x) = x^4 + 3x^2 + 6$, calculeu mitjançant la regla de Ruffini el quocient i el residu de les següents divisions:

a $P(x): (x-1)$ b $Q(x): (x-1)$ c $R(x): (x-1)$

d $P(x): (x-2)$ e $Q(x): (x-2)$ f $R(x): (x-2)$

g $P(x): (x+1)$ h $Q(x): (x+1)$ i $R(x): (x+1)$

j $P(x): (x+2)$ k $Q(x): (x+2)$ l $R(x): (x+2)$

m $P(x): (x-3)$ n $Q(x): (x-3)$ o $R(x): (x-3)$

12.- Calculeu les arrels i factoritzeu els següents polinomis:

a $P(x) = x^2 - 5x + 6$ b $P(x) = 3x^2 - 3$

c $P(x) = 5x^3 - 5x^2$ d $P(x) = 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2$

e $P(x) = 2x^3 + 4x^2 + x + 2$ f $P(x) = x^4 - 1$

g $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 2$ h $P(x) = 3x^3 - 9x^2 + 6x$

i $P(x) = x^3 + 5x^2 - 9x - 45$ j $P(x) = x^4 - 9x^2$

13.- Calculeu les arrels i factoritzeu els següents polinomis:

a $P(x) = x^4 - x^3 - 13x^2 + x - 12$ b $P(x) = x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18$

c $P(x) = x^3 - 12x^2 + 41x - 30$ d $P(x) = 5x^3 - 20x^2 - 20x + 80$

14.- Calculeu les arrels i factoritzeu els següents polinomis:

a $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

b $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

c $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 23x - 10$

d $P(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 4x^2$

e $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$

f $P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$

15.- Donat el polinomi $P(x) = 3x^5 - 4x^4 + 2x^3 + a$, calculeu el valor del paràmetre a perquè el residu de la divisió del polinomi $P(x)$ per $(x+2)$ siga 8.

16.- Calculeu el valor d' m perquè la divisió $P(x) = 2x^5 + 3x^3 + mx - 5$ per $(x-1)$ siga exacta.

17.- Calculeu el valor de k perquè 3 siga una arrel del polinomi $P(x) = 4x^3 - 3x + k$.

18.- Expresseu com un producte les següents expressions:

a $x^2 - 4x + 4 =$

b $4x^2 - 8x + 4 =$

c $9x^2 - 4 =$

d $25x^2 + 10x + 1 =$

e $25x^2 - 1 =$

f $x^4 + 6x^2 + 9 =$

19.- Expresseu com un producte les següents expressions:

a $9 - x^2 =$

b $4x^2 - 8x =$

c $9x^2 - 16 =$

d $2x^3 - 4x^2 + 4x =$

e $2 - 5x^2 =$

f $5x^3 - 10x =$

20.- Traieu factor comú en les següents expressions:

a $9x - 3x^2 =$

b $4x^2 - 8x =$

c $5t^2 - 5t =$

d $2s^3 - 2s^2 + 2s =$

e $x^2 + x =$

f $15t^3 + 3t^2 =$

21.- Simplifiqueu al màxim les següents fraccions algebraiques:

a $\frac{x^2-x-2}{x^2+4x+3} =$

b $\frac{x^2-x}{x^3-2x^2+x} =$

c $\frac{b+b^2}{a+ab} =$

d $\frac{2a^2-5a-12}{a^2-16} =$

e $\frac{x^2-2x+1}{x^2-x} =$

f $\frac{x^2-2x}{x^3-4x^2+4x} =$

g $\frac{ab+(ab)^2}{a+ab} =$

h $\frac{2a^2-5a-12}{a^2-4a} =$

22.- Calculeu i simplifiqueu:

a $\frac{x+8}{x^2+4x} + \frac{1}{x+4} =$

b $\frac{-x+6}{x^3-2x^2} - \frac{1}{x-2} + \frac{x+2}{x^2} =$

c $\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{3}{x-1} =$

d $\frac{2a^2-5a-12}{a^2-16} \cdot \frac{a+4}{2a+3} =$