MATEMÁTICAS

4ºB de ESO

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-055911

Fecha y hora de registro: 2014-10-30 16:19:59.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

Textos Marea Verde

TEXTOS MAREA VERDE

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

No se permite un uso comercial de la obra original ni de las posibles obras derivadas, la distribución de las cuales se debe hacer con una licencia igual a la que regula la obra original.

Reconocimiento (Attribution): En cualquier explotación de la obra autorizada por la licencia hará falta reconocer la autoría.

No Comercial (Non commercial): La explotación de la obra queda limitada a usos no comerciales.

Compartir Igual (Share alike): La explotación autorizada incluye la creación de obras derivadas siempre que mantengan la misma licencia al ser divulgadas

Reconocimiento – NoComercial – SinObraDerivada (by-nc-nd): No se permite un uso comercial de la obra original ni la generación de obras derivadas.

I.S.B.N. - 13: 978-84-697-0275-8

I.S.B.N. - 10: 84-697-0275-0

Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.

4ºB ESO
Capítulo 1:
Números reales

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-031749

Fecha y hora de registro: 2014-02-07 13:38:38.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Paco Moya

Revisores: Javier Rodrigo y Sergio Hernández

Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

Números reales. 4ºB de ESO

Índice

1. NÚMEROS RACIONALES E IRRACIONALES

1.1. EXPRESIONES DECIMALES FINITAS O PERIÓDICAS

1.2. FORMA DE FRACCIÓN DE UNA EXPRESIÓN DECIMAL

1.3. $\sqrt{2}$ NO ES UN NÚMERO ES RACIONAL:

1.4. DISTINTOS TIPOS DE NÚMEROS

2. APROXIMACIONES Y ERRORES.

2.1. ERROR ABSOLUTO

2.2. ERROR RELATIVO

3. REPRESENTACIÓN EN LA RECTA REAL DE LOS NÚMEROS REALES:

3.1. DENSIDAD DE LOS NÚMEROS REALES

3.2. REPRESENTACIÓN EN LA RECTA REAL DE LOS NÚMEROS REALES:

I. REPRESENTACIÓN EN LA RECTA DE LOS NÚMEROS RACIONALES

II.- REPRESENTACIÓN EN LA RECTA DE LAS RAÍCES CUADRADAS:

3.3. UN EJEMPLO DE INTERÉS MATEMÁTICO, NATURAL Y ARTÍSTICO: EL NÚMERO DE ORO

3.4. HERRAMIENTA INFORMÁTICA PARA ESTUDIAR LA PROPORCIÓN ÁUREA

4. INTERVALOS, SEMIRRECTAS Y ENTORNOS:

4.1. INTERVALOS

4.2. SEMIRRECTAS

4.3. ENTORNOS

Resumen

Ya conoces los números naturales, los números enteros y los números racionales. En este capítulo vamos a estudiar los números reales que están formados por los números racionales y los irracionales. Por tanto, con algunos números reales irracionales ya te habías encontrado, con $\sqrt{2}$, con π…

Pero hay muchos, muchos más. Hay muchos más números irracionales que racionales. Y te preguntarás, ¿cómo puede decir eso si son infinitos? Resulta que hay infinitos más grandes que otros. Al infinito de los números naturales se le denomina “infinito numerable”. Resulta que el de los números enteros y de los números racionales también es “infinito numerable”, pero el de los números reales ya no es numerable, es mucho mayor, se le denomina “la potencia del continuo”. Una de sus propiedades más importantes es su relación con los puntos de una recta, por lo que aprenderemos a representarlos en la recta “real” en la que no dejan “agujeros”.

Como los números irracionales tienen infinitas cifras decimales no periódicas es complicado utilizarlos tal cual, así que aprenderemos a aproximarlos y calcular el error que por eso, cometemos.

Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

Números reales. 4ºB de ESO

1. NÚMEROS RACIONALES E IRRACIONALES

Te recordamos los distintos tipos de números que ya conoces:

Naturales ➔ $\mathbf{N}$ = {0, 1, 2, 3, …}

Son los números que se usan para contar y ordenar. El 0 puede incluirse o no, dependerá de tu profesor.

Enteros ➔ $\mathbf{Z}$ = {…, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, …}

Son los números naturales y sus opuestos. No tienen parte decimal, de ahí su nombre. Incluyen a los Naturales.

A los números que se pueden expresar en forma de cociente de dos números enteros se les denomina números **racionales** y se les representa por la letra $\mathbf{Q}$.

Por tanto

Racionales ➔ $\mathbf{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$

Los números racionales incluyen a los enteros.

También contienen a los números que tienen expresión decimal exacta (0,12345) y a los que tienen expresión decimal periódica (7,01252525…) como veremos.

Notación:

$\in$ significa "pertenece"
$\cup$ significa "Unión"
$\subset$ significa "incluido"
$\cap$ significa "Intersección"

1.1. Expresiones decimales finitas o periódicas

Recuerda que:

- Si el denominador (de la fracción irreducible) sólo tiene como factores primos potencias de 2 ó 5 la expresión decimal es exacta.

Ejemplo:

Así por ejemplo $\frac{1}{2^3 \cdot 5} = 5^2 \cdot 10^{-3} = 0,025;\ ya\ que\ \frac{10^3}{2^3 \cdot 5} = 5^2$, y esto es general ya que siempre habrá una potencia de 10 que sea múltiplo del denominador si éste sólo contiene doses o cincos. Fíjate que el número de decimales es el mayor de los exponentes de 2 y 5.

- Si el denominador (de la fracción irreducible) tiene algún factor primo que no sea 2 ni 5 la fracción tendrá una expresión decimal periódica.
- Si suponemos un número *n* con factores primos distintos de 2 y 5, entonces

$$\frac{1}{n} = m \cdot 10^{-a} \Rightarrow \frac{10^a}{n} = m\ ,$$

pero el denominador no puede dar un cociente exacto al dividir al numerador, puesto que 10 sólo tiene los factores 2 y 5. Ello nos demuestra que la expresión decimal no puede ser exacta.

Veamos que es periódica:

Ejemplo:

Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

Con un ejemplo nos bastará, si dividimos 1 entre 23 obtenemos un primer resto que es 10, luego otro que es 8 y seguimos, pero, ¿se repetirá alguna vez el resto y por lo tanto las cifras del cociente?, la repuesta es que sí, seguro que sí, los restos son siempre menores que el divisor, en este caso del 1 al 22, si yo obtengo 22 restos distintos (como es el caso) al sacar uno más ¡tiene que repetirse!, es el llamado *Principio del Palomar*. Y a partir de ahí los valores del cociente se repiten.

Por lo tanto la expresión decimal es periódica y el número de cifras del periodo es como máximo una unidad inferior al denominador (no siempre ocurre esto pero 1/23 tiene un periodo de 22 cifras, 1/97 lo tiene de 96 cifras, sin embargo 1/37 tiene un periodo de sólo 3 cifras, una pista: 37 es divisor de 999).

Todas las fracciones tienen expresión decimal exacta o periódica.

