

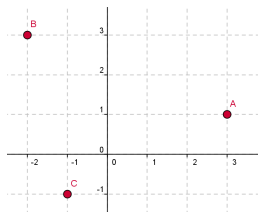
Geometria



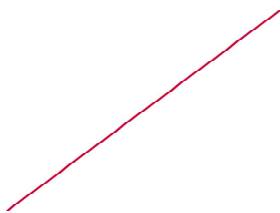
Ens fonamentals de la geometria

Els **ens fonamentals de la geometria** clàssica (Euclides) són entitats que no tenen definició, sabem el que signifiquen per la descripció de les seues característiques. El **punt**, la **recta** i el **pla** són els tres ens fonamentals de la geometria clàssica.

Punt El **punt**, en la geometria euclidiana, és un concepte intuïtiu. L'ens geomètric sense dimensions que descriu una posició en el pla o en l'espai, determinada per un sistema de referència.



Recta En geometria euclidiana, la **recta** o línia recta, és l'ens ideal que s'exten en una mateixa direcció, existeix en una sola dimensió i conté infinits punts. També es descriu com la successió continua i indefinida de punts en una sola dimensió, és a dir, no té principi ni final.



Pla Un **pla** és l'ens ideal que sols té dues dimensions, i conté infinits punts i rectes.



Elements d'Euclides

De Viquipèdia



Fragment d'Els elements d'Euclides, escrit en paper, trobat al jaciment d'Oxirrinco (Oxyrhynchus), Egipte.

Els **Elements** és l'obra més important escrita per Euclides. És un tractat matemàtic que consta de 13 llibres. Cadascun consta d'una successió de teoremes que parlen de **geometria**, **aritmètica** i **àlgebra**. A vegades a aquests llibres s'hi han afegit els volums XIV i XV, que van ser escrits per altres autors, però tenen un contingut similar que s'hi aproxima. Els elements, tot i ser una obra pròpia d'Euclides, és la recopilació de més de tres segles d'investigacions profundes i detallades (època anomenada Edat "Heroica de les Matemàtiques"). Els primers Elements van ser escrits per Hipòcrates, i es poden trobar mencionats altres autors en la seva escriptura.

Postulats i axiomes dels Elements d'Euclides

Els cinc **axiomes** dels Elements són:

1. Coses iguals a una tercera són també iguals entre si.
2. Si a coses iguals s'afegeixen coses iguals, els totals són iguals.
3. Si de coses iguals es resten coses iguals, el residu són coses iguals.
4. Les coses congruents entre si, son iguals.
5. El tot és major que la part.

Els cinc **postulats** dels Elements són:

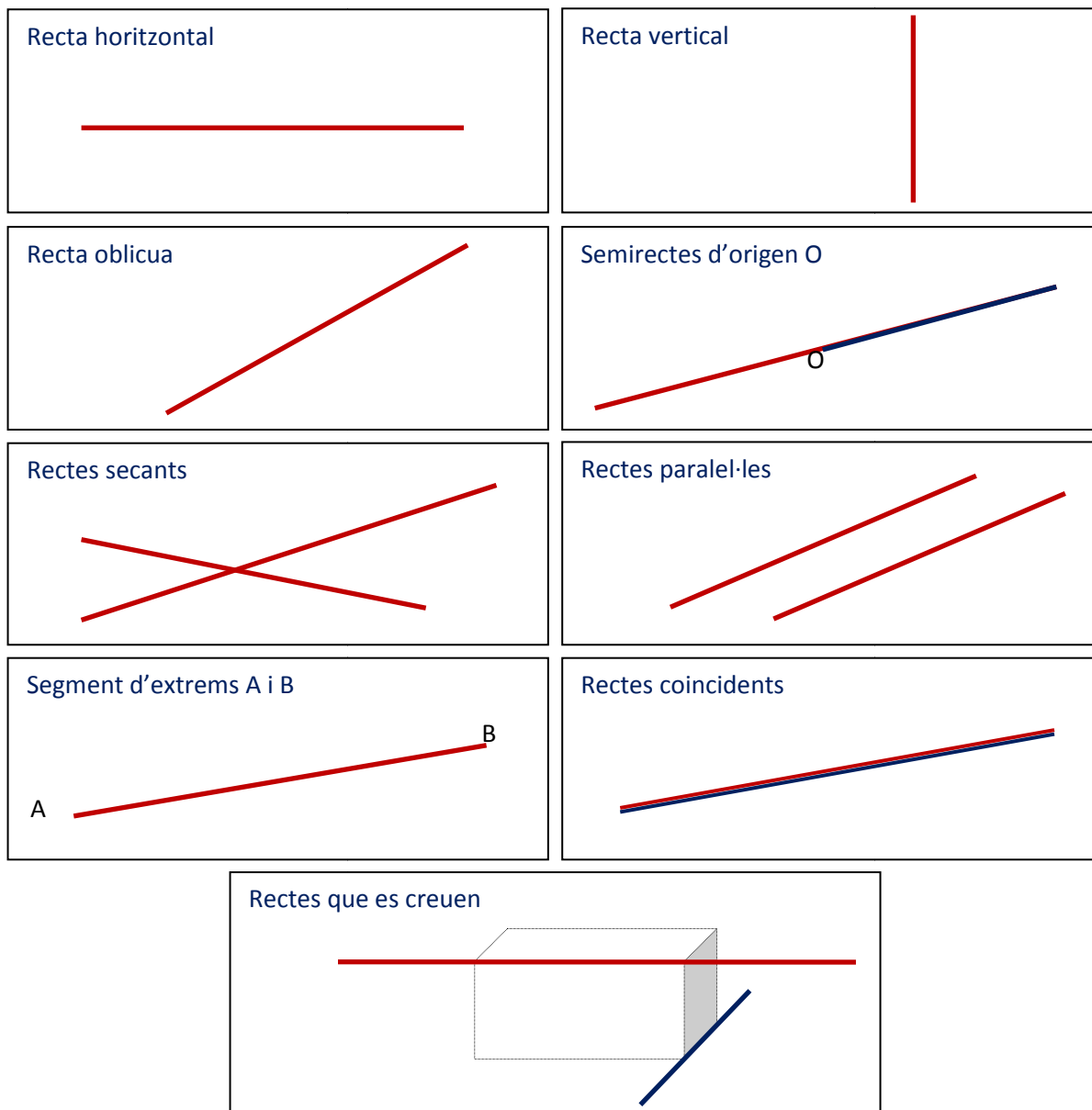
1. Una recta pot ésser traçada entre dos punts qualsevol.
2. El segment d'una recta es pot perllongar indefinidament.
3. Es pot traçar un cercle amb qualsevol centre i radi.
4. Tots els angles rectes són iguals entre si.
5. Si una secant talla dues rectes formant a un costat angles interiors menors a dues rectes, les dos rectes perllongades es tallen en aquest mateix costat (postulat de les **paral·leles**).

