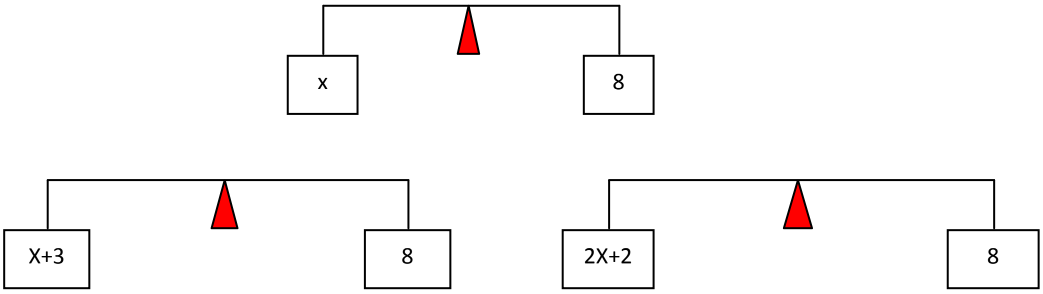
Equacions

Avenc de la donzella
Barx

Equacions

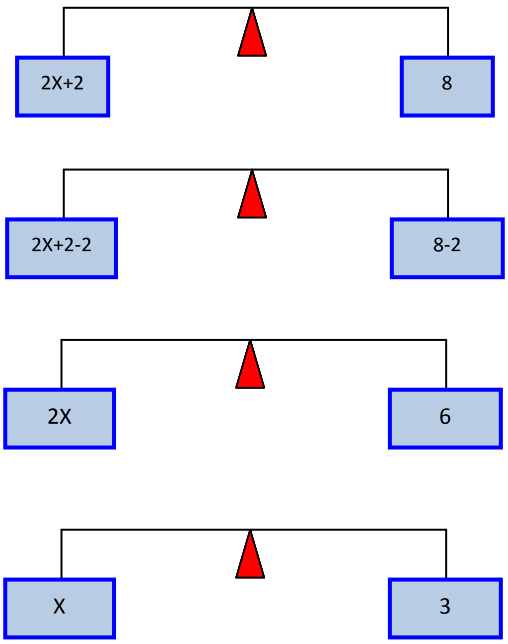
Incògnita

Observeu les següents bàscules, com vegeu hi ha un valor (x) que volem calcular de forma que la bàscula quede anivellada. Aquest valor rep el nom d'*incògnita*.



La noció d'equació està relacionada amb els gràfics anteriors. **La bàscula ha d'estar sempre anivellada. Podrem posar i llevar pes de cada plat, però, sempre hem de mantenir-la anivellada.**

Observeu les operacions que fem:



El valor de la incògnita o variable és $x = 3$

Equació

Una *equació* és una expressió de la forma $\boldsymbol{f(x)=0}$ on $f(x)$ depén de la variable $\boldsymbol{x}$.

També pot ser $\boldsymbol{f(x)=g(x)}$ on $f(x)\ i\ g(x)$ depenen de la variable $\boldsymbol{x}$.

Exemple:

$2x+3=0$ $\qquad$ $2x=6+\sqrt{x}$ $\qquad$ $\frac{2}{x+1}-1=0$

Membres d'una equació

Normalment, una equació ve expressada de la següent forma:

$$\boldsymbol{f(x)=g(x)}$$

Primer membre $\qquad$ **Segon membre**

La primera part de la igualtat $f(x)$, rep el nom de *primer membre* de l'equació.

La segona part de la igualtat $g(x)$, rep el nom de *segon membre* de l'equació.

Equació polinòmica

Una *equació polinòmica* és una expressió de la forma $\boldsymbol{P(x)=0}$ on $P(x)\in\mathcal{P}(x)$.
Si $Grau[P(x)]=1$, l'equació es diu que és de *primer grau*.

Si $Grau[P(x)]=2$, l'equació es diu que és de *segon grau*.

Si $Grau[P(x)]=3$, l'equació es diu que és de *tercer grau*, i així successivament.

Exemple:

$2x+4=0$ $\qquad$ $x^2-3x+2=0$ $\qquad$ $(x^2-3)\cdot(x+1)=0$

També $\boldsymbol{P(x)=Q(x)}$ on $P(x),Q(x)\in\mathcal{P}(x)$ és una equació, equivalent a $\boldsymbol{P(x)-Q(x)=0}$

Solució d'una equació

Direm que $\boldsymbol{x=a}$ és *solució* de l'equació $\boldsymbol{f(x)=0}\leftrightarrow\boldsymbol{f(a)=0}$

Exemple:

$2x+4=0$ $\qquad$ solució: $x=-2$

$x^2-3x+2=0$ $\qquad$ solució: $x=1; x=2$

$(x-3)\cdot(x+1)=0$ $\qquad$ solució: $x=3; x=-1$

Tipus d'equacions segons la solució

Incompatible. No té solució.