Actividades propuestas

1. Mentalmente decide cuáles de las siguientes fracciones tiene una expresión decimal exacta y cuáles la tienen periódica

a) 2/3 b) 3/5 c) 7/30 d) 6/25 e) 7/8 f) 9/11

2. Calcula la expresión decimal de las fracciones del ejercicio anterior y comprueba si tu deducción era correcta

3. Calcula la expresión decimal de las fracciones siguientes:

a) 1/3 b) 1/9 c) 7/80 d) 2/125 e) 49/400 36/11

1.2. Forma de fracción de una expresión decimal

Recuerda el procedimiento:

Actividades resueltas

Cálculo de la forma de fracción de a) 0,175; b) 1,7252525…

a) Expresión decimal exacta: $0{,}175 = \frac{175}{1000} = \frac{7}{40}$, se divide entre 10 elevado al número de cifras decimales.

b) Expresión decimal periódica:

Tenemos que conseguir 2 números con la misma parte decimal para que al restar desaparezcan los decimales.

$$N = 1{,}7252525\ldots$$
$$1000N = 1725{,}2525\ldots$$
$$10N = 17{,}2525\ldots$$
$$Si\ restamos: 990N = 1708 \Rightarrow N = \frac{1708}{990} = \frac{854}{495}$$

Primero nos llevamos la coma al final del primer periodo (fíjate que el anteperiodo y el periodo juntos tienen 3 cifras), después al principio del primer periodo (el anteperiodo tiene 1 cifra). Tenemos dos

Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

expresiones con la misma parte decimal por lo que al restar, esos decimales se van, sólo queda despejar N.

Toda expresión decimal exacta o periódica se puede poner como fracción.

Actividades propuestas

4. Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales exactas y redúcelas, comprueba con la calculadora que está bien:

a) 7,92835; b) 291,291835; c) 0,23

5. Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales periódicas, redúcelas y comprueba que está bien:

a) 2,353535….. b) 87,2365656565…. c) 0,9999….. d) 26,5735735735…..

1.3. $\sqrt{2}$ no es un número es racional:

Vamos a utilizar un método de demostración muy habitual en Matemáticas que se llama "**Reducción al Absurdo**" que consiste en:

> Si sólo hay 2 posibilidades para algo que llamamos A y noA y queremos demostrar A, empezamos suponiendo que se cumple noA, hacemos algún razonamiento donde se llega a una contradicción (Absurdo) y desechamos noA, teniendo que cumplirse por tanto A.

Más fácil de entender: supón que sólo hay 2 posibles caminos para llegar a un sitio. Tiras por uno de ellos y descubres que no llega a ninguna parte, pues tiene que ser el otro.

Vamos a ello:

Queremos demostrar A:

$\sqrt{2}$ **no** puede ponerse como fracción.

Suponemos cierto su contrario noA:

$\sqrt{2}$ **si** puede ponerse como fracción.

Entonces $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, **fracción irreducible**. Elevamos al cuadrado en los 2 miembros

$$\Rightarrow 2=\frac{a^2}{b^2}\Rightarrow a^2=2b^2$$

luego a^2 es par y por lo tanto *a* también lo es (el cuadrado de un número impar es siempre impar), ponemos *a* = 2*k* y sustituimos:

$$(2k)^2=2b^2\Rightarrow 4k^2=2b^2\Rightarrow b^2=2k^2$$

luego b^2 es par y por tanto *b* también lo será.

En definitiva: *a* y *b* son los 2 números pares. CONTRADICCIÓN, absurdo, hemos dicho que la fracción era irreducible, luego *a* y *b* no pueden ser ambos múltiplos de 2.

Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

Por tanto rechazamos noA y nos quedamos con que A es cierta.

Este procedimiento sirve igual para **todas las raíces no exactas**, de cualquier índice.

Pero no vale para todos los irracionales, para demostrar que π es un número irracional hay que estudiar mucho. Fue demostrado a finales del siglo XVIII por Lambert. Hasta ese momento todavía se seguían calculando decimales para encontrar un periodo que no tiene.

1.4. Distintos tipos de números

Todos estos números como $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots \pi \ldots$ junto con los números racionales forman el conjunto de los números reales. Y a los números reales que no son números racionales se les llama números irracionales. Por tanto

Irracionales ➔ $\mathbf{I} = \Re - \mathbf{Q}$.

Son números irracionales los números que no son racionales y por tanto aquellos números que no pueden ponerse como fracción de números enteros. Hay más de lo que podría parecer (de hecho hay más que racionales ¡!), son todos aquellos que tienen una expresión decimal que no es exacta ni periódica, es decir, **infinitas cifras decimales y sin periodo.** Ejemplos: 17,6766766676… que me lo acabo de inventar o 0,1234567891011… que se lo inventó Carmichael. Invéntate uno, busca en Internet y si no lo encuentras, pues es tuyo (por ahora ☺)

Reales ➔ $\Re = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$.

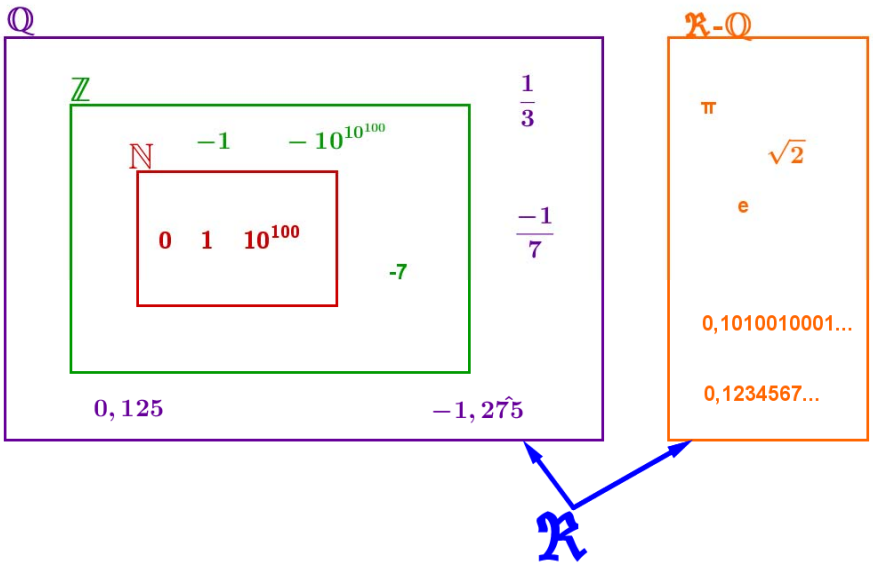
Es la unión de los números racionales y de los irracionales.

Tenemos por tanto que: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \Re$.

$\mathbf{I} \subset \Re$

¿Son estos todos los números?

No, los reales forman parte de un conjunto más amplio que es el de los Números Complejos $\mathbf{C}$ (en 1º de bachillerato se ven, en la opción de Ciencias).



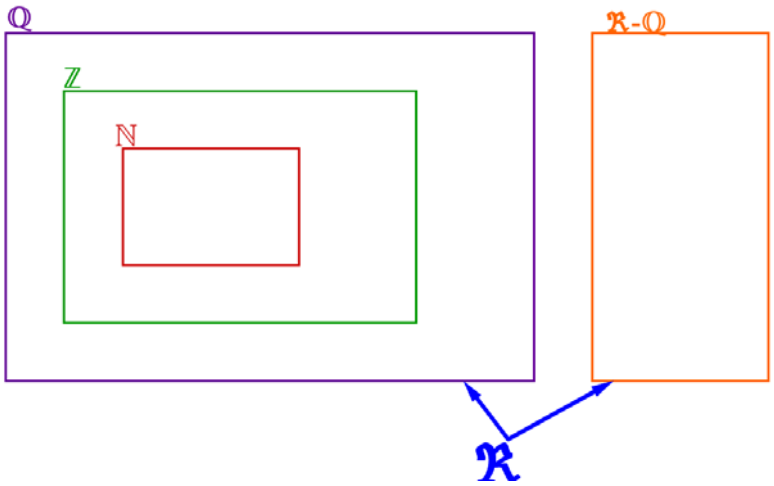
Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

6. Copia en tu cuaderno la tabla adjunta y señala con una X a qué conjuntos pertenecen los siguientes números:

Número	N	Z	Q	I	ℜ
-2,01					
$\sqrt[3]{-4}$					
0,121212…					
$\sqrt[3]{-1000}$					
1,223334…					
$\sqrt{-4}$					
$\frac{1}{2}$					

7. Copia en tu cuaderno el esquema siguiente y mete los números del ejercicio anterior en su lugar:



8. ¿Puedes demostrar que 4,99999… = 5?, ¿cuánto vale 2,5999…?