El cinqué **postulat** va ser substituït per:

Per un punt exterior a una recta sols es pot traçar una i sols una paral·lela a la recta esmentada.

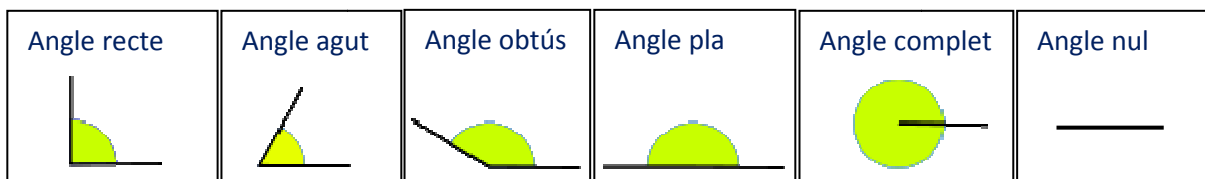
Aquest cinqué postulat pot ser negat i no s'entra en cap contradicció, donant pas a geometries no euclidianes: **geometria el·liptica** (no es pot traçar cap) i **geometria hiperbòlica** (es pot traçar més d'una).

Rectes



Angles

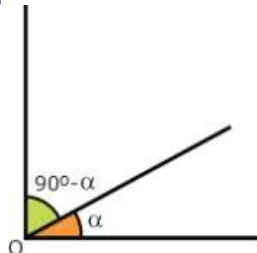
Un angle (del grec *agkulos*, encorbat, doblegat, a través del llatí *angulus*, cantonada) és la regió del pla compresa entre dues semirectes d'origen comú. Aquest punt comú rep el nom de vèrtex de l'angle (*V*), i les semirectes són els costats de l'angle. Per angle també es pot entendre la figura geomètrica que formen les dues semirectes d'origen comú. (De Viquipèdia)



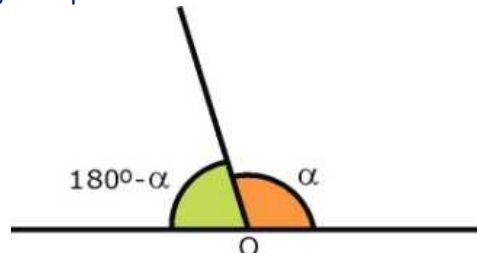
Σ sumatori; $\cap$ intersecció; $\cup$ unió; $\emptyset$ conjunt buit; $\in$ pertany; $\forall$ per a tot; $\rightarrow$ aleshores
 $\subseteq$ inclòs en; $\prod$ Producte; $/$ de forma que; $\leftrightarrow$ si i sols si; $\exists$ existeix; $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$; **Geometria**

Angles i rectes

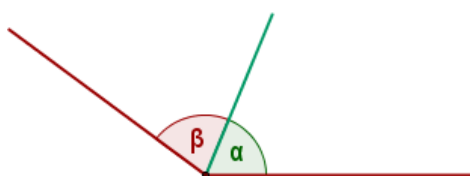
Angles complementaris



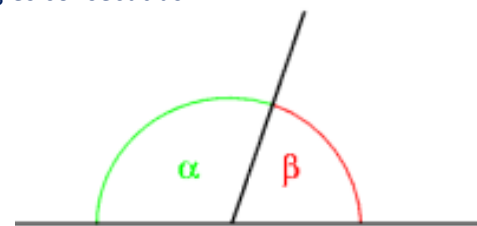
Angles suplementaris



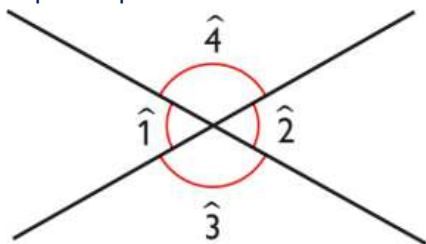
Angles adjacents



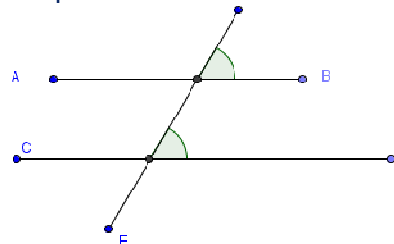
Angles consecutius



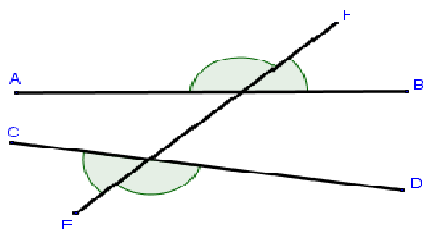
Angles oposats pel vèrtex



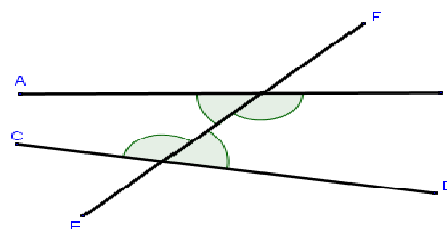
Angles corresponents



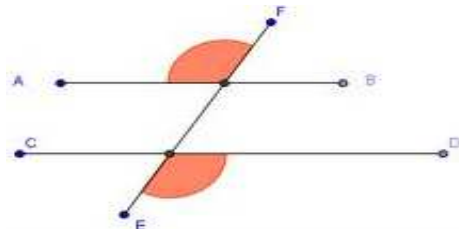
Angles externs



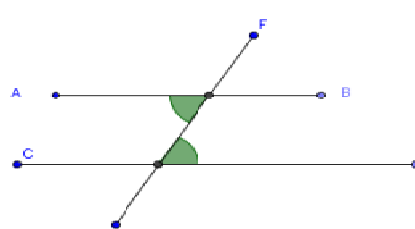
Angles interns



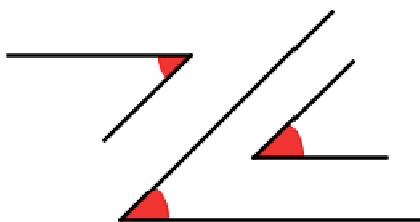
Angles alterns externs



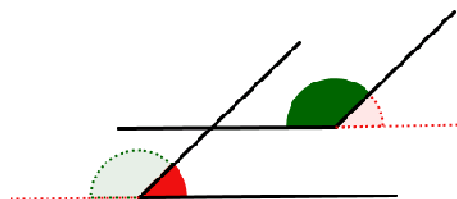
Angles alterns interns



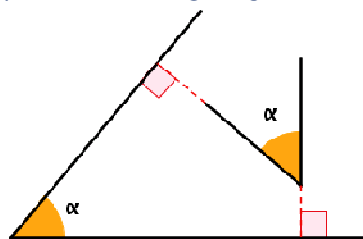
Rectes paral·leles. Angles iguals



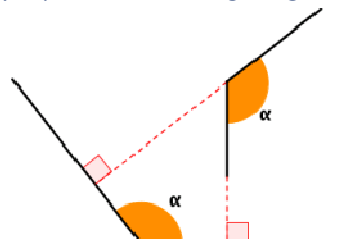
Rectes paral·leles. Angles suplementaris