Exemple:

$2x + 3 = 2x - 2$ No té solució.

Compatible. Té solució. Pot ser:

Indeterminada. Té infinites solucions. També es diu ***identitat***.

Exemple:

$x + 5 = x + 5$ Qualsevol número real és solució.

Determinada. Té solució única.

Exemple:

$x + 4 = 9$ Solució: $x = 5$

Equacions equivalents

Dues equacions són *equivalents* sii les solucions d'una també ho són de l'altra.

Exemple:

$2x - 3 = x + 1$

$2x - x = 1 + 3$ solució: $x = 4$

$x - 7 = -x + 1$

$x + x = 7 + 1$ solució: $x = 4$

Criteris d'equivalència

Si als dos membres d'una equació es suma o resta el mateix número, l'equació obtinguda és equivalent a la primera.

Si els dos membres d'una equació es multipliquen o divideixen pel mateix número, diferent de zero, l'equació obtinguda és equivalent a la primera.

Càlcul de la solució d'una equació

La noció de la bàscula anivellada i els critèris d'equivalència ens porten a què, per canviar de membre qualsevol terme:

Si està sumant passa restant.

Si està restant passa sumant.

Si està multiplicant passa dividint (no zero).

Si està dividint passa multiplicant.

En general, per passar un terme d'un membre de l'equació a l'altre, s'ha de fer l'operació inversa a la que s'està fent actualment.

Amb aquestes regles, el que aconseguim és una equació equivalent a la primera, en la qual és més fàcil calcular la solució.

Càlcul de la solució d'una equació polinòmica de primer grau

Exemple:

$$3x-4=5x+3; \qquad -4-3=5x-3x; \qquad -7=2x; \qquad x=\frac{-7}{2}$$

Observeu que:

- Després de ; està tota l'equació i no sols un dels membres de l'equació.
- És independent en quin membre de l'equació deixem els termes amb x.
- La lectura pot fer-se de dreta a esquerra, és una equació (igualtat).
- S'acostuma a escriure una equació baix de l'altra a cada pas.

$$3x-4=5x+3$$

$$-4-3=5x-3x$$

$$-7=2x$$

$$x=\frac{-7}{2}$$

Passos per a la RESOLUCIÓ d'una equació de primer grau:

1.- Resoldre parèntesi.
2.- Llevar denominadors (calculant el mcm, si cal).
3.- Passar les x a un mateix membre de l'equació.
4.- Agrupar els termes fins deixar l'equació de la forma $ax=b$.
5.- Aïllar x.

Càlcul de la solució d'una equació polinòmica de segon grau

Equació de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ on $\boldsymbol{a, b, c \in R}$ $\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{a \neq 0.}$

Exemple: $x^2 - 3x + 2 = 0$ $\quad x^2 - 5x = 0$ $\quad x^2 - 3 = 0$

Com vegem, l'equació de segon grau pot presentar-se de diverses formes. La solució de l'equació es calcularà en funció de com ens la donen, incompleta o completa.

Equacions incompletes

Forma $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$ (b=0)

$$ax^2 = -c \qquad x^2 = \frac{-c}{a} \qquad x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

L'equació tindrà solució sii el Signe(a) i el Signe(c) són diferents.

Exemples:

$$4x^2 - 9 = 0$$
$$4x^2 = 9$$
$$x^2 = \frac{9}{4}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}$$

$$2x^2 + 3 = 0$$
$$2x^2 = -3$$
$$x^2 = \frac{-3}{2}$$
$$x = \sqrt{\frac{-3}{2}} \quad \nexists\, solució$$

Forma $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$ (c=0)

$ax^2 + bx = 0$ traient factor comú

$$x(ax + b) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \end{cases}$$

Si el producte de dos factors és 0, necessàriament un dels dos és 0.

$$x = 0$$
$$ax + b = 0; \quad ax = -b; \quad x = \frac{-b}{a}$$

L'equació sempre tindrà dues solucions. Una sempre serà $x = 0$

Exemple:

$$5x^2 - 9x = 0$$
$$x(5x - 9) = 0$$
$$x = 0$$
$$5x - 9 = 0$$
$$5x = 9 \qquad x = \frac{9}{5}$$

Equació completa

Forma $ax^2+bx+c=0$ (completa)

Solució: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Demostració:

$ax^2+bx+c=0$ (multipiquem per 4 a)

$4a^2x^2+4abx+4ac=0$ (transformem en un binomi al quadrat)

$(2ax+b)^2+4ac-b^2=0$

$(2ax+b)^2=b^2-4ac$

$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$

$2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

L'equació tindrà solució sii $b^2-4ac\geq 0$

Discriminant de l'equació de segon grau completa $\Delta= \boldsymbol{b^2-4ac}$

El valor $\Delta= \boldsymbol{b^2-4ac}$ rep el nom de *discriminant* de l'equació. Dependent del seu valor tindrem:

$\Delta=b^2-4ac\geq 0\rightarrow$ l'equació té dues solucions.

