

Funcions



*Castell d'Alfàndec
Benifairó*

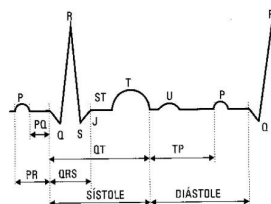
Funcions

Introducció

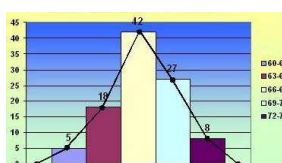
Les funcions estan presents en quasi tots els moments del quefer diari. Se'ns presenten en:

Forma de gràfica

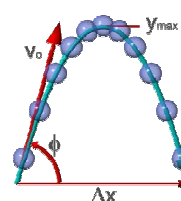
Electrocardiograma



Polígon de freqüències

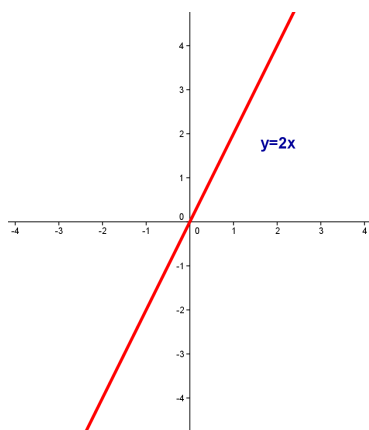


Estudi de moviments

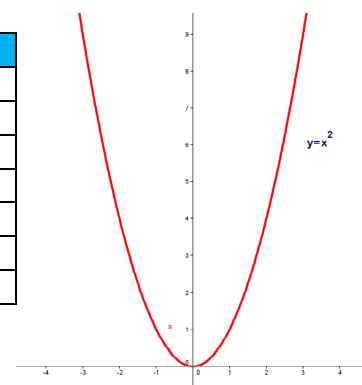


Forma de taules amb les respectives gràfiques

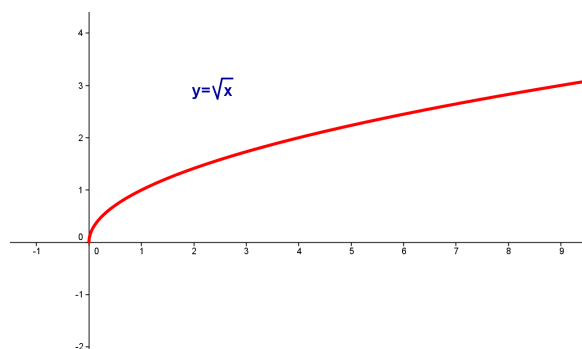
X	Y
0	0
1	2
2	4
3	6
-1	-2
-2	-4
-3	-6



X	Y
0	0
1	1
2	4
3	9
-1	1
-2	4
-3	9



X	Y
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4



Σ sumatori; $\cap$ intersecció; $\cup$ unió; $\emptyset$ conjunt buit; $\in$ pertany; $\forall$ per a tot; $\rightarrow$ aleshores; $\subseteq$ inclòs en
 $\prod$ Producte; / de forma que; $\leftrightarrow$ si i sols si; $\exists$ existeix; $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$; **Funcions**

Forma d'expressió matemàtica

Rebut del mòbil

Fixem-nos en el nostre mòbil, per exemple. Per fer una cridada paguem una quota fixa (establiment de cridada) i després una quantitat per minut.

Quina funció hi ha ahí?

Suposem que d'establiment de cridada paguem 15 cts.

Suposem també que per cada minut paguem 8 cts.

Podem construir la següent funció:

$$C = 15 + 8 \cdot t$$

C representa el cost de la cridada en cts.

t és el temps que hem emprat en minuts.

Àrea d'un quadrat conegut el costat

Per calcular l'àrea d'un quadrat elevem al quadrat el valor del seu costat.

Quina funció podem construir que ens done l'àrea?

$$A = c^2$$

A representa l'àrea del quadrat.

c és el que medeix el costat del quadrat.

Volum i Superfície d'una esfera conegut el seu radi

Per calcular el volum la funció que podem definir és:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

V representa el volum de l'esfera.

r és el que medeix el radi.

Per calcular la superfície, la funció que podem definir és:

$$S = 4\pi r^2$$

S representa la superfície de l'esfera.

r és el que medeix el radi.

L'estudi de les funcions, l'Anàlisi, és una part molt important de les Matemàtiques.

Conceptes com variable dependent, variable independent, correspondència, conjunts de definició, domini, recorregut, monotonia, curvatura, màxims, mínims, ... seran emprats al llarg d'aquest tema. Cal definir tots els conceptes amb què anem a treballar en el tema de funcions.

Correspondència

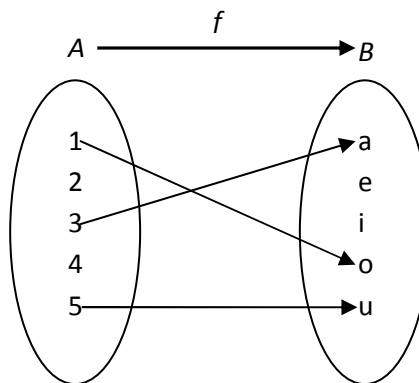
Donats dos conjunts A i B , considerem tots els parells de la forma (a, b) on $a \in A$ i $b \in B$.

Direm que s'ha establert una correspondència f entre A i B si hem seleccionat un subconjunt de tots els parells que poden formar-se.

Exemple:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{a, e, i, o, u\}$$



En aquest exemple hem seleccionat els parells $(1, o)$, $(3, a)$ i $(5, u)$.

Hem establert una correspondència que li diguem f .

Direm que l'element $1 \in A$ està relacionat en l'element $o \in B$.

Direm que l'element $3 \in A$ està relacionat en l'element $a \in B$.

Direm que l'element $5 \in A$ està relacionat en l'element $u \in B$.

També:

La imatge de l'1 mitjançant f és o . Escriurem $f(1) = o$ (**antiimatge d'o és {1}**)

La imatge del 3 mitjançant f és a . Escriurem $f(3) = a$ (**antiimatge d'a és {3}**)

La imatge del 5 mitjançant f és u . Escriurem $f(5) = u$ (**antiimatge d'u és {5}**)

Conjunts de definició d'una correspondència

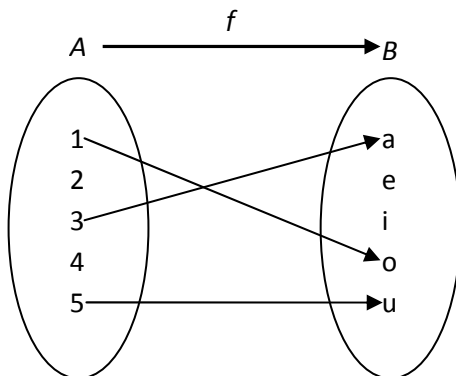
Si s'estableix f entre A i B escriurem: $f: A \rightarrow B$ i llegirem f definida entre A i B .

Conjunt inicial A rep el nom de conjunt inicial de la correspondència.