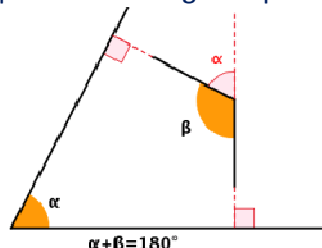
Rectes perpendiculars. Angles iguals



Rectes perpendiculars. Angles iguals



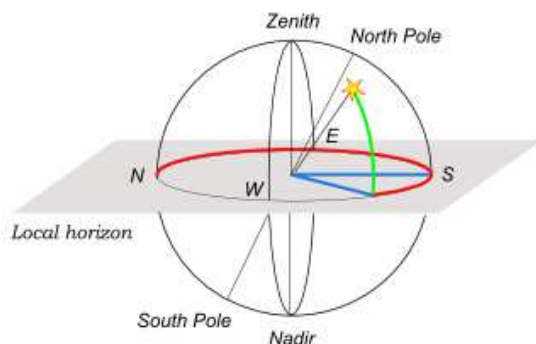
Rectes perpendiculars. Angles suplementaris



Curiositats

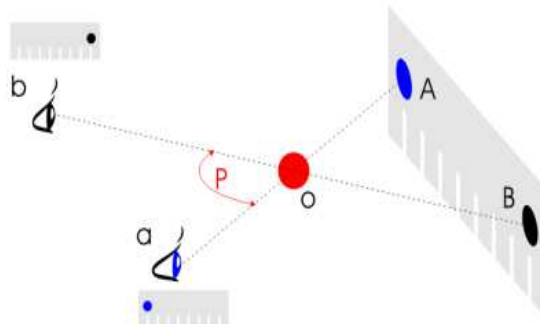
Azimut

L'angle blau és l'azimut de l'estel mesurat des del sud. L'arc vermell és l'azimut del mateix estel mesurat des del nord.



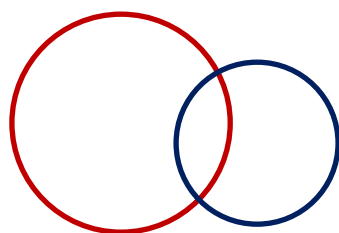
Paral·laxi

La paral·laxi: dos observadors, en **a** i en **b**, veuen **O** en posicions diferents respecte del fons.

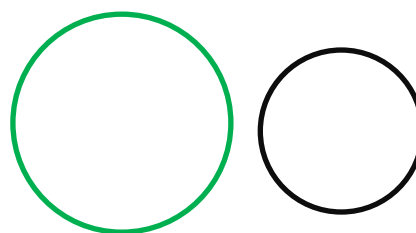


Circumferències i rectes

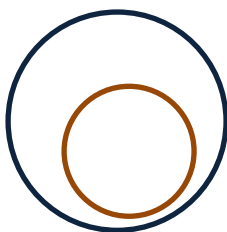
Circumferències Secants



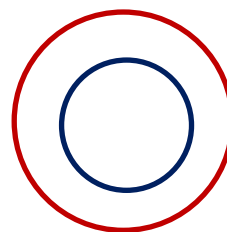
Circumferències Exteriors



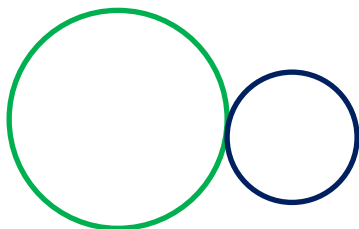
Circumferències Interiors



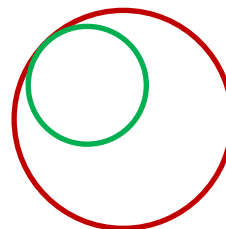
Circumferències Concèntriques



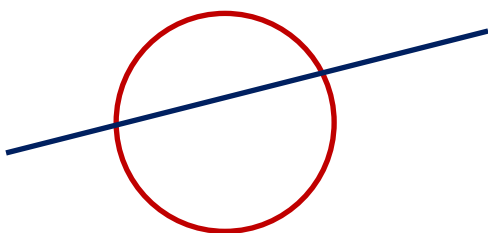
Circumferències Tangents exteriors



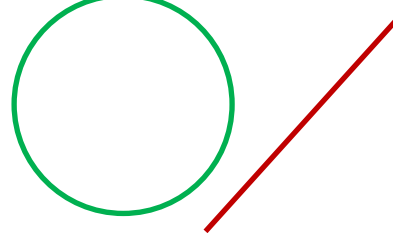
Circumferències Tangents interiors



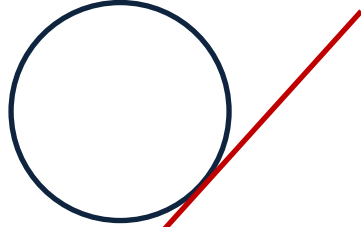
Recta secant a la circumferència



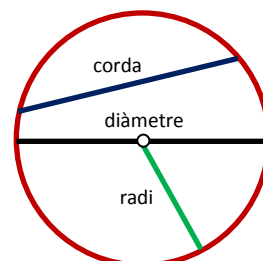
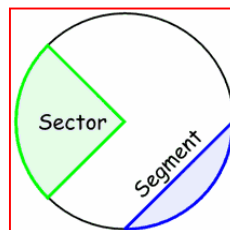
Recta exterior a la circumferència



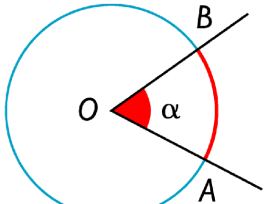
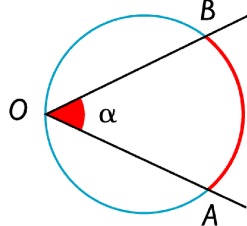
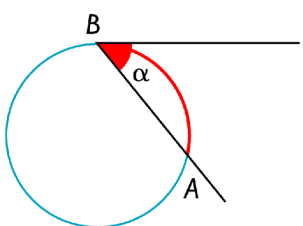
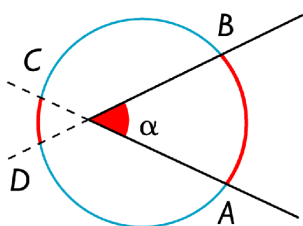
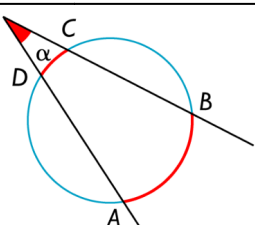
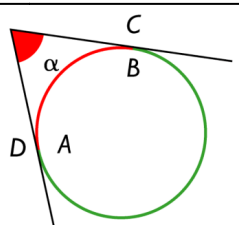
Recta tangent a la circumferència



