La Recta

La Torre de Guaita
Platja de Tavernes

La recta

Introducció

Una de les funcions més estudiades és la *funció afí*. La gràfica de qualsevol funció afí és una recta.

La recta

És una funció real $f: R \to R$. La seua espressió matemàtica és $f(x) = mx + n$ on $m, n \in R$ (**funció polinòmica de 1r grau).**

també sol escriure's $y = mx + n$ $\begin{cases} m \in R \text{ } i \text{ } rep \text{ } el \text{ } nom \text{ } de \text{ } pendent \text{ } de \text{ } la \text{ } recta \\ n \in R \text{ } i \text{ } rep \text{ } el \text{ } nom \text{ } d'ordenada \text{ } en \text{ } l'origen \end{cases}$

Exemples: $f(x) = 2x;\ \begin{cases} m = 2 \\ n = 0 \end{cases}$ $f(x) = 3;\ \begin{cases} m = 0 \\ n = 3 \end{cases}$ $f(x) = -x + 2;\ \begin{cases} m = -1 \\ n = 2 \end{cases}$

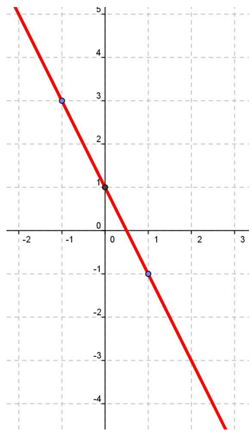
Si $n = 0$ la funció $f(x)$ rep el nom de ***funció lineal***.

Representació gràfica

Taula de valors

Exemple: $f(x) = -2x + 1$

X	Y
0	1
1	-1
-1	3



Encara que amb dos punts podem representar una recta, hem calculat tres punts per comprovar que està bé.

Significat geomètric del pendent

Observem les gràfiques de les següents rectes:

$f(x) = x$

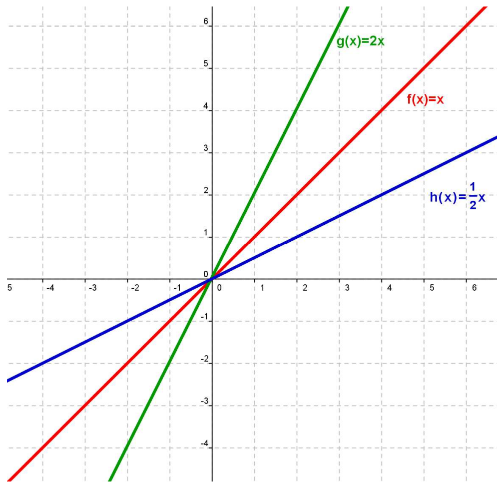
X	Y
0	0
1	1
-1	-1

$g(x) = 2x$

X	Y
0	0
1	2
-1	-2

$h(x) = \frac{1}{2}x$

X	Y
0	0
2	1
-2	-1



Vegem que:

1. Els pendents són positius. Les rectes són creixents.
2. Conforme creix el valor del pendent, més inclinada està la recta.

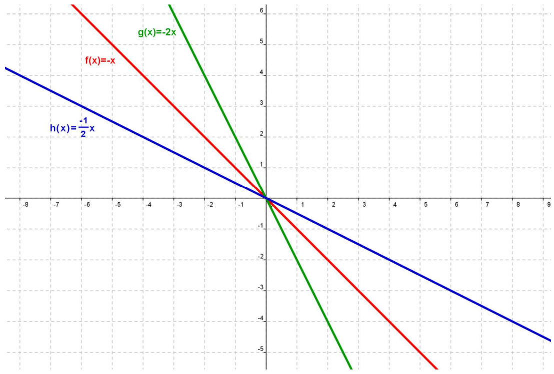
Observem les gràfiques de les següents rectes:

$f(x) = -x \qquad g(x) = -2x \qquad h(x) = \frac{-1}{2}x$

X	Y
0	0
1	-1
-1	1

X	Y
0	0
1	-2
-1	2

X	Y
0	0
2	-1
-2	1

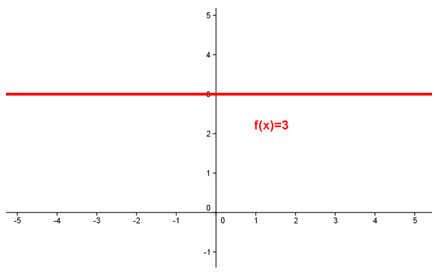


Vegem que:

1. Els pendents són negatius. Les rectes són decreixents.
2. Conforme creix el valor del pendent en valor absolut, més inclinada està la recta.

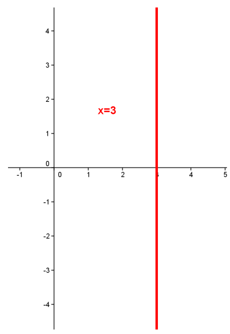
Rectes horitzontals

Són les que tenen pendent m=0.