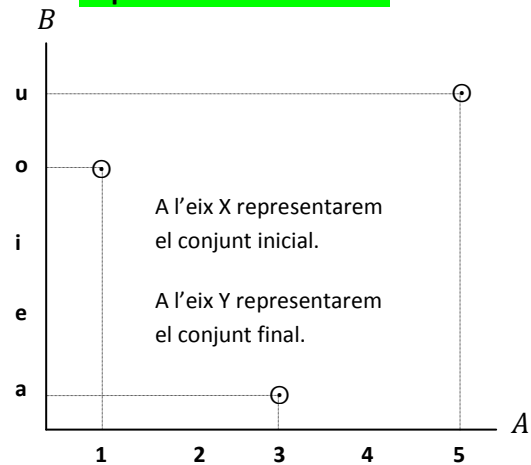
Conjunt final B rep el nom de conjunt final de la correspondència.

Representació gràfica d'una correspondència

Diagrames de Venn



Representació Cartesiana



Domini d'una correspondència

Siga $f: A \rightarrow B$ una correspondència.

Definim **domini** d' f : $D(f) = \{x \in A / \exists f(x)\}$

És el conjunt format per tots els elements del conjunt inicial que tenen imatge.

Exemple: En l'exemple anterior $D(f) = \{1, 3, 5\}$

Recorregut d'una correspondència

Siga $f: A \rightarrow B$ una correspondència.

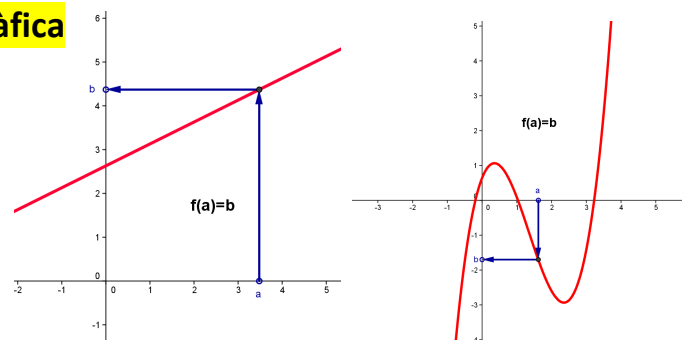
Definim **recorregut** d' f : $R(f) = \{y \in B / \exists x \in A \text{ on } f(x) = y\}$

És el conjunt format per tots els elements del conjunt final que tenen antiimatge.

Exemple: En l'exemple anterior $R(f) = \{a, o, u\}$

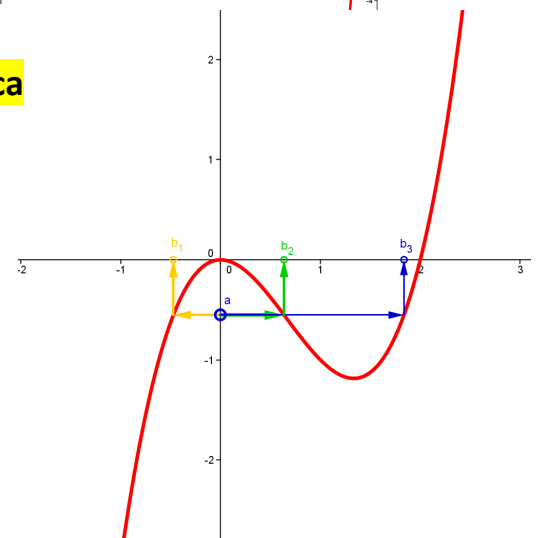
Imatge d'un element coneguda la seua gràfica

Per calcular la imatge de l'element a , traçarem una vertical fins trobar la gràfica de la correspondència. A continuació traçarem una horitzontal fins tallar l'eix Y. Aquest valor b serà la imatge de l'element a .



Antiimatge d'un element coneguda la seua gràfica

Per calcular l'antiimatge de l'element a , traçarem una horitzontal fins trobar la gràfica de la correspondència. A continuació traçarem una vertical fins tallar l'eix X. Aquest(os) valor(s) b seran l'antiimatge de l'element a .



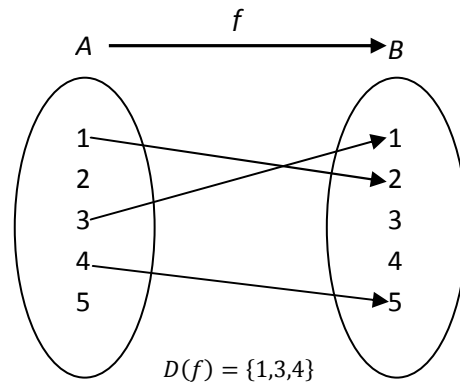
Domini d'una correspondència coneguda la seua gràfica

Recordem:

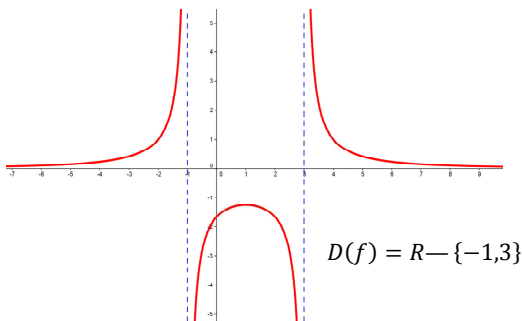
Si $f: A \rightarrow B$ és una correspondència.

$$D(f) = \{x \in A / \exists f(x)\}$$

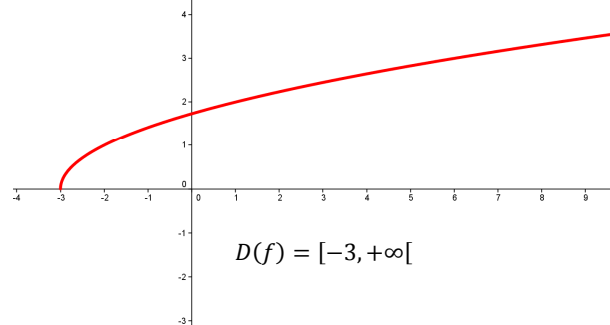
És el conjunt format per tots els elements del conjunt inicial que tenen imatge.



Observem que -1 i 3 no tenen imatge.