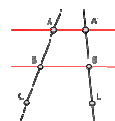
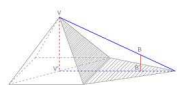
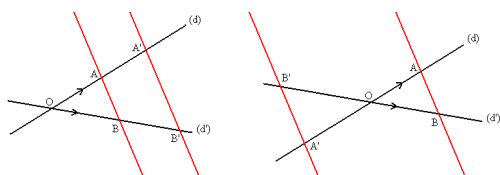
Circumferència



Angles en la circumferència

Angle central  $\alpha = \widehat{AB}$	Angle inscrit  $\alpha = \frac{1}{2} \widehat{AB}$
Angle semiinscrit  $\alpha = \frac{1}{2} \widehat{AB}$	Angle interior  $\alpha = \frac{1}{2} (\widehat{AB} + \widehat{CD})$
Angle exterior  $\alpha = \frac{1}{2} (\widehat{AB} - \widehat{CD})$	Angle circumscribit  $\alpha = \frac{1}{2} (\widehat{AB} - \widehat{CD})$

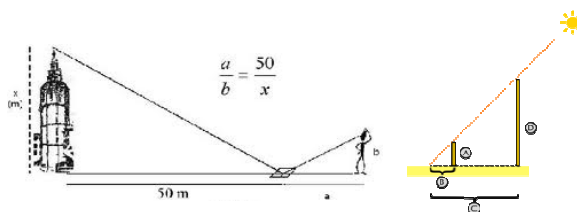
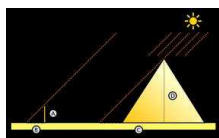
Segments. Teorema de Thales



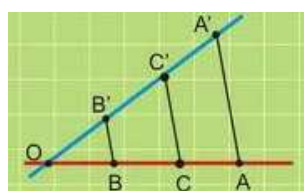
Si dues rectes concurrents són tallades per un sistema rectes, aleshores aquestes són paral·leles si, i només si, els segments determinats a les rectes concurrents són proporcionals. $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} \Leftrightarrow \overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$

Aplicacions

Mesurar altures

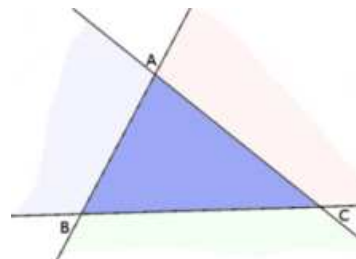


Dividir un segment en parts iguals



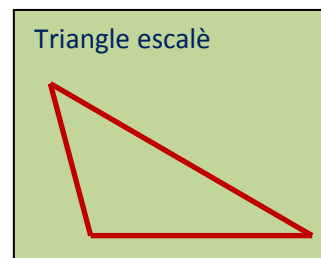
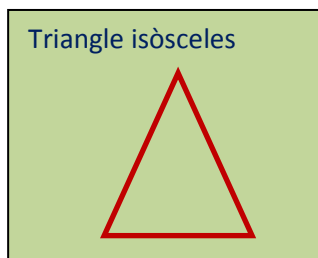
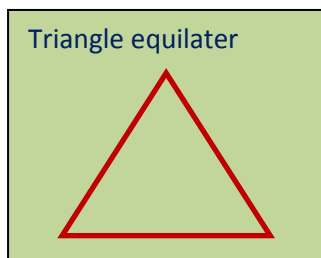
Σ sumatori; $\cap$ intersecció; $\cup$ unió; $\emptyset$ conjunt buit; $\in$ pertany; $\forall$ per a tot; $\rightarrow$ aleshores
 $\subseteq$ inclòs en; $\sqcap$ Producte; $/$ de forma que; $\Leftrightarrow$ si i sols si; $\exists$ existeix; $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$; **Geometria**

Triangle



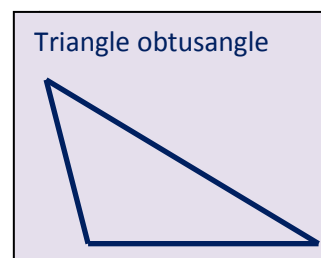
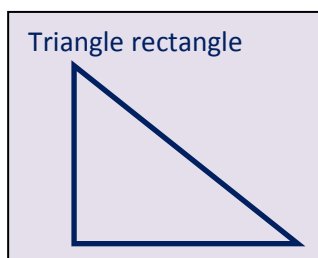
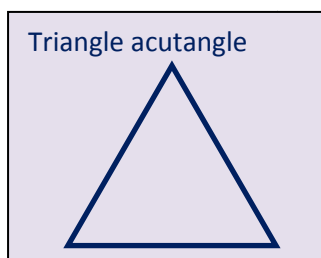
Un triangle és un polígon de tres costats. En geometria euclidiana tres punts no alineats defineixen sempre un únic pla i un únic triangle.

Classificació segons els costats



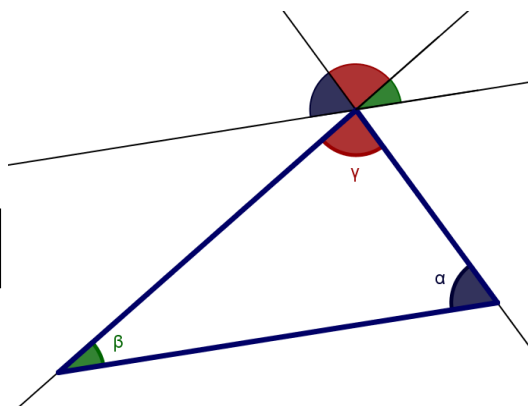
Propietat En qualsevol triangle la suma de les longituds de dos costats és més gran que la longitud del tercer.