$\Delta=b^2-4ac=0\rightarrow$ l'equació té una solució doble.

$\Delta=b^2-4ac<0\rightarrow$ l'equació no té solució.

Exemple 1:

$2x^2-3x+1=0$ $\quad x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{3\pm1}{4}=\begin{cases}1\\ \frac{1}{2}\end{cases}$

Exemple 2:

$x^2-4x+4=0$ $\quad x=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\frac{4\pm0}{2}=\begin{cases}2\\ 2\end{cases}=2$ doble

Exemple 3:

$5x^2-3x+1=0$ $\quad x=\frac{3\pm\sqrt{9-20}}{10}=\frac{3\pm\sqrt{-11}}{10}$ no té solució.

Càlcul de la solució d'una equació polinòmica de grau superior a 2

$\boldsymbol{P(x) = 0}$ on $P(x) \in \mathcal{P}(x)$ i $Grau[P(x)] > 2$

Exemple:

$$2x^3 - 3x - 10 = 0 \qquad x^4 + x^2 - 2 = 0 \qquad 2x^3 - 3x = 0$$

Generalment emprarem la regla de Ruffini, factorització i el que hem estudiat en el càlcul de les solucions de les equacions de primer i segon grau, per calcular les solucions de l'equació.

Exemple: $2x^3 - 9x^2 + 13x - 6 = 0$

	2	-9	13	-6
2		4	-10	6
	2	-5	3	0

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ 1 \end{cases}$$

Les solucions de l'equació són $x = 2$, $x = \frac{3}{2}$, $x = 1$.

Equacions de la forma $(k_1 x - a_1)(k_2 x - a_2) \cdots (k_n x - a_n) = 0$

Exemple:

$$(2x - 1)(x + 2)(4x - 3) = 0$$

Si el producte és 0, cada factor pot ser 0. Així:

$$Solució: \begin{cases} 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \\ x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \\ 4x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Equacions amb fraccions algebraiques

Exemple:

$$\frac{3x-1}{x+2}=\frac{2x}{2x+1}$$

$$(3x-1)(2x+1)=2x(x+2)$$

$$6x^2+x-1=2x^2+4x$$

$$4x^2-3x-1=0$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{8}=\frac{3\pm5}{8}=\begin{cases}1\\-\frac{1}{4}\end{cases}$$ Cal comprovar les solucions.

Exemple:

$$\frac{x-1}{x+2}+\frac{3}{x}=\frac{3x}{2x+1}+2$$

$$\frac{x(x-1)+3(x+2)}{x(x+2)}=\frac{3x+2(2x+1)}{2x+1}$$

$$\frac{x^2+2x+6}{x(x+2)}=\frac{7x+2}{2x+1}$$

$$(x^2+2x+6)(2x+1)=x(x+2)(7x+2)$$

$$2x^3+5x^2+14x+6=7x^3+16x^2+4x$$

$$5x^3+11x^2-10x-6=0$$

$x=1$ és solució de l'equació

	5	11	-10	-6
1		5	16	6
	5	16	6	0

També són solució de l'equació:

$$5x^2+16x+6=0$$

$$x=\frac{-16\pm\sqrt{256-120}}{10}=\frac{-16\pm\sqrt{156}}{10}=\frac{-16\pm2\sqrt{39}}{10}=\begin{cases}\frac{-8+\sqrt{39}}{5}\\\frac{-8-\sqrt{39}}{5}\end{cases}$$

Hi ha altres tipus d'equacions no polinòmiques: amb radicals, exponencials, logarítmiques, trigonomètriques, etc. Aquestes equacions es tractaran en cursos posteriors.