9. Demuestra que $\sqrt[3]{7}$ es irracional.

10. ¿Cuántas cifras puede tener como máximo el periodo de $\frac{1}{47}$?

11. ¿Cuántos decimales tiene $\frac{1}{2^7 \cdot 5^4}$?, ¿te atreves a dar la razón?

12. Haz la división 999 999:7 y después haz 1:7. ¿Será casualidad?

13. Ahora divide 999 entre 37 y después 1:37, ¿es casualidad?

Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

2. APROXIMACIONES Y ERRORES.

Aunque en este curso vamos a trabajar en la medida de lo posible con valores exactos ($\sqrt{3}$ no se sustituye por 1,73 ni π por 3,1416) hay veces en que es necesario hacer aproximaciones por motivos prácticos (no le vamos a decir al tendero que nos dé 2π metros de cuerda por la cuenta que nos trae) y a trabajar con números aproximados por entre otros motivos no conocer los valores exactos. Así por ejemplo, si nos pesamos es una báscula y marca 65,4 Kg, ¿cuánto pesamos exactamente? No se puede saber, es imposible, lo máximo que podemos decir es que nuestro peso está entre 65,3 y 65,5 Kg si el error máximo es de 100 g.

2.1. Error Absoluto.

Se define el Error Absoluto (EA) como EA = $|valor\ real - valor\ aproximado|$.

Las barras significan "valor absoluto" que ya sabes que quiere decir que en caso de ser negativo lo convertimos a positivo.

Ejemplo:

Si aproximamos $\pi \approx$ 3,1416 tendremos que el EA = $|\pi - 3{,}1426| = |-0{,}0000073...| \approx 0{,}0000073$ unas 7 millonésimas.

Cota del Error Absoluto:

Aún sin conocer con exactitud el valor exacto, siempre podemos poner una cota (un valor máximo) al error absoluto sólo teniendo en cuenta el orden de aproximación, así, si hemos redondeado en las diezmilésimas (como en el ejemplo) siempre podemos afirmar que el EA $\leq$ 0,00005, es decir, menor o igual que media unidad del valor de la cifra de redondeo o 5 unidades de la siguiente (5 cienmilésimas), que es lo mismo.

Actividades resueltas

- Calcula la cota del error absoluto de:

N $\approx$ 2,1 $\Rightarrow EA \leq 0{,}05$

$N \approx 600 \Rightarrow EA \leq 50$ si suponemos que hemos redondeado en las centenas.

Cuándo no se conoce el valor real, no puede conocerse el valor absoluto, pero si una cota. Si un cronómetro tiene una precisión de décimas de segundo diremos que el EA $\leq$ 0,05 s (media décima ó 5 centésimas)

Si tenemos un número A y la cota del error absoluto es ΔA (se lee incremento de A) suele ponerse $A \pm \Delta A$ sobre todo en las Ciencias Experimentales.

2.2. Error Relativo.

Para comparar errores de distintas magnitudes o números se define el Error Relativo (ER) como:

Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

$$ER = \frac{EA}{|Valor\ real|}$$

que suele multiplicarse por 100 para hablar de % de error relativo.

Si no se conoce el valor real se sustituye por el valor aproximado (la diferencia normalmente es pequeña).

Actividades resueltas

- Si aproximamos raíz de 3 por 1,73, el error relativo cometido es:

$$\sqrt{3} \approx 1,73 \Rightarrow EA \approx 0,0021 \Rightarrow ER = \frac{0,0021}{\sqrt{3}} \approx 0,00121 \Rightarrow 0,121\%$$

Si en la última división ponemos el valor aproximado 1,73 el ER sale aproximadamente 0,121%.

- En las aproximaciones A = 5,2 con EA $\leq 0,05$ y B = 750 con EA ≤ 5, ¿en cuál estamos cometiendo proporcionalmente menor error?

Calculamos los errores relativos:

A➔ ER $\leq \frac{0,05}{5,2} \Rightarrow ER \leq 0,0096 \Rightarrow ER \leq 0,96\%$

B➔ER $\leq \frac{5}{750} \Rightarrow ER \leq 0,0067 \Rightarrow ER \leq 0,67\%$

Es mejor aproximación la de B.

Control del error cometido:

No hay nada más ignorante matemáticamente hablando que utilizar demasiadas cifras decimales trabajando en problemas prácticos. Decir que en una manifestación participaron **aproximadamente** 51226 personas daña el sentido común. También es una gamberrada decir que la estimación de voto para el partido A es del 25,6 % de votos si el error puede ser del 3 % (cosa que no suele mencionarse). Poner como nota de un examen un 6,157 es al menos curioso por su aparente precisión.

Actividades resueltas

- Tenemos dos números **redondeados** a las décimas: A = 2,5 y B = 5,7

Vamos a hacer operaciones con ellos controlando los errores.

Como el EA $\leq$ 0,05 (recuerda: si redondeamos en las décimas el error será inferior o igual a 5 centésimas) tenemos que A puede estar entre 2,45 y 2,55; igualmente B estará entre 5,65 y 5,75.

Suma:

El valor más pequeño será 2,45 + 5,65 = 8,1; el valor máximo será 2,55 + 5,75 = 8,3. Si restamos da 0,2. Si tomamos como valor de la suma 8,2, que es la media, ahora el EA $\leq$ 0,1 (la mitad de la diferencia entre el máximo y el mínimo, fíjate en que 8,2 está a distancia 0,1 de 8,1 y de 8,3) cuando antes era inferior a 0,05. Ya no podemos estar seguros del último decimal. Con la resta pasa lo mismo.

Mínimo 5,65 – 2,55 = 3,1 (¡OjO!, el menor menos el mayor). Máximo 5,75 – 2,45 = 3,3. La media es 3,2 y como(3,3 – 3,1):2 =0,1 el EA $\leq$ 0,1

Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

En cada suma o resta el error absoluto es la suma de los errores absolutos (demuéstralo).

Si hacemos varias sumas y restas, pues aumentará peligrosamente.

Producto:

Valor más pequeño 2,45 · 5,65 = 13,8425; valor máximo 2,55 · 5,75 = 14,6625. La diferencia es ahora de 0,82. Si tomamos como producto 14,25 tenemos que EA ≤ 0,41; se ha multiplicado por 8. Ya no debemos estar seguros ni de las unidades, podría ser 14 o 15.

Si multiplicamos A (con EA = *a*) con B (con EA = *b*) obtenemos un **EA = a · B + b · A**.

Nótese que depende de los valores de A y B.

Nota:

La fórmula **EA = a · B + b · A** sale de hacer (A+a)·(B+b)–(A-a)·(B-b) y dividir entre 2. Compruébala.

Si hacemos (aB+bA)/(AB) obtenemos (a/A)+(b/B), es decir:

Los errores relativos se suman al multiplicar dos números.