Classificació segons els angles

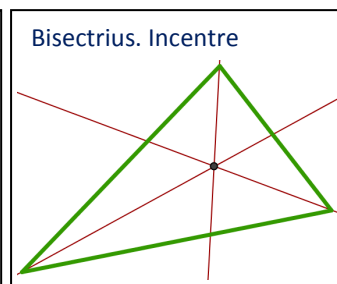
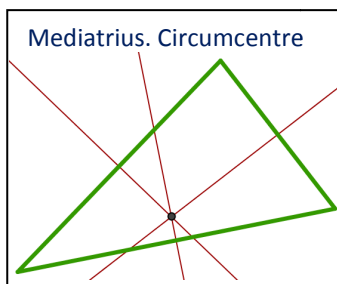
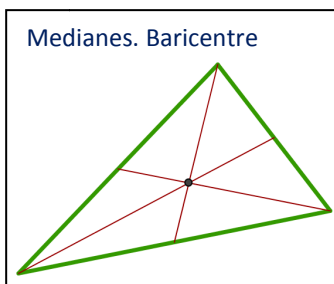
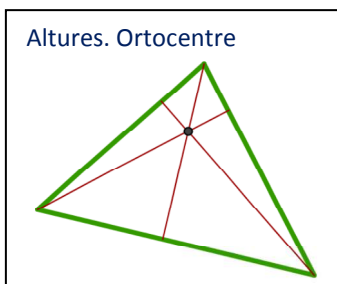


Suma dels angles d'un triangle

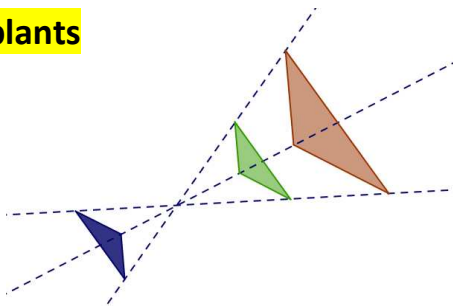
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$



Rectes i punts en el triangle



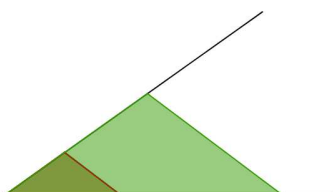
Triangles semblants



Els angles corresponents són iguals.

Els costats homòlegs són proporcionals.

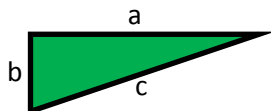
Triangles en posició de Thales



Un vèrtex comú i els costats oposats a aquest vèrtex són paral·lels.

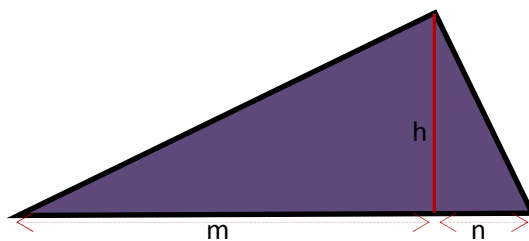
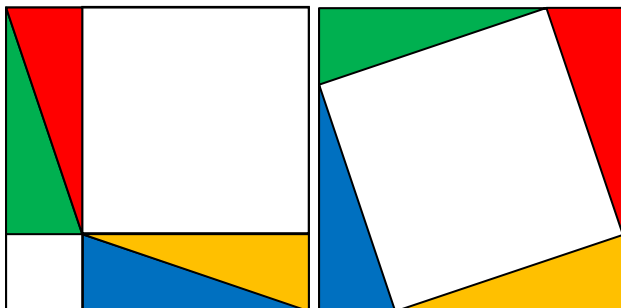
Els triangles en posició de Thales són semblants.

Triangle rectangle

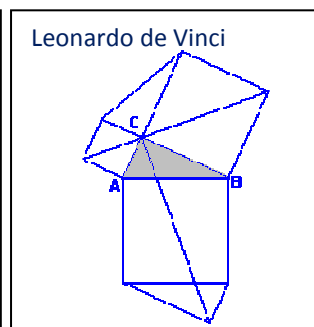
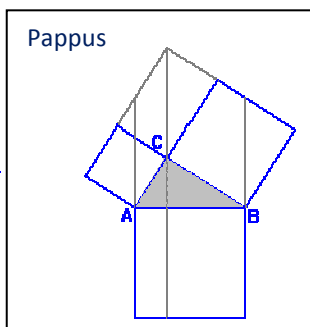
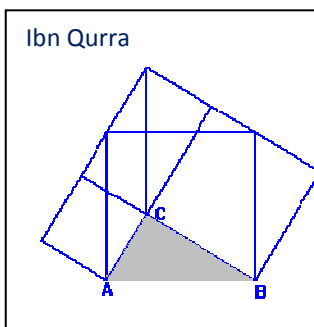
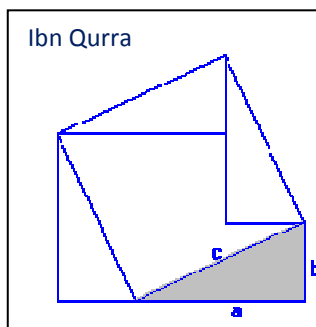


Teorema de Pitàgores $a^2 + b^2 = c^2$

Teorema de l'altura $h^2 = m \cdot n$

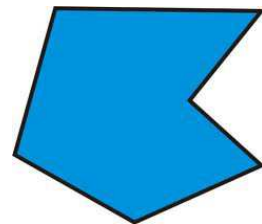


Altres demostracions (T. Pitàgores)



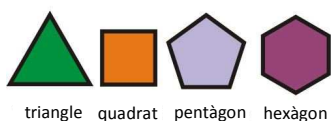
Polígons

Un **polígon** (del grec, "molts angles") és una figura geomètrica plana formada per un nombre finit de segments lineals seqüencials. Cada un d'aquests segments és un costat, i cada un dels punts on s'uneixen dos costats és un vèrtex. Sovint, el terme polígon també s'utilitza per descriure l'àrea compresa dins de la figura, o la unió de la figura i l'àrea.

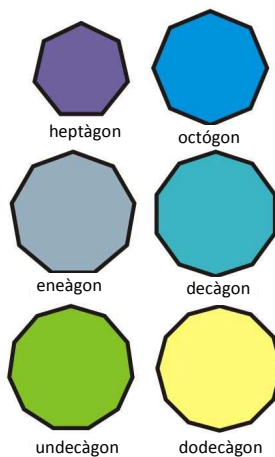


Polígons regulars

Costats iguals i angles interns iguals



triangle quadrat pentàgon hexàgon

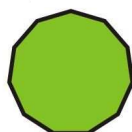


heptàgon

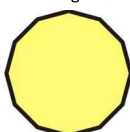
octògon

eneàgon

decàgon



undecàgon



dodecàgon

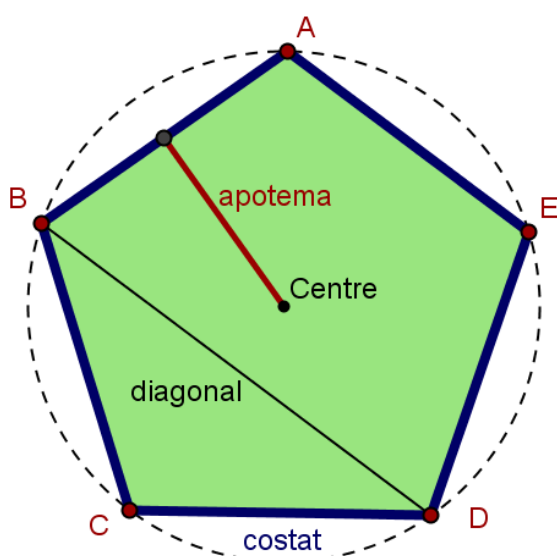
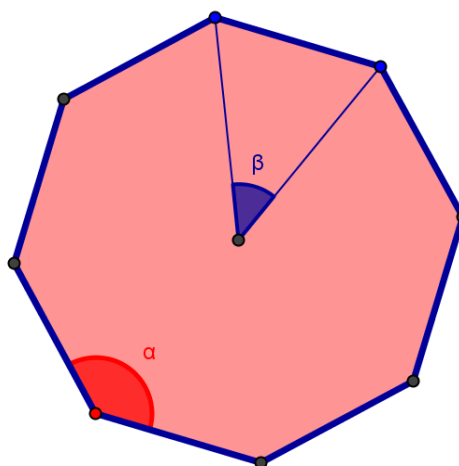
n costats