Observem que els elements que tenen imatge són $[-3, +\infty[$



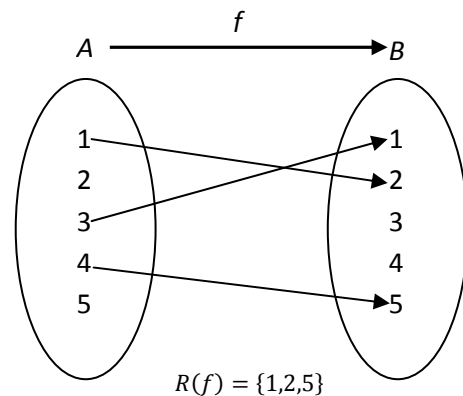
Recorregut d'una correspondència coneguda la seua gràfica

Recordem:

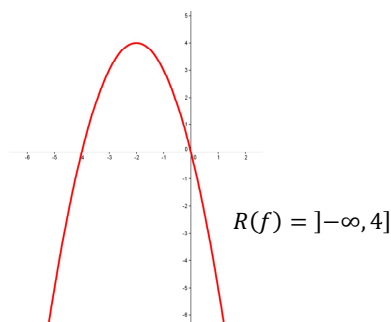
Si $f: A \rightarrow B$ és una correspondència.

$$R(f) = \{y \in B / \exists x \in A \text{ on } f(x) = y\}$$

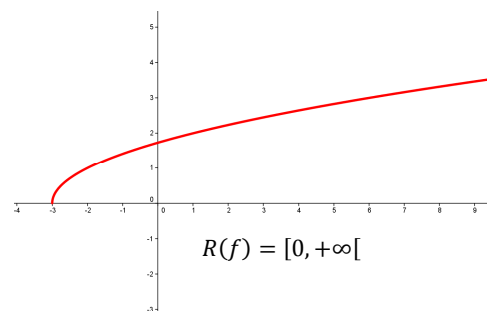
És el conjunt format per tots els elements del conjunt final que tenen antiimatge.



Observem que els elements que tenen antiimatge són $]-\infty, 4]$



Observem que els elements que tenen antiimatge són $[0, +\infty[$



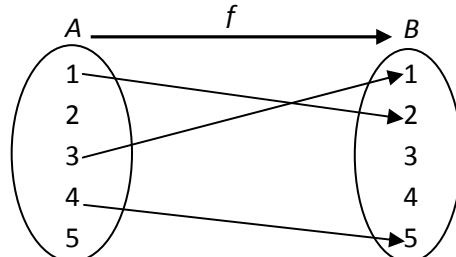
Tipus de correspondències

Injectiva

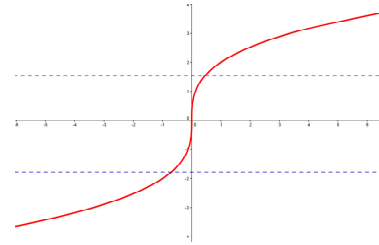
Siga $f: A \rightarrow B$ és una correspondència.

Direm que f és injectiva $\leftrightarrow$ Si $f(a) = f(b) \rightarrow a = b \leftrightarrow a \neq b \rightarrow f(a) \neq f(b)$

En una correspondència injectiva si un element té antiimatge, aquesta és única.

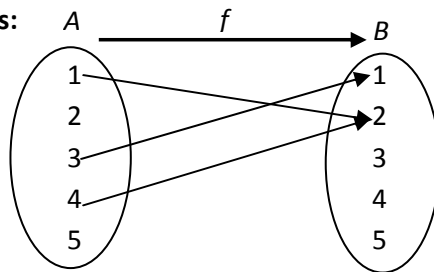


No hi ha cap element que tinga més d'una antiimatge. Elements diferents tenen imatges diferents.

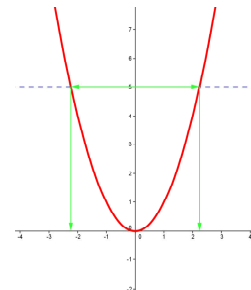


En dibuixar qualsevol horitzontal, sols talem la gràfica una vegada com a màxim.

No injectives:



Hi ha un element que té més d'una antiimatge. El 2 té dues antiimatges.



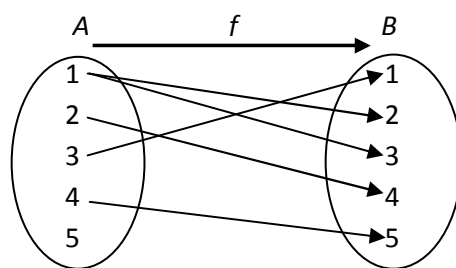
Hem dibuixat una horitzontal que talla la gràfica més d'una vegada. El 5 té dues antiimatges.

Exhaustiva (Epinjectiva ó sobrejectiva)

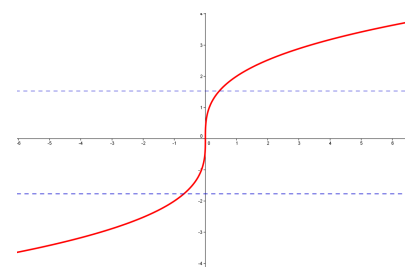
Siga $f: A \rightarrow B$ una correspondència, f és exhaustiva $\leftrightarrow$ Si $b \in B \rightarrow \exists a \in A / f(a) = b$

En una correspondència exhaustiva tots els elements del conjunt final tenen antiimatge.

Per tant $R(f) = B$

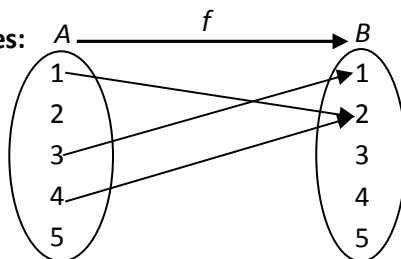


Tots els elements del conjunt final tenen antiimatge. $R(f) = B$

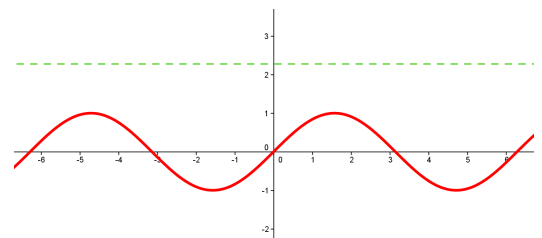


En dibuixar qualsevol horitzontal sempre talem la gràfica.

No exhaustives:



Hi ha elements del conjunt final que no tenen antiimatge.

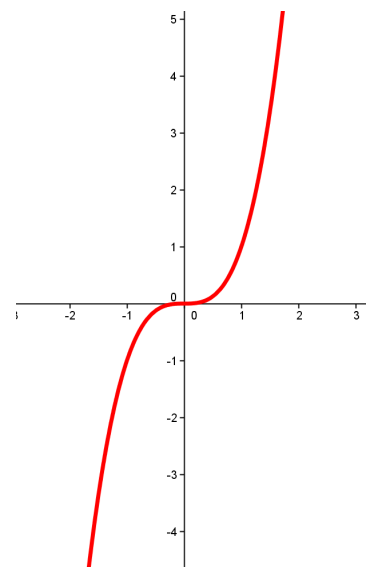
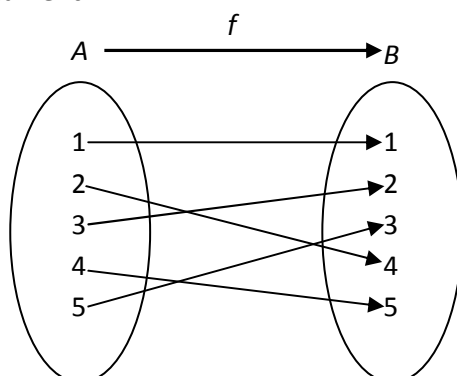


Hem dibuixat una horitzontal que no talla la gràfica. No tots els elements tenen antiimatge.

Bijectiva

Siga $f: A \rightarrow B$ una correspondència. Direm que f és bijectiva $\leftrightarrow f$ és injectiva i f és exhaustiva.