División:

El valor más pequeño posible se obtiene de dividir el más pequeño entre el más grande:

5,65 : 2,55 = 2,22;

el más grande al revés (el más grande entre el más pequeño):

5,75 : 2,45 = 2,35.

Por tanto EA ≤ 0,065.

Ahora sale aproximadamente EA = $\frac{a \cdot B + b \cdot A}{B^2}$, que si B es grande hace que salga reducido, pero si B es pequeño nos da una ingrata sorpresa.

Actividades resueltas

- Cálculo del error absoluto y relativo si A = 5; *a* = 0,05; B = 0,5; *b* = 0,05 ➔ A/B = 10 con EA ≤ 1,1, un 11 % de error relativo.

No todo son malas noticias. Si dividimos un número aproximado entre un número exacto el error absoluto disminuye si el divisor es mayor que 1. Por ejemplo $(5 \pm 0,5):20 = 0,25 \pm 0,025$. Sin embargo

Nota:

Esta fórmula sale de hacer $\frac{A+a}{B-b} - \frac{A-a}{B+b}$ y dividir entre 2, despreciamos b^2 frente a B^2. No hay que sabérsela.

el error relativo permanece igual (pruébalo).

Potencia:

Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

Puede rayar la catástrofe. Comprueba que el mínimo sale 158 y el máximo 218. EA $\leq$ 30.

Esto es $(2{,}5\pm0{,}05)^{5{,}7\pm0{,}05}=188\pm30$ lo que representa un 16 % de error relativo.

Curiosamente 188 no es $2{,}5^{5{,}7}$ que vale 185,5 aproximadamente, 188 es la media entre el mínimo y el máximo.

Actividades resueltas

Medimos el radio de una circunferencia con una regla milimetrada y marca 7,0 cm. Queremos calcular el área del círculo. El error máximo en el radio es de 0,05 cm luego puede estar entre 6,95 y 7,05. Si aplicamos la fórmula πr^2 para estos valores obtenemos 151,7 y 156,1, que son los valores mínimo y máximo. La diferencia es 4,4 y su mitad es 2,2 que es la cota de error absoluto. Diremos que

$$A = 153{,}9 \pm 2{,}2\ cm^2.$$

La cota del error relativo $\frac{2{,}2}{153{,}9}\cdot100$ = 1,4 %.

El radio tenía una cota de (0,05 : 7)·100 = 0,71 %, luego hemos perdido precisión.

Si operamos con números aproximados, y peor aún, si lo hacemos en repetidas ocasiones, los errores se van acumulando hasta el punto de poder hacerse intolerables. No seas demasiado preciso si los datos de partida no son fiables.

Actividades propuestas

14. Redondea $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hasta las centésimas y halla los errores absoluto y relativo cometidos.

15. Halla una cota del error absoluto en las siguientes aproximaciones:

a) 2,1
b) 123
c) 123,00
d) 4000 con redondeo en las decenas.

16. Una balanza tiene un error inferior o igual a 50 g en sus medidas. Usamos esa balanza para elaborar 10 paquetes de azúcar de 1 Kg cada uno que son un lote. Determina el peso mínimo y máximo del lote. ¿Cuál es la cota del error absoluto para el lote?

17. Los números A = 5,5 y B =12 han sido redondeados. Halla una cota del error absoluto y del error relativo para:

a) A+B
b) A·B
c) B/A
d) A^B

Nota: Determina lo valores máximo y mínimo de A y B. Después los valores máximos y mínimos de cada apartado (recuerda que la resta y la división funcionan distinto)

18. ¿Cómo medir el grosor de un folio con un error inferior a 0,0001 cm con la ayuda de una regla milimetrada y la de el/la ordenanza del instituto?, hazlo.

Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

3. REPRESENTACIÓN EN LA RECTA REAL DE LOS NÚMEROS REALES:

3.1. Densidad de los Números Reales:

Los números reales son densos, es decir, entre cada dos números reales hay infinitos números en medio.

Eso es fácil de deducir, si *a*, *b* son dos números con *a* < *b* sabemos que $a<\frac{a+b}{2}<b$, es decir, la media está entre los dos números. Como esto podemos hacerlo las veces que queramos, pues de ahí el resultado.

Curiosamente los racionales son también densos, así como los irracionales.

Actividades propuestas

19. Calcula 3 números reales que estén entre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y 1.

20. Halla 5 números racionales que estén entre $\sqrt{2}\ y\ 1{,}5$

21. Halla 5 números irracionales que estén entre 3,14 y π

3.2. Representación en la recta real de los números reales:

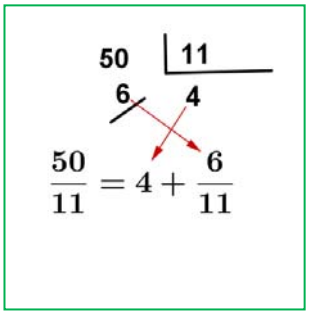
Elegido el origen de coordenadas y el tamaño de la unidad (o lo que es igual, si colocamos el 0 y el 1) todo número real ocupa una posición en la recta numérica y al revés, todo punto de la recta se puede hacer corresponder con un número real.

Veamos como representar de forma exacta **algunos** números reales:

I.- Representación en la recta de los números racionales:

Actividades resueltas

- Si la fracción es **propia** (numerador menor que el denominador, valor menor que 1), por ejemplo $\frac{5}{6}$ bastará con dividir la primera unidad en 6 partes iguales y tomar 5. En caso de ser negativa contaremos hacia la izquierda. (Ver figura)
- Si la fracción es **impropia** (numerador mayor que denominador y por tanto valor mayor que 1) haremos la división entera (sin decimales) quedándonos con el cociente y el resto. Esto nos permite ponerla en forma mixta (suma de un entero y una fracción propia). Así por ejemplo: $\frac{11}{3}=3+\frac{2}{3}$ ya que al dividir 11 entre 3 obtenemos 3 de cociente y 2 de resto. *El cociente es la parte entera y el resto el numerador de la fracción propia*.



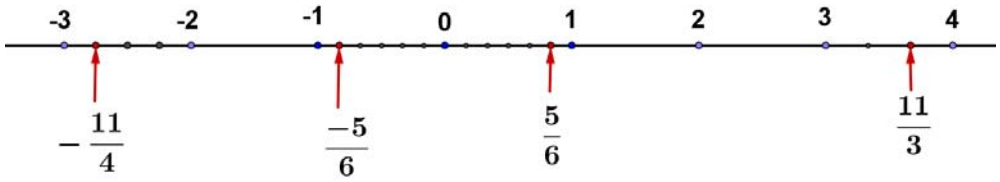
Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

Para representarla sólo nos tenemos que ir donde dice la parte entera (3) y la unidad siguiente (la que va del 3 al 4) la dividimos en 3 partes iguales y tomamos 2.

- Otro ejemplo: $\frac{17}{7}=2+\frac{3}{7}$, pues la división da 2 de cociente y 3 de resto.

Nos vamos al 2, dividimos la unidad siguiente (del 2 al 3) en 7 partes iguales y tomamos 3.

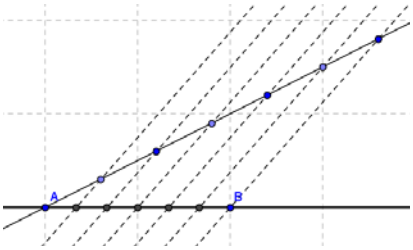
- **En caso de ser negativa**: $-\frac{11}{4}=-\left(2+\frac{3}{4}\right)=-2-\frac{3}{4}$, se hará igual pero contando hacia la izquierda. Nos vamos al –2, la unidad que va del –2 al –3 se divide en 4 partes y tomamos 3 (pero contando del –2 al –3 ¡claro!).