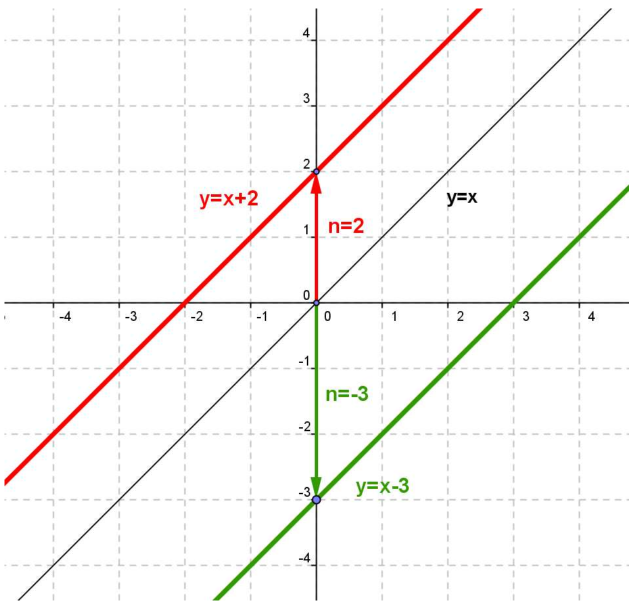
Rectes verticals

Són les que no tenen pendent.



Significat geomètric de l'ordenada en l'origen

Observem les gràfiques de les següents rectes:



Vegem que la recta es traslladа verticalment tantes unitats com indica l'ordenada en l'origen ***n.***

Punts de tall amb els eixos

Són els punts més importants per estudiar i representar una recta.

Punt de tall amb l'eix Y

És el punt de la recta on $x = 0$.

Punt de tall amb l'eix X

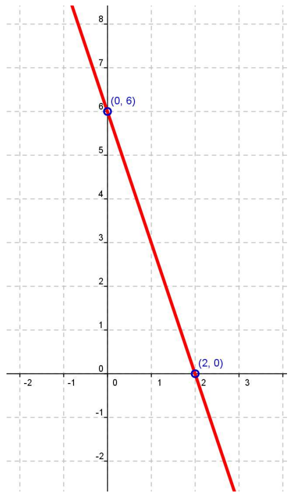
És el punt de la recta on $f(x) = 0$. Hi ha rectes que no tallen l'eix Y.

Exemple: $f(x) = -3x + 6$

X	Y
0	6
2	0

Tall eix Y $x = 0 \to f(0) = 6$. La recta talla l'eix Y en el punt $(0,6)$.

Tall eix X $f(x) = 0 \to -3x + 6 = 0 \to x = 2$. La recta talla l'eix X en el punt $(2,0)$.



Encara que siga més fàcil calcular altres punts de la recta, són més interessants els punts de tall amb els eixos.

Recta que passa per dos punts

Si coneixem dos punts de la recta, aquesta queda perfectament determinada. Podem conèixer la seua expressió matemàtica.

Exemple: Calculeu l'expressió matemàtica de la recta que passa pels punts $A(-1,4)$ i $B(2,1)$.

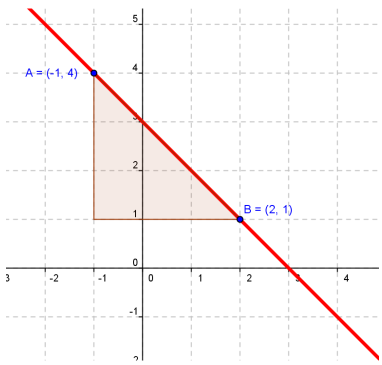
Sabem que $f(x) = mx + n$. Hem de calcular ***m*** i ***n***.

Si la recta passa per $A(-1,4) \to f(-1) = 4 \to -m + n = 4$

Si la recta passa per $B(2,1) \to f(2) = 1 \to 2m + n = 1$

Resolent el sistema $\begin{cases} -m + n = 4 \\ 2m + n = 1 \end{cases}$ tenim $\begin{cases} m = -1 \\ n = 3 \end{cases}$

Per tant: $\boldsymbol{f(x) = -x + 3}$



Recta que passa per un punt i coneixem el pendent

Si coneixem un punt i el pendent de la recta, aquesta queda perfectament determinada. Podem conéixer la seua expressió matemàtica.

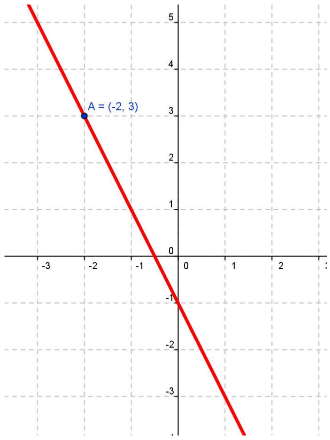
Exemple: Calculeu l'expressió matemàtica de la recta que passa pels punts $A(-2,3)$ i $m = -2$.