Gràficament:

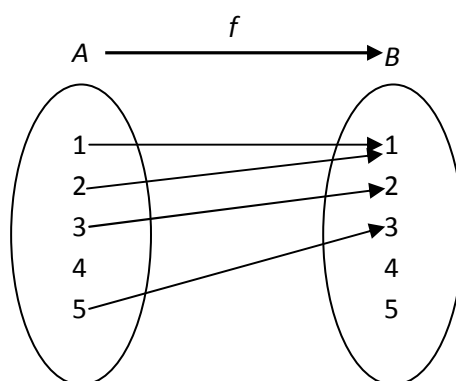


Aplicació

Siga $f: A \rightarrow B$ una correspondència.

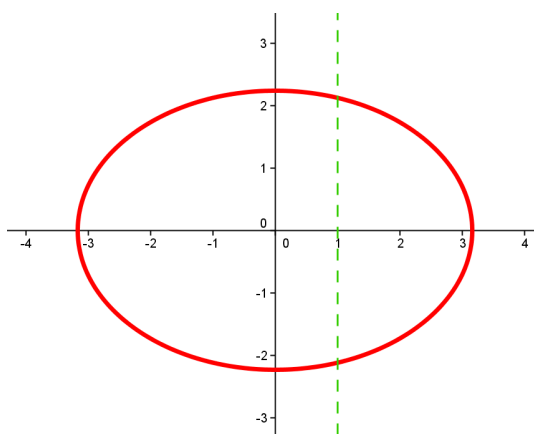
Direm que f és aplicació $\leftrightarrow$ Els elements d' A que tenen imatge, tenen imatge única.

Aplicació:

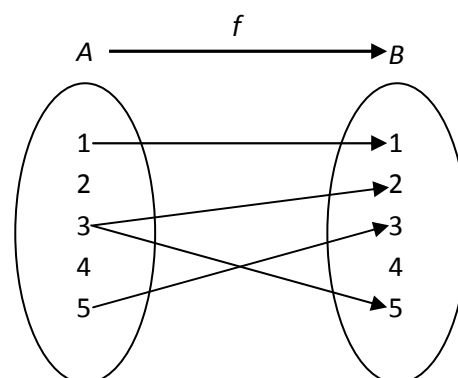


No aplicació:

L'1 té dues imatges, per tant no és aplicació.



El 3 té dues imatges, per tant no és aplicació.



Funció

Una *funció* és una aplicació entre dos conjunts de números. Segons els conjunts de definició, les funcions reben diferents noms. Per exemple:

$f: N \rightarrow R$	funció real(R) de variable natural(N)
$f: Z \rightarrow Q$	funció racional(Q) de variable entera(Z)
$f: R \rightarrow R$	funció real(R) de variable real(R)

Normalment treballarem amb funcions reals de variable real. Li direm **funció real** $f: R \rightarrow R$

Expressió matemàtica d'una funció

Recordem que les funcions es presentaven de vegades mitjançant la seua expressió matemàtica:

Rebut del mòbil en funció del temps	$C = 15 + 8 \cdot t$
Àrea del quadrat en funció del costat	$A = c^2$
Volum de l'esfera en funció del radi	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Com vegem, en cada expressió hi ha dues variables: una que ens dóna el valor a calcular (variable dependent) en funció d'una altra variable (variable independent).

Variable independent La variable ($x, t, r, \dots$) que representa els valors del conjunt inicial de la funció.

Variable dependent La variable ($y, z, w, \dots$) que es calcula mitjançant la funció f . Els valors que aconsegueix estan al conjunt final de la funció.

Si coneixem l'expressió matemàtica de la funció escriurem:

$f: R \rightarrow R$ on $f(x) = \text{expressió en funció de la variable independent}(x)$. **Exemples:**

$$f: R \rightarrow R \text{ on } f(t) = 15 + 8t \quad f: R \rightarrow R \text{ on } f(c) = c^2 \quad f: R \rightarrow R \text{ on } f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Conèixer l'expressió matemàtica d'una funció, ens ajuda a estudiar les seues propietats i també a representar-la per fer-nos una millor idea del seu comportament. Com calcular l'expressió matemàtica d'una funció és un treball que requereix bastant entrenament. En aquests primers cursos treballarem amb funcions molt senzilles, de les que serem capaços de descobrir la seua expressió matemàtica. **Exemples:**

Funció que ens dóna el doble d'un número.

$$f: R \rightarrow R \quad f(x) = 2x$$

Funció que ens dóna el quadrat d'un número.

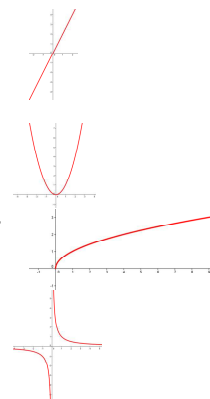
$$f: R \rightarrow R \quad f(x) = x^2$$

Funció que ens dóna l'arrel quadrada d'un número.

$$f: R \rightarrow R \quad f(x) = \sqrt{x}$$

Funció que ens dóna l'invers d'un número.

$$f: R \rightarrow R \quad f(x) = \frac{1}{x}$$



Podem considerar les funcions com màquines que treballen amb números. En els exemples anteriors hi ha màquines (funcions) que no poden treballar amb qualsevol número. (Pensem que els cotxes no poden utilitzar qualsevol tipus de combustible.)

Cal per tant, a més de conèixer l'expressió matemàtica de la funció, conèixer altres elements molt importants.

Imatge d'un número mitjançant una funció

Si coneixem l'expressió matemàtica de la funció, podem calcular la imatge d'un element substituint el seu valor en la variable independent (x). El valor que pren la funció serà la imatge de l'element.

Exemples: Si $f(x) = 2x - 3 \rightarrow$ la imatge del 2 és: $f(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$

Si $f(x) = -x^2 - 3x \rightarrow$ la imatge del -1 és: $f(-1) = -(-1)^2 - 3 \cdot 1 = -4$

Hi ha funcions que no poden operar amb certs números. Cal saber en quin conjunt de números pot treballar una funció, el domini de la funció.

Antiimatge d'un número mitjançant una funció

Si coneixem l'expressió matemàtica de la funció, podem calcular l'antiimatge d'un element substituint el seu valor en la variable dependent ($y = f(x)$). El valor(s) que tinga la variable independent (x) serà l'antiimatge de l'element.

Exemples: Si $f(x) = 2x - 3 \rightarrow$ l'antiimatge del 2 és: $f(x) = 2$

$$2x - 3 = 2 \rightarrow 2x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{2} \quad \text{Antiimatge del 2} = \left\{ \frac{5}{2} \right\}$$

Si $f(x) = -x^2 - 3x \rightarrow$ l'antiimatge del 0 és: $f(x) = 0$

$$-x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(-x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases} \quad \text{Antiimatge del 0} = \{0, -3\}$$

Tall amb els eixos

Siga $f: R \rightarrow R$ una funció, per calcular:

Punts de tall eix Y ($x = 0$)

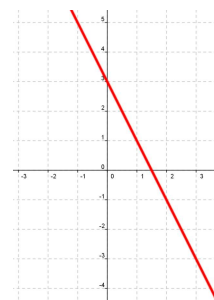
El punt de tall amb l'eix Y s'aconsegueix calculant la imatge del 0. Sols hi ha un punt de tall amb l'eix Y.