Recuerda que:

Para dividir un segmento en parte iguales:

Para dividir el segmento AB en por ejemplo 6 partes iguales, trazamos por A una línea oblicua cualquiera, abrimos el compás una abertura cualquiera y marcamos 6 puntos en la recta anterior a distancia igual. Unimos el último punto con B y trazamos paralelas que pasen por los puntos intermedios de la recta oblicua. Por el *Teorema de Tales*, el segmento AB ha quedado dividido en 6 partes iguales.



Normalmente no te exigirán que lo hagas tan exacto, lo harás de forma aproximada, pero ten cuidado en que las partes parezcan iguales.

II.- Representación en la recta de las raíces cuadradas:

Para representar raíces cuadradas usamos el Teorema de Pitágoras. Si en un triángulo rectángulo la hipotenusa es *h* y los catetos son *a*, *b* tenemos que $h^2=a^2+b^2 \Rightarrow h=\sqrt{a^2+b^2}$.

Actividades resueltas

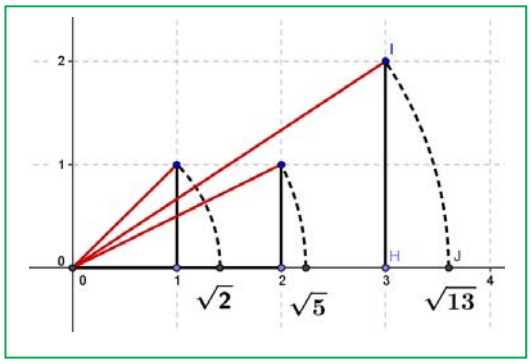
- Representa en la recta $\sqrt{2}$

Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

Si $a = b = 1$ tenemos que $h = \sqrt{2}$. Sólo tenemos que construir un triángulo rectángulo de catetos 1 y 1, su hipotenusa mide $\sqrt{2}$, (la diagonal del cuadrado de lado 1 mide $\sqrt{2}$). Ahora utilizando el compás, llevamos esa distancia al eje X (ver figura).

- Representa en la recta $\sqrt{5}$

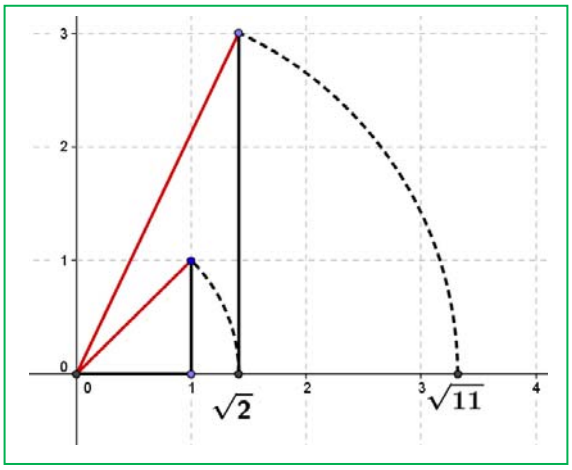
Como $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$ sólo hay que construir un triángulo rectángulo de catetos 2 y 1, y su hipotenusa mide $\sqrt{5}$.



¿Has pillado el truco?, el radicando hay que expresarlo como suma de 2 cuadrados. El triángulo rectángulo tendrá como catetos esos dos números.

- Así, para representar $\sqrt{13}$, expresamos 13 como suma de 2 cuadrados: $13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow \sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 2^2}$ luego en un triángulo rectángulo de lados 3 y 2 la hipotenusa será $\sqrt{13}$.

- ¿Pero, y si el número no puede ponerse como suma de 2 cuadrados?, por ejemplo el 11 (¡siempre complicando las cosas! ☹).



Habrá que hacerlo en 2 pasos. 11 = 2 + 9, ¿hay algún número cuyo cuadrado sea 2?, por supuesto que sí, $\sqrt{2}$. Por tanto $\sqrt{11} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 3^2}$, tenemos que hacer un triángulo rectángulo de catetos $\sqrt{2}$ y 3. Para ello primero se construye $\sqrt{2}$ como antes y se traza una perpendicular de longitud 3 (ver figura).

¿Pueden dibujarse ya así todas las raíces?, no. Hay algunas para las que hay que hacer más pasos ($\sqrt{7}$ por ejemplo requiere 3), pero mejor lo dejamos aquí, ¿no?

Actividades propuestas

22. Representa en la recta numérica los siguientes números:

$$\frac{7}{6}; \frac{-17}{4}; 2,375; -3,\overset{\frown}{6}$$

23. Representa en la recta numérica:

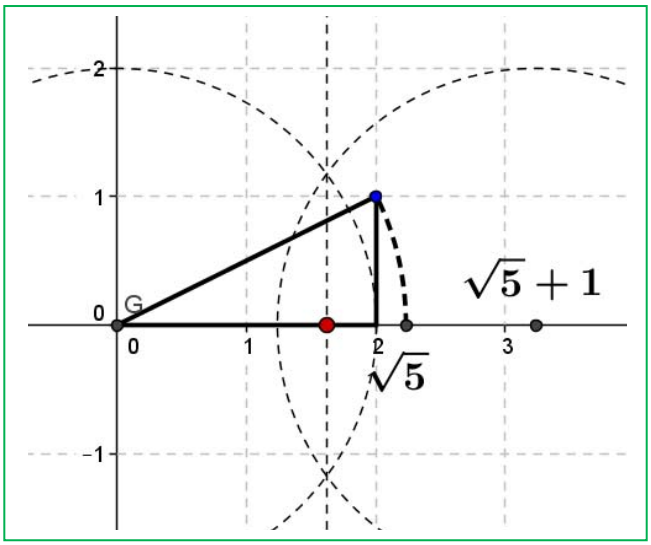
$$\sqrt{20};\ -\sqrt{8};\ \sqrt{14};\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

3.3. Un ejemplo de interés matemático, natural y artístico:

¿Has oído hablar del número de oro?

El Número de Oro (o Razón Áurea o Proporción Armónica o Divina Proporción) es igual a $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$



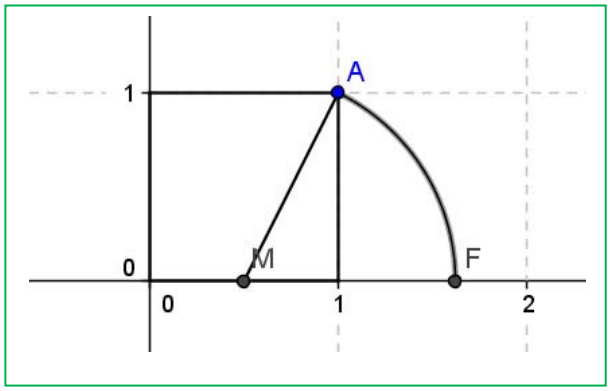
Actividades resueltas

- ¿Cómo lo representamos en la recta?

Sólo hay que construir $\sqrt{5}$ como arriba, sumar 1 (trasladamos 1 unidad con el compás) y dividir entre 2 hallando el punto medio (con la mediatriz), hecho.