Sabem que $f(x) = mx + n$.

Com $\boldsymbol{m} = -\mathbf{2}$ tindrem $f(x) = -2x + n$.

Si la recta passa per $A(-2,3) \rightarrow f(-2) = 3 \rightarrow 4 + n = 3 \rightarrow n = -1$

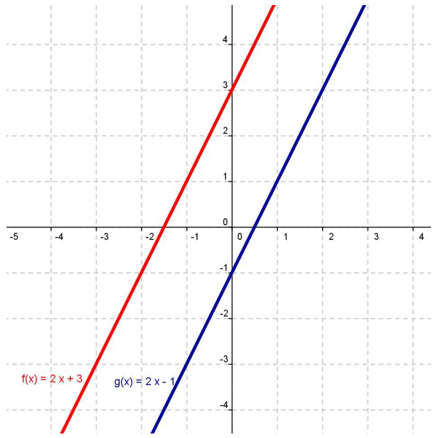
Per tant: $\boldsymbol{f(x) = -2x - 1}$



Rectes paral·leles

Dues rectes són *paral·leles* si tenen el mateix pendent però diferent ordenada en l'origen.

Exemple: $f(x) = 2x + 3$ $g(x) = 2x - 1$

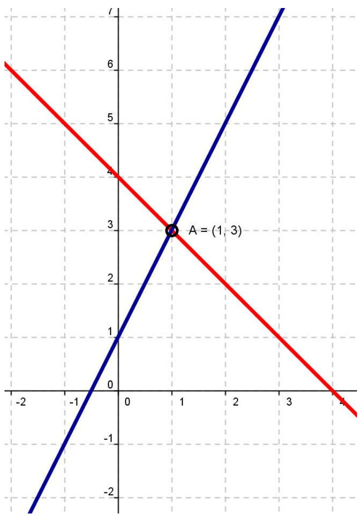


Si tenen el mateix pendent i la mateixa ordenada en l'origen, direm que les rectes són ***coincidents***.

Rectes Secants

Dues rectes són *secants* o es tallen si tenen diferent pendent.

Exemple: $f(x) = -x + 4$ $g(x) = 2x + 1$



El punt de tall de les rectes es calcula fent $f(x) = g(x)$

o, el que és el mateix, resolent el sistema: $\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

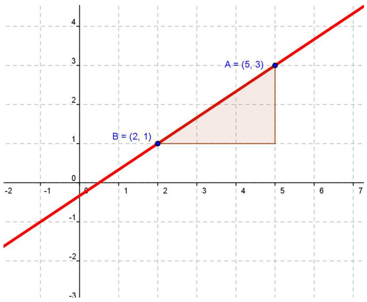
$2x + 1 = -x + 4 \rightarrow 3x = 3 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 3$

El punt de tall és $A(1,3)$.

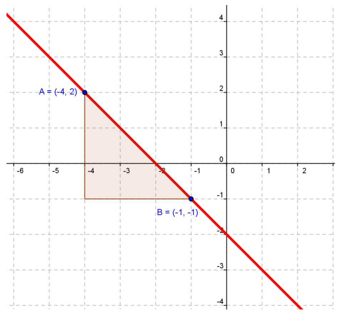
Exercicis proposats

1.- Calculeu el pendent de cada recta de les gràfiques:

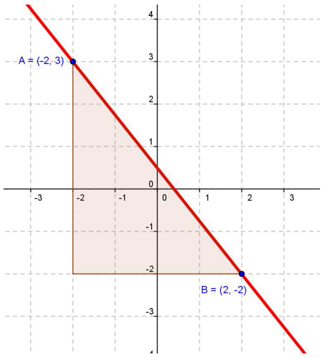
a



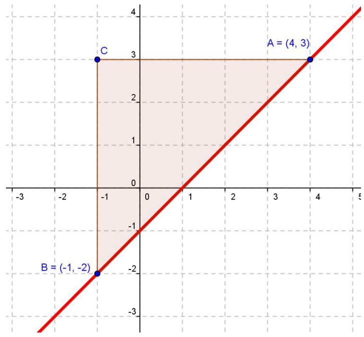
b



c



d



2.- Indiqueu el pendent i l'ordenada en l'origen en cada recta:

a $f(x) = -x + 2$ b $f(x) = 1$ c $f(x) = 3x$ d $f(x) = 3x - 7$

e $y = -2x + 2$ f $y + x = 1$ g $2x - y = 3$ h $y = 7$

i $3y = -2x + 2$ j $2y + x = 1$ k $2x - 3y = 3$ l $y = -2$

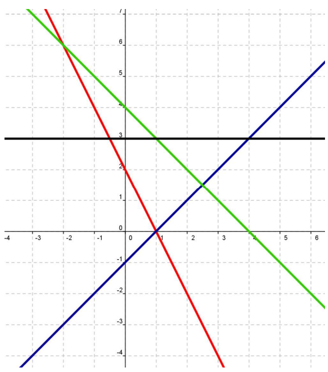
3.- A quina recta correspon cada gràfica?