Exercicis proposats

1.- Calculeu les solucions de les següents equacions:

a $2x-3=5x+1$

b $4x-7+2x=5x+3$

c $-12x+7=4x+6$

d $7x+8=23x+9$

e $6x-7+11x=5x+4x+6$

f $6x-7+9x=4x+6-3$

g $3x-4-x+7=5x-x+6$

h $x-4x+3=7x-4-3x$

2.- Calculeu les solucions de les següents equacions:

a $4x-3+3(2x-1)=6x-2(x-2)+1$

b $3x-2(4-x)+2=2x-4(5-2x)+4$

c $x-4(2x-3+x)-3=4x-5(x+2)-3$

d $4x-5+3(2-3x)=2-x$

e $\frac{2x}{3}+3-\frac{5x}{2}=\frac{3x}{2}-\frac{4}{3}+2$

f $\frac{2x}{3}+7-\frac{3}{4}=2x-5+\frac{5}{4}$

g $\frac{3}{5}x-\frac{4}{3}+\frac{7}{2}=\frac{4}{3}x-\frac{7}{4}+1$

h $\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}-1=2x-4+\frac{3}{10}$

3.- Calculeu les solucions de les següents equacions:

a $\frac{2-3x+4}{x-5}=\frac{5}{3}$

b $\frac{4x-5}{3}=\frac{7x-1}{-2}$

c $\frac{2-3x}{5}-\frac{1+2x}{2}=\frac{2x-3}{2}-\frac{4-x}{5}$

d $\frac{2}{3}-\frac{3-4x}{2}+5x=\frac{5}{2}x-\frac{3-4x}{3}$

e $4x-5+\frac{3}{2}(4x-2)+\frac{5}{4}=\frac{7}{2}-\frac{5}{2}x+5$

f $\frac{3}{2}x-11+\frac{6}{5}=\frac{5}{2}+3x-1$

g $\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}+2=\frac{3}{2}x-\frac{4}{5}+6$

h $\frac{3}{2}x-2(5x-4)+3=4-x+\frac{3}{4}$

4.- Calculeu les solucions de les següents equacions:

a $\frac{2}{3}x+5-5x-4(3x-5)=3x-1+\frac{5}{3}$

b $\frac{4}{3}x-2(x-2)=3x-4$

c $\frac{2}{3}x-3(x-1)=4-2x$

d $\frac{x-2}{3}=2(x-2)-3x-4$

e $\frac{x}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$

f $\frac{2x}{3}+\frac{8}{3}=\frac{2}{3}$

g $5-\frac{3x}{2}=3+\frac{x}{2}$

h $\frac{x}{5}+1=x-5+\frac{2}{5}$

5.- Calculeu les solucions de les següents equacions:

a $\frac{x}{2}+2x=1-x$

b $\frac{7}{3}-x=2x+\frac{x}{2}$

c $\frac{x}{3}+x=2-x$

d $x+\frac{1}{4}=\frac{2x}{3}$

e $\frac{5x}{8}+x=\frac{21}{4}-x$

f $4-\frac{x+1}{4}=x+\frac{3x}{12}$

g $7x-\frac{5}{4}x=\frac{3}{14}-\frac{x}{2}-2$

h $\frac{x}{3}-\frac{1}{2}=\frac{x}{4}-\frac{2}{13}$

6.- Calculeu les solucions de les següents equacions:

a $\frac{x}{3}-\frac{x}{2}+10=\frac{5x}{6}-3$

b $\frac{x}{3}-\frac{5}{6}=\frac{x}{2}+\frac{x}{4}-\frac{25}{12}$

c $2x-\frac{3x}{5}+\frac{17}{10}=\frac{4x}{5}-\frac{x}{4}$

d $\frac{x}{4}-\frac{5x}{8}=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}+x$

e $\frac{2}{3}(3-x)+1=5x$

f $\frac{1}{4}(3-x)+1=5x$

g $6-\frac{1}{3}(2x+1)=\frac{-7x}{2}$

h $3\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{5}\right)-\frac{2x}{9}=2\left(\frac{1}{2}-\frac{2x}{3}\right)-1$

7.- Calculeu les solucions de les següents equacions:

a $7x+\frac{5}{4}=\frac{21}{8}x-\left(x+\frac{2}{7}\right)$

b $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{4}+4\right)=\frac{1}{3}(x-7)-\frac{1}{2}$

c $5x-3\left(2x+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)-2$

d $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{4}+4\right)=\frac{1}{3}(x-7)$