Angle central

$$\beta = \frac{360^\circ}{n}$$

Angle intern

$$\alpha = 180^\circ - \beta$$



Número de diagonals

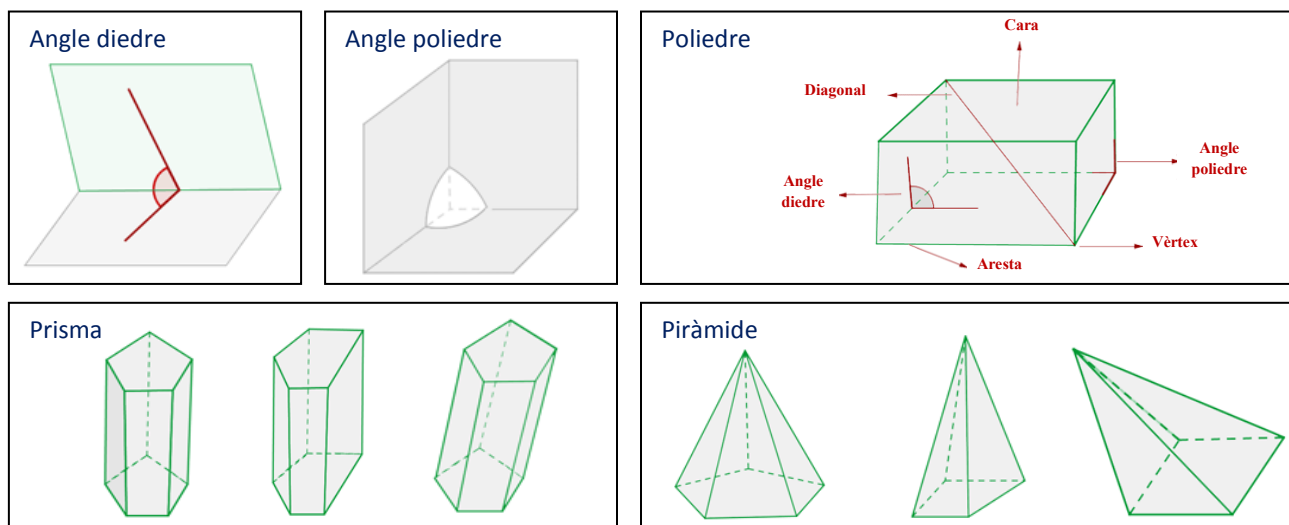
$$N_d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

Àrea

p = perímetre

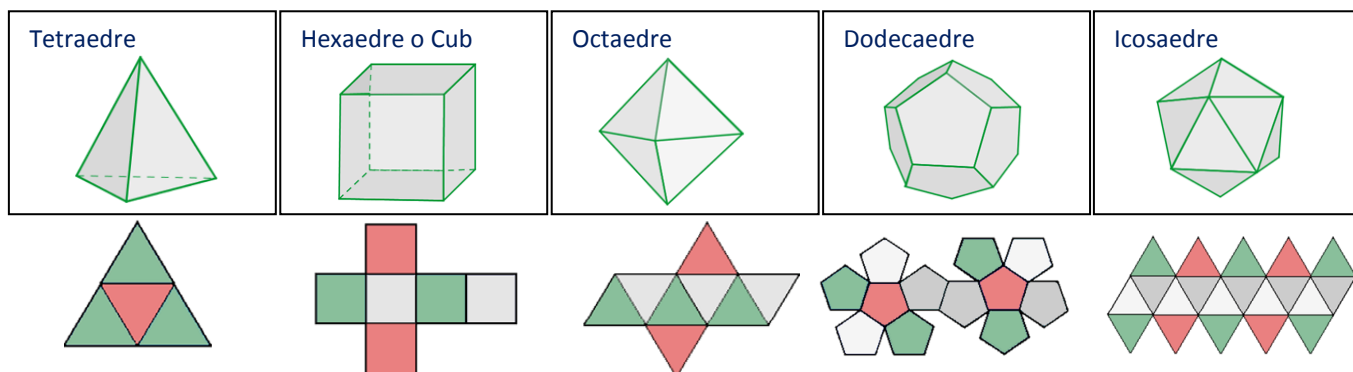
$$A = \frac{p \cdot \text{apotema}}{2}$$

Polièdres

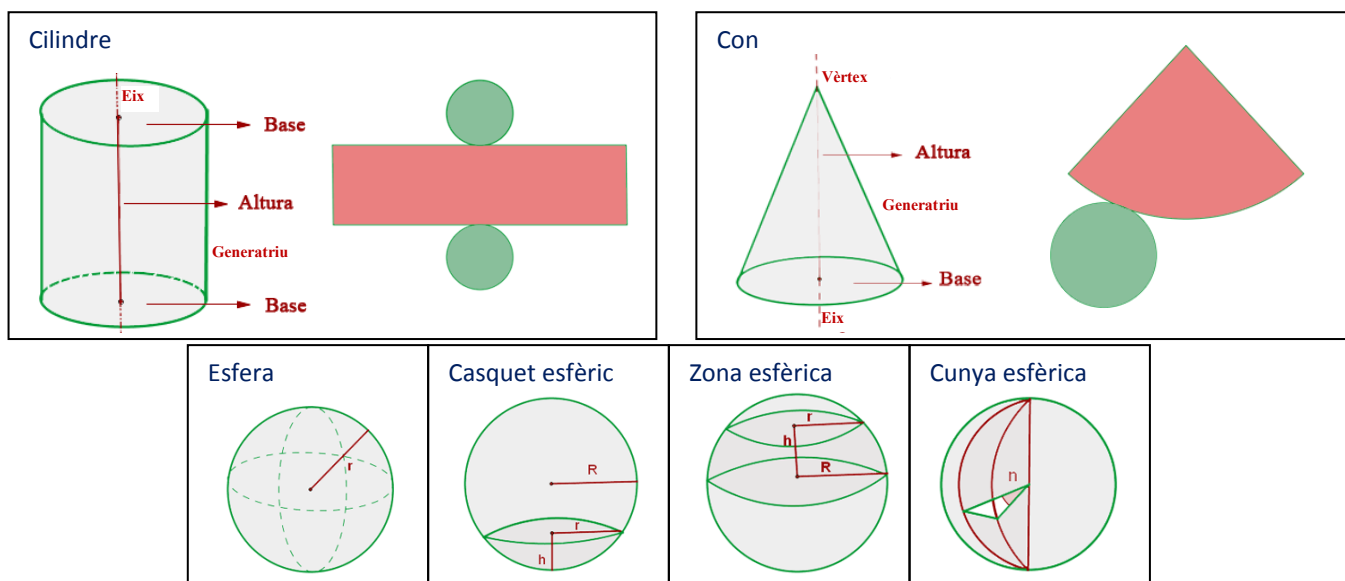


Poliedres regulars

Tenen tots els angles diedres i tots els angles poliedres iguals, a més totes les cares són polígons regulars iguals.