- Otra forma distinta:

Construimos un cuadrado de lado 1 (¿un qué?, ¡un lo que quieras!). Hallamos el punto medio del lado inferior (M) y llevamos la distancia MA con el compás al eje horizontal, OF es el número de oro.

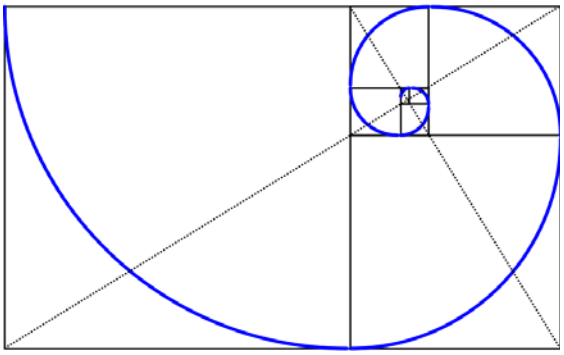


Veamos:

$$MA = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$OF = \frac{1}{2} + MA = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Un ejemplo de la aplicación de la razón Áurea para construir una espiral (imagen de wikipedia).



Espiral Áurea. Wikipedia

Actividades propuestas

24. Busca rectángulo áureo y espiral Áurea.

25. Ya de paso busca la relación entre el Número de Oro y la Sucesión de Fibonacci.

26. Busca en youtube “algo pasa con phi” y me cuentas.

Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

3.4. Herramienta informática para estudiar la proporción áurea

En esta actividad se va a utilizar el programa *Geogebra* para realizar un estudio de la proporción áurea.

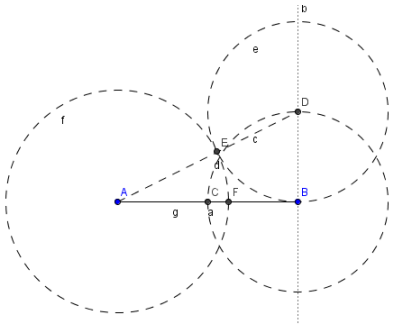
Un segmento está dividido en dos partes que están en proporción áurea si la razón entre la longitud del segmento y la longitud de la parte mayor coincide con la razón entre la longitud de la parte mayor y la de la parte menor.

Actividades resueltas

- *Utiliza Geogebra para dividir un segmento en dos partes que estén en proporció áurea.*

Abre una nueva ventana de *Geogebra,* en el menú **Visualiza** desactiva **Ejes** y **Cuadricula**

- Determina con **Nuevo punto** los puntos *A* y *B* y dibuja el segmento, *a*, que los une.
- Traza un segmento *BD* perpendicular al segmento *AB* en el punto *B*, cuya longitud sea la mitad de *AB,* puedes seguir las siguientes instrucciones:
  - Calcula el **Punto medio o centro** del segmento *AB* y llámalo *C*.
  - Dibuja con **Circunferencia con centro y punto que cruza** la que tiene centro en *B* y pasa por *C*.
  - Traza la **Recta Perpendicular** al segmento *AB* que pase por *B*.
  - Define *D* como el **Punto de Intersección** entre esta recta y la circunferencia.
- Dibuja el segmento *AD* y una circunferencia con centro *D* que pase por *B*. Sea *E* el **Punto de Intersección** de esta circunferencia con el segmento *AD*.



- Con centro en *A* traza la circunferencia que pasa por *E* y determina el **punto de Intersección,** *F*, de esta circunferencia con el segmento *AB*.
- Traza el segmento, *g*, que une los puntos *A* y *F*.
- Comprueba que el punto *F* divide al segmento *AB* en dos partes que están en proporción áurea:
  - Elige en el menú **Opciones**, 5 **Posiciones decimales**.
  - Calcula en la línea de **Entrada** los cocientes *a/g* y *g/(a-g).*

Observa en la **Ventana algebraica** que estos valores coinciden, has calculado un valor aproximado del número de oro, Φ.

- Con la herramienta **Desplaza**, cambia la posición de los puntos iniciales *A* o *B* y comprueba que el cociente entre las longitudes de los segmentos *AF* y *FB* permanece constante.
- Para visualizar mejor la construcción puedes dibujar los elementos auxiliares con trazo discontinuo, eligiendo en el menú contextual, **Propiedades** y **Estilo de trazo**.

Un rectángulo es áureo si sus lados están en proporción áurea.

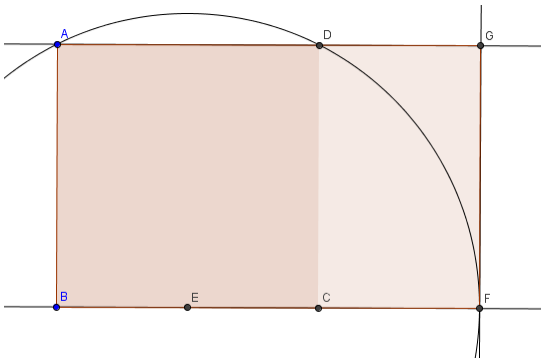
Si a un rectángulo áureo le quitamos (o le añadimos) un cuadrado obtenemos un rectángulo semejante al de partida y por lo tanto también áureo.

Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

- *Utiliza Geogebra para dibujar un rectángulo áureo.*

Abre una nueva ventana de *Geogebra,* en el menú **Visualiza** desactiva **Ejes** y **Cuadricula**

- Define dos puntos *A* y *B* que van a ser los extremos del lado menor del rectángulo y con la herramienta **polígono regular** dibuja, a partir de los puntos *A* y *B*, el cuadrado *ABCD* y oculta los nombres de los lados con la herramienta **Expone/Oculta rótulo**.



- Calcula el **Punto medio**, *E*, del lado *BC*. Con centro en *E* dibuja la **Circunferencia** con centro en *E* que pasa por *A*.
- Traza la recta, *a*, que pasa por *BC* y define como *F* el **Punto de intersección** entre esta recta y la circunferencia.
- Dibuja la **Recta perpendicular** a la recta *a* que pasa por *F*, y la **recta** que pasa por los puntos *A* y *D*, llama *G* al **Punto de intersección** de estas rectas y define con **Polígono** el rectángulo *ABFG*.
- En la ventana algebraica aparecen las longitudes de los lados del rectángulo como *f* y *g*, introduce en la línea de **Entrada** *g / f* y observa en esta ventana que aparece el valor *e* que es una aproximación al número áureo. Elige en el menú **Opciones**, 5 **Posiciones decimales.**
- Dibuja el **segmento** *CF*, en la ventana algebraica aparece su longitud, *h*, introduce en la línea de **Entrada** *f / h*, observa que este cociente coincide con *g / f* y es una aproximación del número áureo.
- Con la herramienta **Desplaza**, cambia la posición de los puntos iniciales *A* o *B* y observa que el cociente entre las longitudes de los lados de los rectángulos es constante.

El rectángulo *ABFG* es áureo ya que el cociente entre la longitud de su lado mayor y la del menor es el número de oro, además el rectángulo *DCFG*, que se obtiene al quitar un cuadrado de lado el menor del rectángulo, es también áureo y por lo tanto semejante al primero.

- *Crea tus propias herramientas con Geogebra. Crea una que dibuje rectángulos áureos.*

Se va a crear una herramienta que a partir de dos puntos *A* y *B* dibuje el rectángulo áureo en el que el segmento *AB* es el lado menor.

- En la figura anterior oculta el nombre de los puntos *C, D, E, F* y *G* con la herramienta **Expone/Oculta rótulo** haciendo clic con el ratón sobre ellos, en el área de trabajo o en la ventana algebraica.
- Activa en el menú **Herramientas** , la opción **Creación de nueva herramienta** y define:

Objetos de salida: el polígono cuadrado, el polígono rectángulo y los puntos *C, D, F*, y *G*.