a $y = -2x + 2$

b $y = x - 1$

c $y = 3$

d $y = -x + 4$



4.- Calculeu els punts de tall amb els eixos de les rectes:

a $f(x) = -2x + 2$ b $y + x = 1$ c $2x - y = 4$ d $f(x) = 7$

$\sum$*sumatori*; $\cap$ *intersecció*; $\cup$ *unió*; $\emptyset$ *conjunt buit*; $\in$ *pertany*; $\forall$ *per a tot*; $\rightarrow$ *aleshores*
$\subseteq$ *inclós en*; $\sqcap$ *Producte*; / *de forma que*; $\leftrightarrow$ *si i sols si*; $\exists$ *existeix*; $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$; La recta

5.- Representeu gràficament les rectes (calculeu els punts de tall amb els eixos):

a $f(x) = -x + 2$ b $y = x - 1$ c $y = 2x - 4$ d $f(x) = -1$

e $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ f $y = \frac{2}{3}x - 1$ g $y = 2x + \frac{1}{3}$ h $f(x) = \frac{-2}{3}x - 1$

i $f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ j $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}$ k $y = \frac{-3}{5}x - 1$ l $f(x) = 0$

m $f(x) = \frac{-x+2}{2}$ n $y = \frac{x-1}{3}$ o $y = \frac{2x-4}{5}$ p $x = -1$

6.- Representeu en els mateixos eixos les següents rectes:

a $f(x) = x + 3$ b $y = x$ c $y = x - 1$ d $y - x = -3$

7.- Representeu en els mateixos eixos les següents rectes:

a $f(x) = x$ b $y = 3x$ c $y = \frac{1}{3}x$ d $f(x) = -3$

8- Representeu en els mateixos eixos les següents rectes:

a $f(x) = x + 3$ b $y = -x + 3$ c $y = 2x + 3$ d $f(x) = 3$

Rectes paral·leles

9.- Calculeu l'expressió matemàtica de dues rectes paral·leles a les rectes

$a)\ f(x) = -2x + 5$ $b)\ f(x) = x + 2$ $c)\ f(x) = -2$

10.- Calculeu la recta que passa pel punt $A(-3,1)$ i és paral·lela a la recta $f(x) = -3x + 1$.

11.- Calculeu la recta que passa pel punt $A(-1,0)$ i és paral·lela a la recta $f(x) = 2x - 10$.

12.- Calculeu la recta que passa pel punt $A(3,2)$ i és paral·lela a la recta $f(x) = 1$.

13.- Calculeu la recta que passa pel punt $A(-3,1)$ i és paral·lela a la recta $y + 3x = 1$.

Recta coneixent punt per on passa i pendent

14.- Calculeu l'expressió de la recta que passa pel punt $A(-2,1)$ i el seu pendent és $m = -2$.

15.- Calculeu l'expressió de la recta que passa pel punt $A(3,-1)$ i el seu pendent és $m = 1$.

16.- Calculeu l'expressió de la recta que passa pel punt $A(0,-1)$ i el seu pendent és $m = 0$.

Recta coneixent dos punts

17.- Calculeu l'expressió de la recta que passa pels punts $A(2,3)$ i $B(-1,-1)$.

18.- Calculeu l'expressió de la recta que passa pels punts $A(2,3)$ i $B(-1,3)$.

19.- Calculeu el pendent de la recta que passa pels punts $A(2,4)$ i $B(-2,-2)$.

20.- Calculeu el pendent de la recta que passa pels punts $A(0,4)$ i $B(-2,-2)$.

Rectes que es tallen

21.- Donades les rectes $f(x) = 2x - 2$ i $g(x) = -x + 1$, comproveu que es tallen i calculeu el punt de tall.

22.- Donades les rectes $f(x) = -2x + 3$ i $g(x) = x + 4$, comproveu que es tallen i calculeu el punt de tall.

Altres

23.- Calculeu ***a*** sabent que la recta $ax + 2y = 3$ té pendent $m = -2$.

24.- Calculeu ***a*** sabent que la recta $ax + 2y = 3$ passa pel punt $A(-3,4)$.

25.- Calculeu **a** i **b** sabent que les rectes $f(x) = ax + 2b$ i $g(x) = -2ax - b$ es tallen en $A(-1,1)$.