Exemple:

$$f(x) = -2x + 3$$

$$f(0) = 3$$

Punt de tall eix Y (0,3)



Punts de tall eix X ($y = 0$)

El punt de tall amb l'eix X s'aconsegueix calculant l'antiimatge del 0.

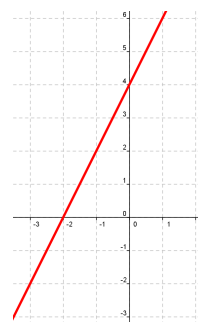
Exemple:

$$f(x) = 2x + 4$$

$$f(x) = 0 \rightarrow 2x + 4 = 0$$

$$2x = -4 \rightarrow x = -2$$

Punt de tall eix X (-2,0)



Domini d'una funció

Recordem:

Si $f: R \rightarrow R$ és una correspondència, $D(f) = \{x \in R / \exists f(x)\}$

És el conjunt format per tots els elements del conjunt inicial que tenen imatge.

Exemples:

$$f: R \rightarrow R \text{ on } f(x) = 2x \rightarrow D(f) = R$$

$$f: R \rightarrow R \text{ on } f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow D(f) = R - \{0\} = R^*$$

$$f: R \rightarrow R \text{ on } f(x) = \sqrt{x} \rightarrow D(f) = [0, +\infty[$$

$$f: R \rightarrow R \text{ on } f(x) = \frac{3x+1}{x-2} \rightarrow D(f) = R - \{2\}$$

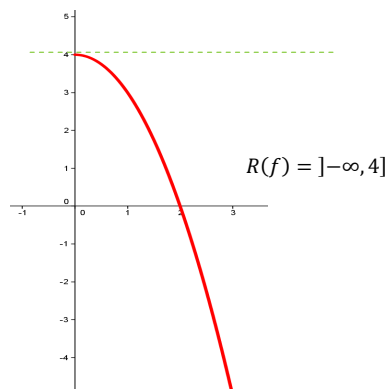
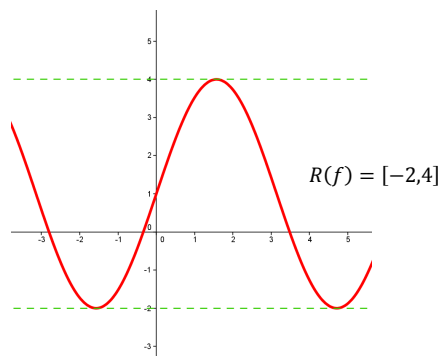
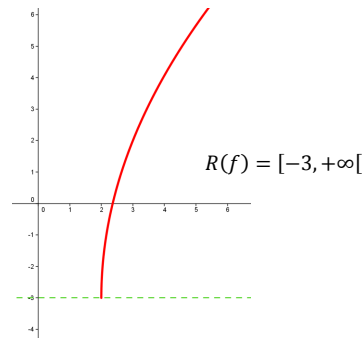
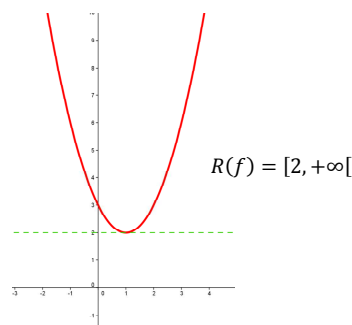
$$f: R \rightarrow R \text{ on } f(x) = \sqrt{x+3} \rightarrow D(f) = [-3, +\infty[$$

Observem que per calcular el domini d'una funció ens fixem on presenta problemes. No pot anul·lar-se el denominador, l'argument de l'arrel quadrada ha de ser major o igual a zero, etc. Si no presenta cap problema en cap punt, $D(f) = R$.

Recorregut d'una funció

Per calcular el recorregut d'una funció, ens basarem en la seua gràfica.

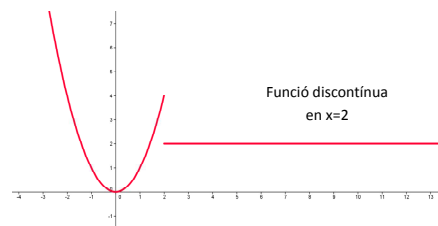
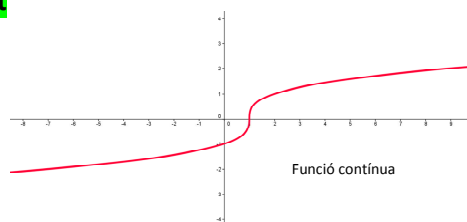
Exemples:



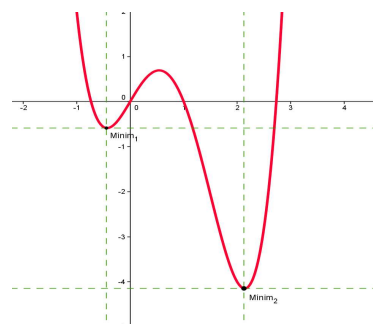
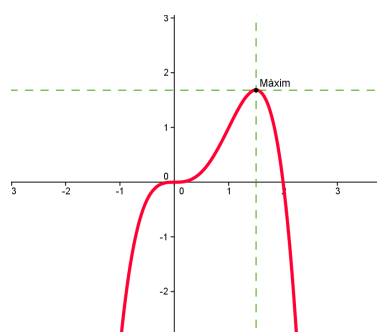
Per calcular el recorregut d'una funció observarem el mínim i el màxim valor que pot prendre (rectes horitzontals).