Objetos de entrada: los dos puntos iniciales *A* y *B*.

Y elige como **nombre de la herramienta** *rectanguloaureo*. Observa que aparece en la barra de herramientas.

En la opción **Manejo de útiles** del menú **Herramientas** graba la herramienta creada como *rectanguloaureo* , que se guarda como *rectanguloaureo.ggt*

Utiliza la herramienta **Desplazamiento de la zona gráfica** para ir a una parte vacía de la pantalla y comprobar que la herramienta *rectanguloaureo* funciona perfectamente.

Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

- *Dibuja una espiral áurea, y crea una herramienta que dibuje espirales áureas.*

Abre una nueva ventana de *Geogebra,* en el menú **Visualiza** desactiva **Ejes** y **Cuadricula** y abre el archivo *rectanguloaureo.ggt* que acabas de crear.

- Define dos puntos *A* y *B* y aplica la herramienta *rectanguloaureo,* se obtiene el rectángulo áureo *ABEF* y el cuadrado *ABCD* con el nombre de los vértices *C, D, E y F* ocultos.
- Utiliza la herramienta **Arco de circunferencia dados centro y dos puntos extremos** para dibujar el arco con centro el punto *C* y que pasa por los puntos *D* y *B*.

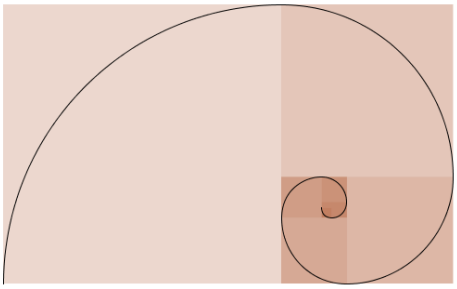
Se va a crear una nueva herramienta que dibuje el rectángulo áureo y el arco.

- Activa en el menú **Herramientas** , la opción **Creación de nueva herramienta** y define:

  Objetos de salida: el cuadrado, el polígono rectángulo, los puntos *C, D, E*, *F* y el arco *c*.

  Objetos de entrada: los dos puntos iniciales *A* y *B*.

Elige como **nombre de la herramienta** *espiralaurea*.

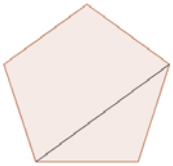


En la opción **Manejo de útiles** del menú **Herramientas** graba la herramienta creada como *espiralaurea,* que se graba como *espiralaurea.ggt.*

- Activa sucesivamente la herramienta anterior, con objeto de dibujar la espiral que resulta de unir con un arco de circunferencia dos vértices opuestos de los cuadrados de forma consecutiva y de mayor a menor.
- Para mejorar el aspecto de la espiral se pueden ocultar los puntos, mejor en la ventana algebraica, con la herramienta **Expone / Oculta objeto**.

Observa que al variar los ángulos en una progresión aritmética de diferencia α=90º, los lados de los cuadrados se modifican según una progresión geométrica de razón: Φ.

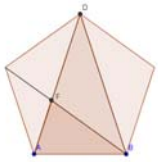
Actividades propuestas



27. Comprueba que la longitud del lado del pentágono regular y la de su diagonal están en proporción áurea.

28. Calcula con Geogebra una aproximación de la razón de semejanza entre un pentágono regular y el que se forma en su interior al dibujar sus diagonales. Determina sin utilizar Geogebra el valor real de la razón de semejanza entre estos dos pentágonos.

29. Comprueba que los triángulos *ABD* y *ABF* de la figura son semejantes y calcula aproximadamente con *Geogebra* su razón de semejanza.



30. Calcula con *Geogebra* el valor aproximado de la razón de semejanza entre un decágono regular y el decágono que se forma al trazar las diagonales de la figura. Determina sin utilizar Geogebra el valor real de la razón de semejanza entre estos dos polígonos

Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

4. INTERVALOS, SEMIRRECTAS Y ENTORNOS:

Como ya sabemos entre dos números reales hay infinitos números. Hay una notación especial para referirse a esos infinitos números que deberás dominar para éste y futuros cursos.

4.1. Intervalos

(Del lat. *intervallum*): **2.** m. Conjunto de los valores que toma una magnitud entre dos límites dados. RAE.

I.- Intervalos Abiertos:

Si nos queremos referir al conjunto de los números que hay entre dos valores pero sin contar los extremos, usaremos un **intervalo abierto**

Ejemplo:

Los números superiores a 2 pero menores que 7 se representan por (2 , 7) y se lee "intervalo abierto de extremos 2 y 7". A él pertenecen infinitos números como 2,001; 3,5; 5; 6,999; … pero no son de este conjunto ni el 2 ni el 7. Eso representan los paréntesis, que entran todos los números de en medio pero no los extremos.

Ejemplo:

Los números positivos menores que 10, se representan por (0 , 10), el intervalo abierto de extremos 0 y 10. Fíjate que 0 no es positivo, por lo que no entra y el 10 no es menor que 10, por lo que tampoco entra.

Nota: No se admite poner (7 , 2), ¡el menor siempre a la izquierda!

También hay que dominar la expresión de estos conjuntos usando desigualdades, prepárate:

$$(2, 7) = \{x \in \Re / \ 2 < x < 7\}.$$

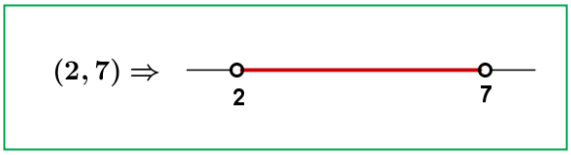
Traducimos: Las llaves se utilizan para dar los elementos de un conjunto, dentro de ellas se enumeran los elementos o se da la propiedad que cumplen todos ellos. Se utiliza la *x* para denotar a un número real, la / significa "tal que" y por último se dice la propiedad que cumplen mediante una doble desigualdad. Así que no te asustes, lo de arriba se lee: *los números reales tal que son mayores que 2 y menores que 7*.

Es necesario dominar este lenguaje matemático puesto que la frase en castellano puede no entenderse en otros países pero te aseguro que eso de las llaves y la / lo entienden todos los estudiantes de matemáticas del mundo (bueno, casi todos).

El otro ejemplo: $(0, 10) = \{x \in \Re / \ 0 < x < 10\}$.

Por último la **representación gráfica**:

Se ponen **puntos sin rellenar** en los extremos y se resalta la zona intermedia.



Pregunta: ¿Cuál es número que está más cerca de 7, sin ser 7?

Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

Piensa que 6,999…=7 y que entre 6,999 y 7 hay "muchos, muchísimos …" números.

*Nota: En algunos textos los intervalos abiertos se representan así]2 , 7[lo cual tienen algunas ventajas como que los estudiantes con confundan el intervalo (3, 4) con el punto del plano (3, 4), que aseguramos que ha ocurrido (pero tú no serás uno de ellos ¿no?), o la fastidiosa necesidad de poner

(2,3; 3,4) porque (2,3,3,4) no lo entendería ni Gauss.

II.- Intervalos Cerrados:

Igual que los abiertos pero ahora **sí** pertenecen los extremos.

Ejemplo:

El intervalo de los números mayores o iguales que –2 pero menores o iguales que 5. Ahora el –2 y el 5 sí entran. Se hace igual pero poniendo corchetes [–2 , 5].