8.- Calculeu les solucions de les següents equacions:

a $2x^2-3x=0$

b $7x^2-28=0$

c $5x^2+10=0$

d $3x^2+4x=0$

e $-2x^2+8=0$

f $5x^2+5x=0$

g $x^2-4x=-3$

h $\dfrac{2x-1}{3}=\dfrac{5}{x+3}$

9.- Calculeu les solucions de les següents equacions:

a $x^2-5x+6=0$

b $(x-2)\cdot(x-1)=0$

c $3x^2-2x=5$

d $(2x-1)\cdot(3x-6)=0$

e $\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{3x-4}{2x}$

f $-3x^2-4x+7=0$

g $(x+2)^2+2=-3x$

h $(x-2)\cdot(x+2)=12$

10.- Calculeu les solucions de les següents equacions:

a $(2x-1)^2-5=-10x$

b $(x+3)^2+3x=1$

c $\dfrac{2x-3}{x-1}=\dfrac{x+4}{6}$

d $3x^2-2x+1=0$

e $3x-2=x^2$

f $(2x-2)\cdot(x-3)=0$

g $\dfrac{2x-5}{1-x}=\dfrac{x}{2}$

h $-4x^2-3x+1=0$

11.- Calculeu les solucions de les següents equacions:

a $x^2=3x-2$

b $x-2=-3x^2+28$

c $(3x-1)\cdot(2x+1)=6$

d $5x-2=-3-(2x+1)^2$

e $x^2-4x+4=0$

f $3x-2=x^2-2$

g $(-3x-1)\cdot(2x+1)\cdot(x-3)\cdot x=0$

h $(3x^2-1)\cdot(2-x)=0$

12.- Calculeu les solucions de les següents equacions:

a $\frac{2x-3}{4}+x=\frac{x-2}{2}+\frac{5}{4}$

b $2x+5-3\cdot(x+2)=4\cdot(-1+x)+8$

c $3x^2-7x=4x-10$

d $\frac{2-x}{4x-1}=\frac{-2x}{x-7}$

e $(2x-1)^2-(x+2)\cdot(x-2)=5$

f $(2x-5)\cdot(x-4)=0$

g $5x^2+10x=0$

h $3x^2-48=0$

13.- Calculeu les solucions de les següents equacions:

a $x^2-3x+2=0$

b $x^2+4x^2=0$

c $2x-4+5x-1=3x+4-x+6$

d $3x^2=7x$

e $\frac{2x-3}{4}-\frac{1-x}{2}=\frac{x+1}{4}-\frac{3}{4}$

f $2x^2-7x+6=0$

g $(2x+1)^2+(x-1)\cdot(x+2)=-1$

h $\frac{2x-1}{x+3}=\frac{x-2}{-2x}$

14.- Calculeu la relació entre els coeficients $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ i $\boldsymbol{d}$ perquè les següents equacions $\boldsymbol{ax+b=0}$ i $\boldsymbol{cx+d=0}$ tinguen les mateixes solucions.

15.- Calculeu el valor de $\boldsymbol{a}$ perquè l'equació $\boldsymbol{ax^2+2x+1=0}$ tinga:

a) una única solució
b) dues solucions
c) cap solució.

16.- Calculeu el valor de $\boldsymbol{c}$ perquè l'equació $\boldsymbol{x^2-2x+c=0}$ tinga:

a) una única solució
b) dues solucions
c) cap solució.

17.- Calculeu el valor de $\boldsymbol{k}$ perquè $x=-2$ siga una solució de l'equació $2x^2+3kx-2=0$.

18.- Calculeu la solució de les següents equacions:

a $x\cdot(x-3)\cdot(x+2)=0$

b $(x-1)^2\cdot x^2\cdot(2x+3)=0$

c $3x\cdot(3-x)\cdot(4x-2)=0$

d $(3x+1)\cdot(2x-6)\cdot 5=0$

19.- Inventeu una equació de primer grau la solució de la qual siga:

a $x = 1$ b $x = -2$ c $x = 0$ d $x = \frac{2}{3}$ e $x = -\frac{1}{2}$

20.- Inventeu una equació de segon grau les solucions de la qual siguen:

a $x = 2$ i $x = 3$ b $x = 0$ i $x = -3$ c $x = 2$ doble

d $x = -1$ i $x = -4$ e $x = -2$ i $x = 2$ f $x = -1$ doble

21.- Són equivalents les equacions $x^2 - 3x = 0$ i $2x - 6 = 0$? Justifiqueu la resposta.

22.- Espresseu en funció de $\boldsymbol{k}$ la solució de l'equació $2kx - k = 2x + k$. Per quin valor de $\boldsymbol{k}$ l'equació no té solució?

23.- Quantes solucions té l'equació $0 \cdot x = 3$? Justifiqueu la resposta.

24.- Quantes solucions té l'equació $0 \cdot x = 0$? Justifiqueu la resposta.

25.- Busqueu per tempteig una solució de les següents equacions:

a $\sqrt{x+2} = 4$ b $3^x = 27$ c $\sqrt{2x+1} = 3$ d $2^{x-3} = 32$