Característiques d'una funció a partir de la seua gràfica

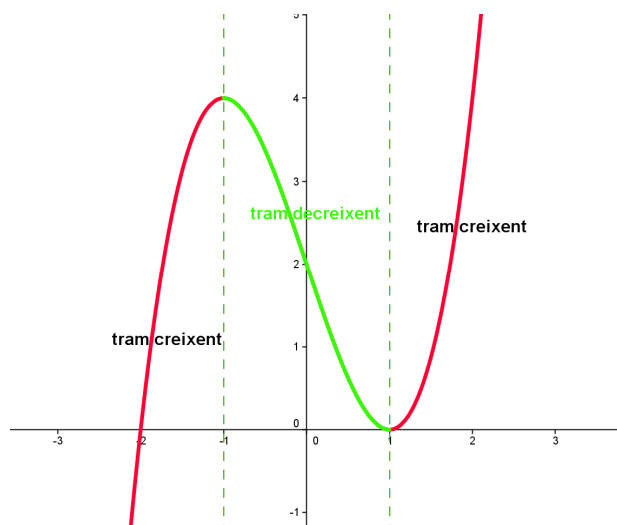
Continuïtat



Màxims i mínims relatius

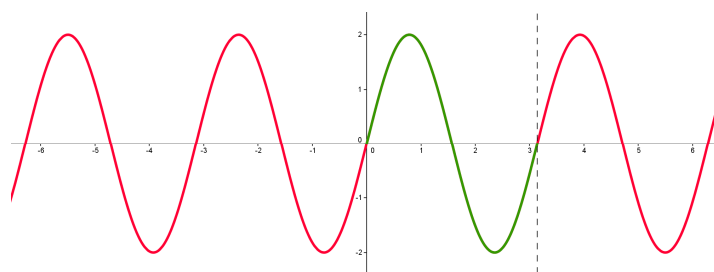


Monotonia. Creixement i decreixement



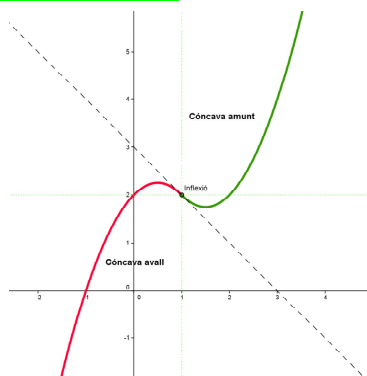
$f(x)$ és creixent en $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$
 $f(x)$ és decreixent en $]-1, 1[$

Periodicitat



$f(x)$ és periòdica de període π

Curvatura. Punt d'inflexió



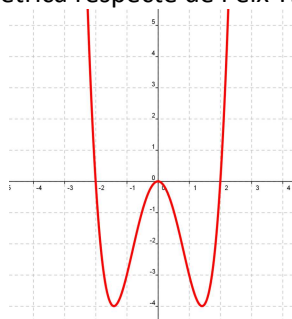
$f(x)$ és convexa en $]-\infty, 1[$

$f(x)$ és còncava en $]1, +\infty[$

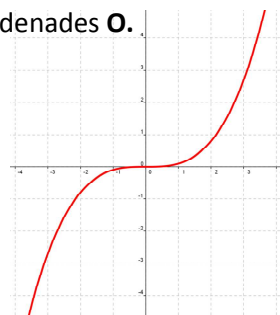
$f(x)$ té un punt d'inflexió en $(1,2)$

Simetries

Funció parell és la funció que és simètrica respecte de l'eix Y.



Funció imparell és la funció que és simètrica respecte de l'origen de coordenades **O**.

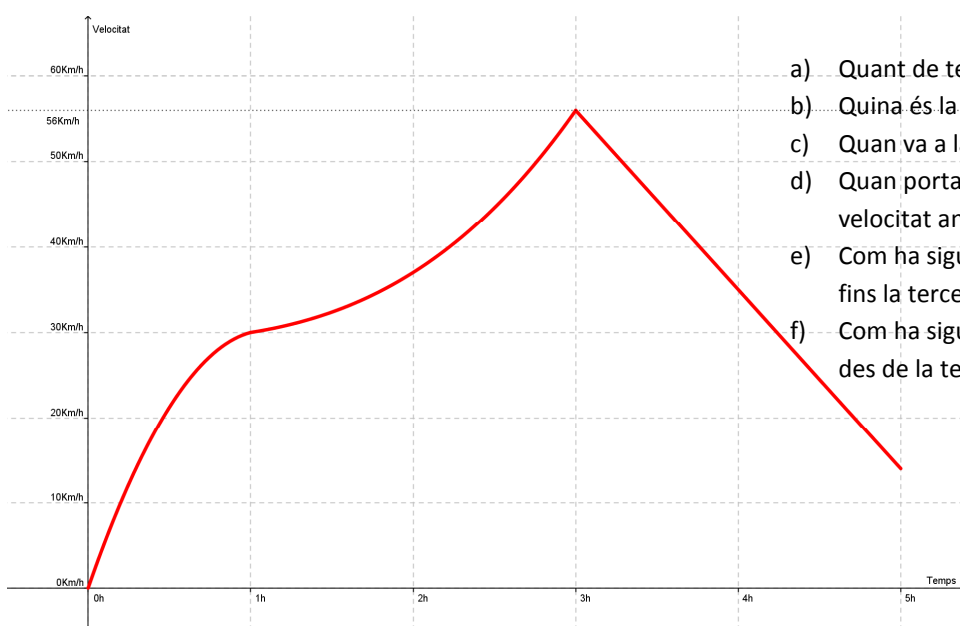


Atenció! Hi ha funcions que no presenten cap tipus de simetria.

Interpretació de la gràfica d'una funció

A partir de la gràfica d'una funció, podem estudiar les propietats i també el comportament del fenomen que vol descriure.

Exemple: Gràfica que mostra la velocitat a la qual roda un ciclista en un dels seus entrenaments.



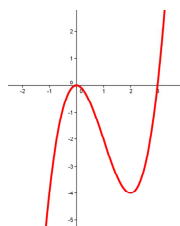
- Quant de temps ha estat entrenant?
- Quina és la velocitat màxima assolida?
- Quan va a la velocitat màxima?
- Quan portava 1 hora entrenant, a quina velocitat anava?
- Com ha sigut l'esforç del ciclista fins la tercera hora?
- Com ha sigut l'esforç del ciclista des de la tercera hora fins a la cinquena?

Σ sumatori; $\cap$ intersecció; $\cup$ unió; $\emptyset$ conjunt buit; $\in$ pertany; $\forall$ per a tot; $\rightarrow$ aleshores; $\subseteq$ inclòs en
 $\prod$ Producte; / de forma que; $\leftrightarrow$ si i sols si; $\exists$ existeix; $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$; **Funcions**

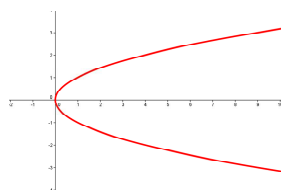
Exercicis proposats

1.- De les següents correspondències, raoneu quines són aplicacions:

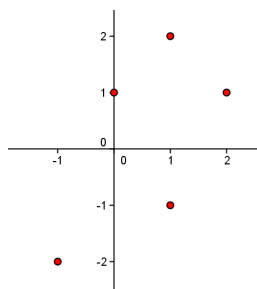
a



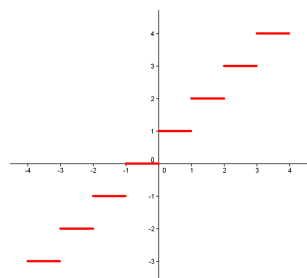
b



c

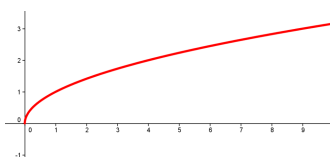


d

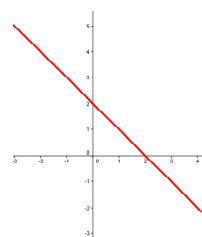


2.- Classifiqueu les següents correspondències (injectiva, exhaustiva, bijectiva):