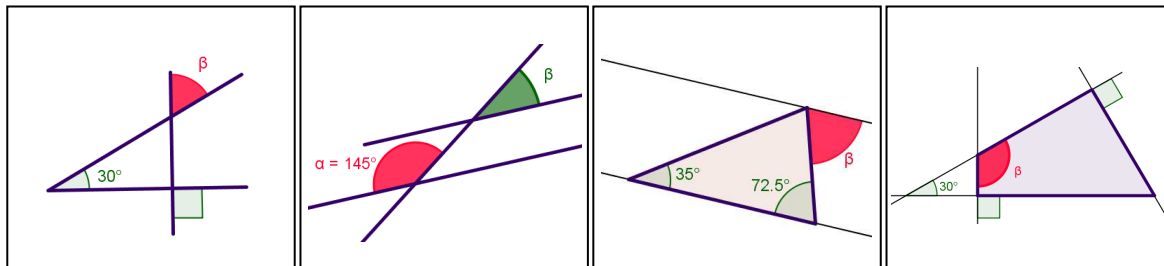
Altres cossos



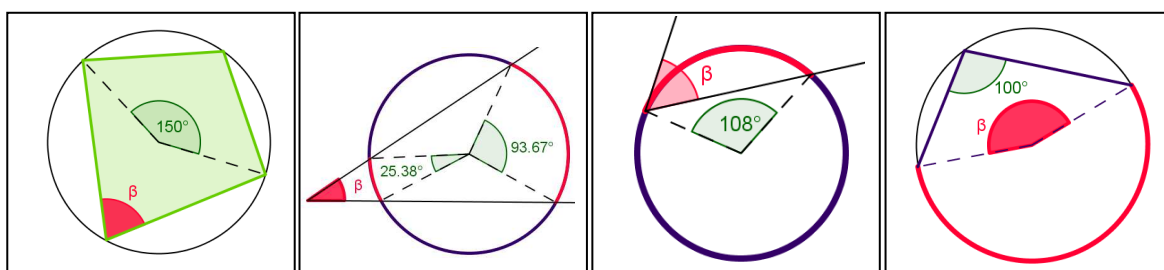
Σ sumatori; $\cap$ intersecció; $\cup$ unió; $\emptyset$ conjunt buit; $\in$ pertany; $\forall$ per a tot; $\rightarrow$ aleshores
 $\subseteq$ inclòs en; $\prod$ Producte; $/$ de forma que; $\leftrightarrow$ si i sols si; $\exists$ existeix; $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$; **Geometria**

Exercicis proposats

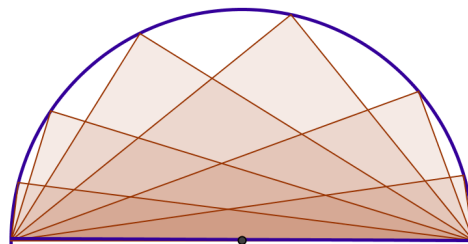
1.- Calculeu que val l'angle β .



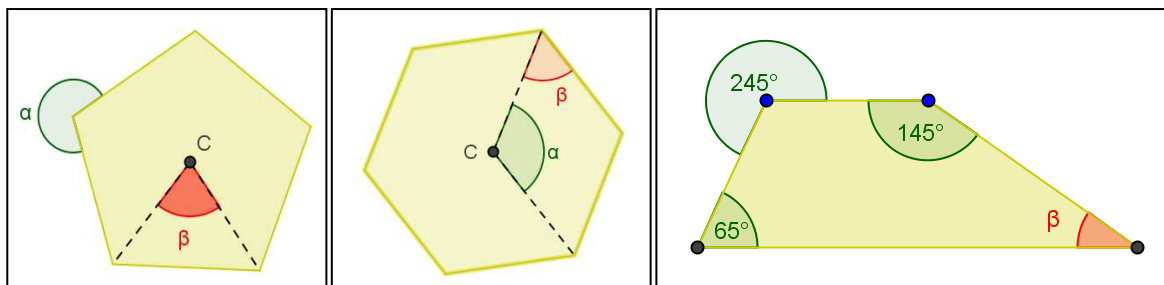
2.- Calculeu que val l'angle β .



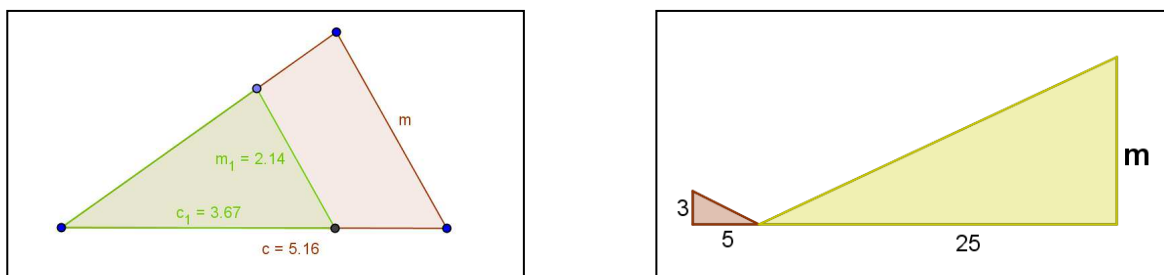
3.- Demostreu que tots els triangles són rectangles.



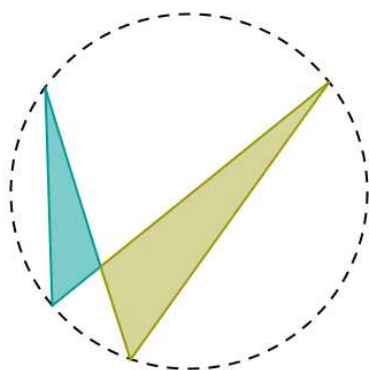
3.- Calculeu que valen els angles α i β .