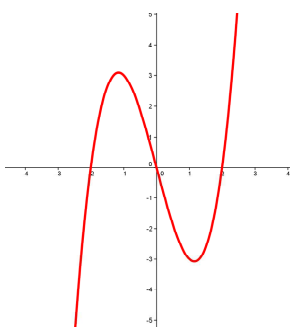
a



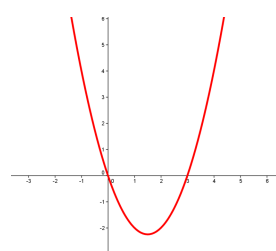
b



c

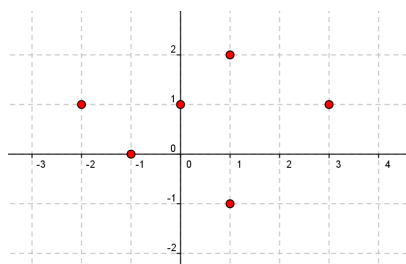


d

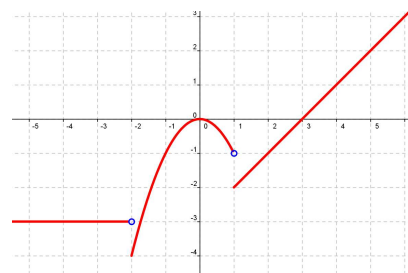


3.- De les gràfiques de les següents correspondències, calculeu: $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$ i $f(3)$.

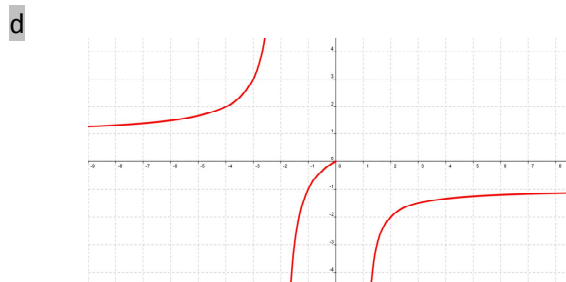
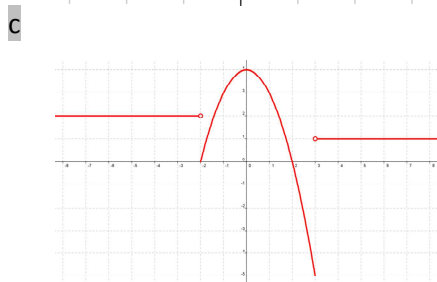
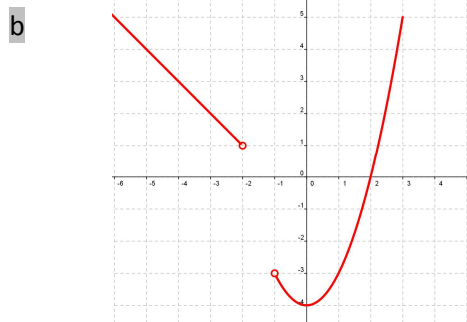
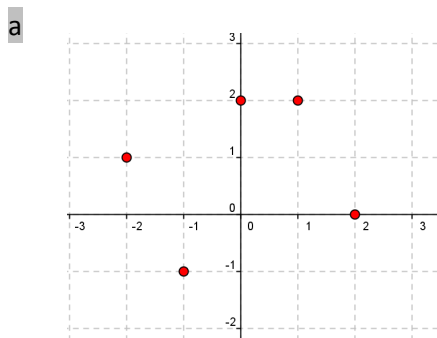
a



b



4.- Calculeu el domini i el recorregut de les següents correspondències:



5.- Per a cada funció, calculeu la imatge de 2, -3, 1, 0 i -1:

a $f(x) = -2x + 1$

b $f(x) = x^2 + 3$

c $f(x) = -x^3 + x$

d $f(x) = 3$

6.- Donada la funció $f(x) = 2x - 3$, feu una taula de valors i representeu la seua gràfica (recta).

7.- Quina seria l'expressió matemàtica de la funció que a cada número li fa correspondre la seua meitat?

8.- Quina seria l'expressió matemàtica de la funció que a cada número li fa correspondre el seu quadrat més 5 unitats?

9.- Calculeu el domini de les següents funcions:

a $f(x) = 5x + 1$

b $f(x) = \frac{2x+5}{x-3}$

c $f(x) = \sqrt{x-2}$

d $f(x) = \frac{3}{x^2-2}$

10.- Calculeu la imatge de 3, -1, 4, 0 en les funcions:

a $f(x) = -2x + 3$

b $f(x) = \frac{2x+5}{x-3}$

c $f(x) = \sqrt{x-3}$

d $f(x) = \frac{3}{x^2-2}$

11.- Calculeu l'antiimatge dels números que s'indiquen en cada funció:

a $f(x) = 5x + 1$ antiimatge del 6

b $f(x) = \frac{2x+5}{x-3}$ antiimatge de l'1

c $f(x) = \sqrt{x-2}$ antiimatge del 2

d $f(x) = \frac{3}{x^2-4}$ antiimatge del 3

12.- Calculeu els punts de tall amb els eixos de les funcions:

a $f(x) = -2x + 3$

b $f(x) = \frac{2x+5}{x-3}$

c $f(x) = \sqrt{x-3}$

d $f(x) = \frac{3}{x^2-2}$

e $f(x) = -2x + 4$

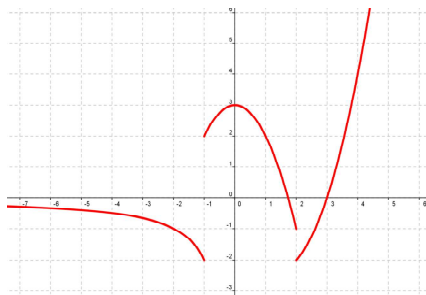
f $f(x) = x^2 - 3x + 2$

g $f(x) = x^2 + 4x$

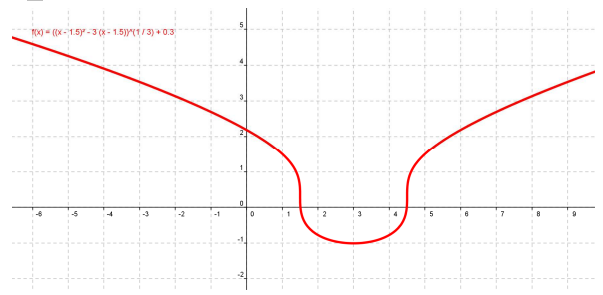
h $f(x) = (x-1) \cdot (2x-3) \cdot (x+4)$

13.- Estudieu (**domini, recorregut, continuïtat, intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims, curvatura i punts d'inflexió, periodicitat...**) de les següents funcions:

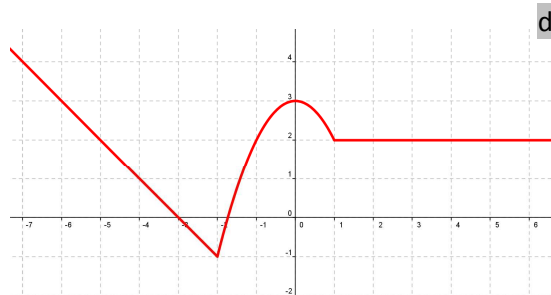
a



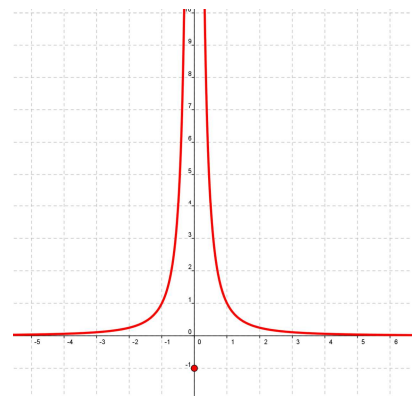
b



c



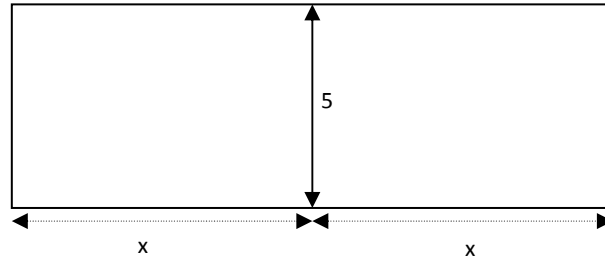
d



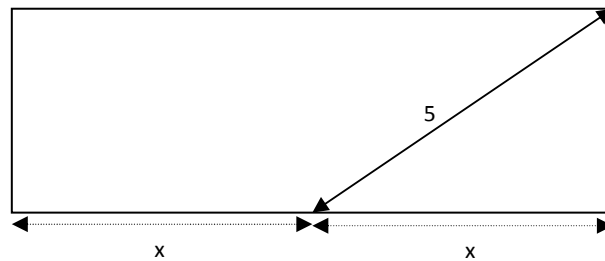
14.- Si x representa el nombre d'articles fabricats per una empresa, calculeu la funció que dona els ingressos que té, sabent que cada article el ven per 2€.

15.- Si t representa els minuts que dura el trajecte en un taxi, calculeu la funció que ens dona el que hem de pagar, sabent que la baixada de bandera val 3€ i per cada minut paguem 50 cts.

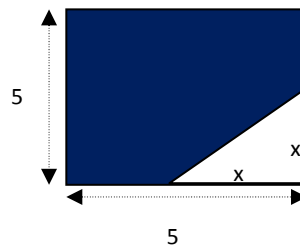
16.- Quina funció ens dona, en funció de la variable x , l'àrea del rectangle?



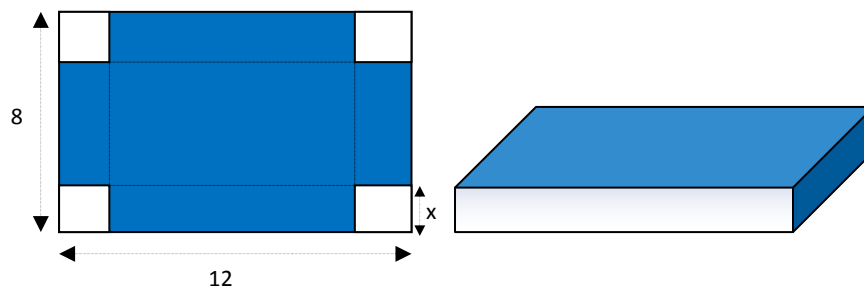
17.- Quina funció ens dona, en funció de la variable x , l'àrea del rectangle?



18.- Quina funció ens dona, en funció de la variable x , l'àrea de la regió de color?



19.- Quina funció ens dona, en funció de la variable x (costat del quadrat a tallar), el volum de la caixa que podem formar.



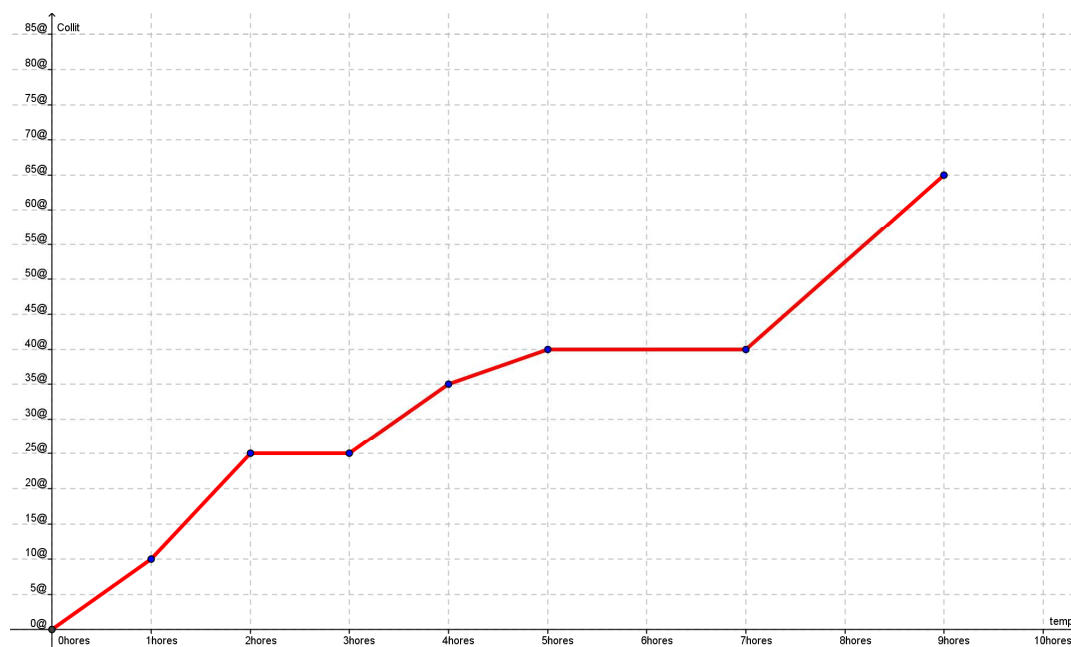
20.- La biblioteca municipal proposa tres formes de préstecs als seus lectors:

1. Abonament de 4€ anuals i 2€ per llibre prestat. $f(x)$
2. Abonament de 20€ anuals i 1€ per llibre prestat. $g(x)$
3. Abonament de 55€ anuals i 30cts de € per llibre prestat. $h(x)$

Es demana:

- a. Determineu segons l'opció de préstecs, el preu per x llibres prestats. Calculeu l'expressió matemàtica de $f(x)$, $g(x)$ i $h(x)$.
- b. Representeu les funcions $f(x)$, $g(x)$ i $h(x)$.
- c. Determineu gràficament la forma més avantajosa segons els llibres prestats.

21.- A la vista de la gràfica que representa les arroves(@) que ha collit un jornalier en les diferents hores del dia, contesteu a les preguntes:



- 1.- Quantes hores ha estat realment collint?
- 2.- Quant de temps ha estat esmorzant?
- 3.- Quant de temps ha estat dinant?
- 4.- Si ha començat a les 8h, a quina hora ha acabat?
- 5.- Quantes arroves ha collit en tot el dia?
- 6.- Quantes arroves ha collit en la primera hora de treball? Quantes en la segona?
- 7.- Quin és el moment del dia en el qual es collia a menor velocitat?
- 8.- En quin moment collia a més velocitat?
- 9.- Quantes arroves ha collit en un hora, quan anava a la màxima velocitat?