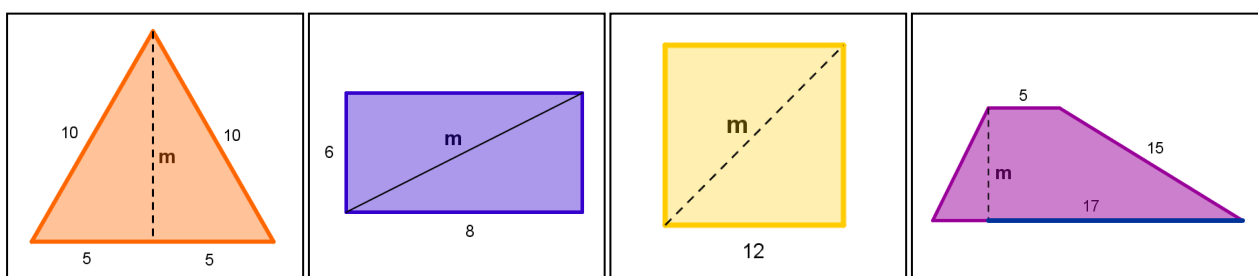
4.- Calculeu el valor de m .



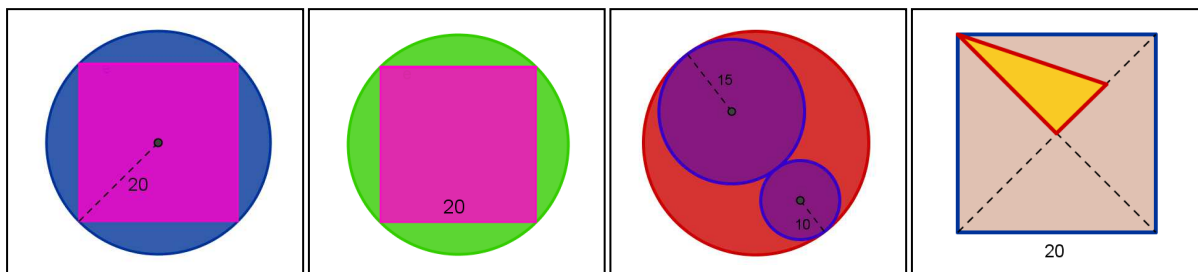
5.- Demostreu que els dos triangles incrits en la circumferència són semblants (mireu si tenen els mateixos angles).



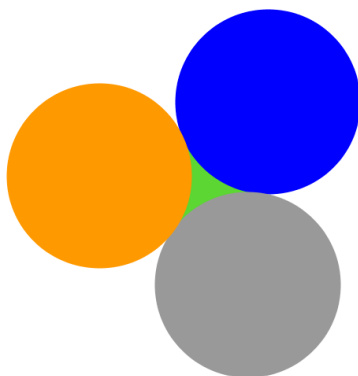
6.- Calculeu el valor de m .



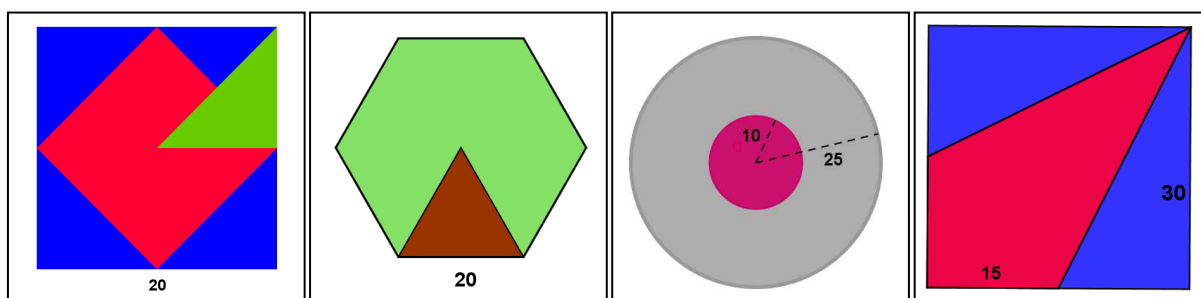
7.- Calculeu l'àrea de les regions acolorides.



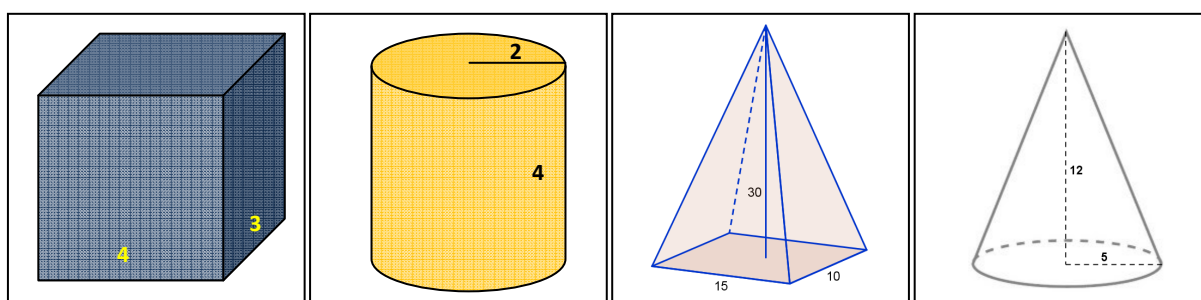
8.- Calculeu l'àrea de la regió de color verd sabent que el radi de cada circumferència val 6.



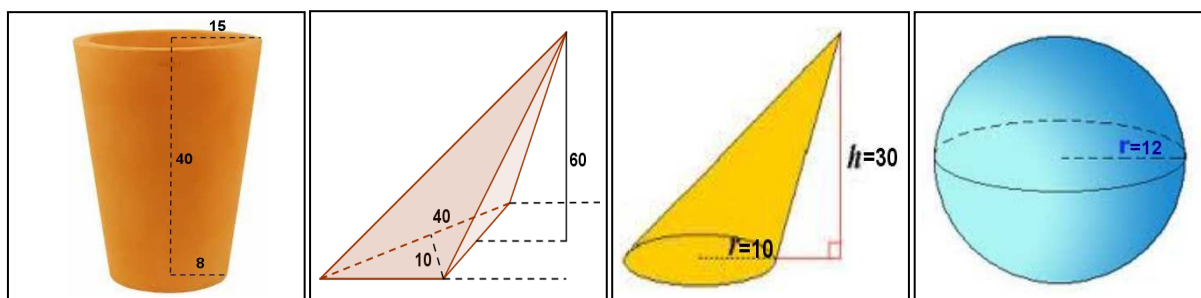
9.- Calculeu l'àrea de les regions acolorides.



10.- Calculeu el volum dels següents cossos geomètrics.



11.- Calculeu el volum dels següents cossos geomètrics.



12.- Calculeu l'àrea total dels següents cossos geomètrics (base=hexàgon regular).