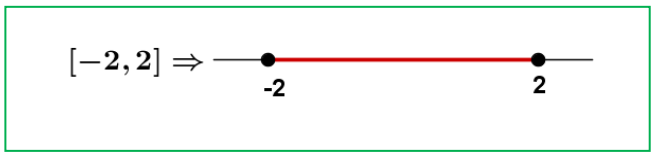
En forma de conjunto se escribe: [–2, 5] = $\{x \in \Re; -2 \le x \le 5\}$. Fíjate que ahora ponemos $\le$ que significa "menor o igual".

Ejemplo:

El intervalo de los números cuyo cuadrado no es superior a 4. Si lo piensas un poco verás que son los números entre el –2 y el 2, ambos incluidos (no superior $\Leftrightarrow$ menor o igual). Por tanto:

[–2, 2] = $\{x \in \Re; -2 \le x \le 2\}$.

La representación gráfica es igual pero poniendo **puntos rellenos**.

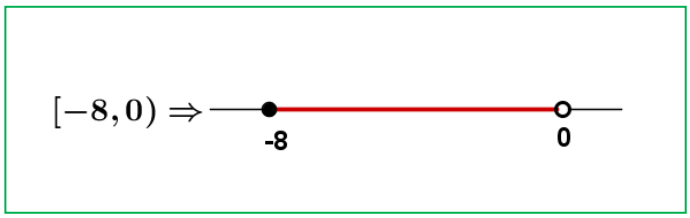


III.- Intervalos Semiabiertos (o semicerrados, a elegir)

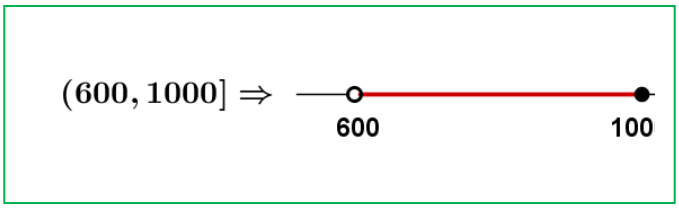
Por supuesto que un intervalo puede tener un extremo abierto y otro cerrado. La notación será la misma.

Ejemplo:

- Temperatura negativa pero no por debajo de -8 ºC:
  $[-8,0) = \{x \in \square \ / -8 \le x < 0\}$



- Números superiores a 600 pero que no excedan de 1000.
  $(600,1000] = \{x \in \square \ / 600 < x \le 1000\}$.



Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

4.2. Semirrectas

Muchas veces el conjunto de interés no está limitado por uno de sus extremos.

Ejemplo:

- Los números positivos: No hay ningún número positivo que sea el mayor. Se recurre entonces al símbolo ∞ y se escribe $(0,+\infty)=\{x/x>0\}$.

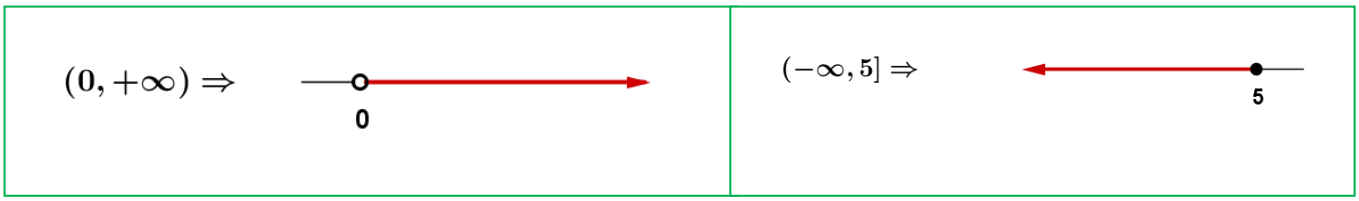
Nótese que es equivalente poner x > 0 que poner 0 < x, se puede poner de ambas formas.

Ejemplo:

- Números no mayores que 5: $(-\infty,5]=\{x/x\leq 5\}$. Aquí el 5 sí entra y por eso lo ponemos cerrado ("no mayor" equivale a "menor o igual")

Ejemplo:

- Solución de x > 7: $(7,+\infty)=\{x/x>7\}$
  Nota: **El extremo no acotado siempre se pone abierto**. **No** queremos ver esto: (7 , $+\infty$]



4.3. Entornos

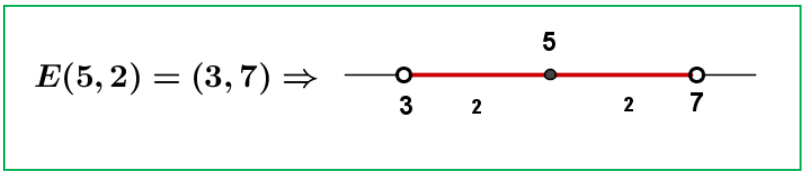
Es una forma especial de poner los intervalos abiertos.

Se define el entorno de centro *a* y radio *r* y se denota E(*a* , *r*) (otra forma usual es $E_r(a)$) como el conjunto de números que están a una **distancia de *a* menor que *r***.

Con un ejemplo lo entiendes mejor:

Ejemplo:

El entorno de centro 5 y radio 2 son los números que están de 5 una distancia menor que 2. Si lo pensamos un poco, serán los números entre 5 – 2 y 5 + 2, es decir, el intervalo (3 , 7). Es como coger el compás y con centro en 5 marcar con abertura 2.



Fíjate que el 5 está en el centro y la distancia del 5 al 7 y al 3 es 2.

E(*a* , *r*) = (*a* – *r* , *a* + *r*)

Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

E(2 , 4) = (2 – 4 , 2 + 4) = (–2 , 6)

Es muy fácil pasar de un entorno a un intervalo. Vamos a hacerlo al revés.

Ejemplo:

Si tengo el intervalo abierto (3 , 10), ¿cómo se pone en forma de entorno?

Hallamos el punto medio $\frac{3+10}{2}=\frac{13}{2}$ = 6,5 que será el centro del entorno. Nos falta hallar el radio:

(10-3):2 = 3,5 es el radio (la mitad del ancho). Por tanto (3 , 10) = E(6,5 ; 3,5)

En general:

El intervalo (*b* , c) es el entorno $E\left(\frac{b+c}{2},\frac{c-b}{2}\right)$.

Ejemplo:

El intervalo (–8, 1) = $E(\frac{-8+1}{2},\frac{1-(-8)}{2})=E(-3,5;4,5)$

También existen los entornos cerrados pero son de uso menos frecuente.

Actividades propuestas

31. Expresa como intervalo o semirrecta, en forma de conjunto (usando desigualdades) y representa gráficamente:

a) Porcentaje superior al 26 %.
b) Edad inferior o igual a 18 años.
c) Números cuyo cubo sea superior a 8.
d) Números positivos cuya parte entera tiene 3 cifras.
e) Temperatura inferior a 25ºC.
f) Números para los que existe su raíz cuadrada (es un número real).
g) Números que estén de 5 a una distancia inferior a 4.

32. Expresa en forma de intervalo los siguientes entornos:

a) E(1 , 5)

b) E(-2, $\frac{8}{3}$)

c) E(-10 ; 0,001)

33. Expresa en forma de entorno los siguientes intervalos:

a) (4 , 7)
b) (-7 , -4)
c) (-3 , 2)

34. ¿Los sueldos superiores a 500 € pero inferiores a 1000 € se pueden poner como intervalo de números reales? *Pista: 600,222333€ ¿puede ser un sueldo?

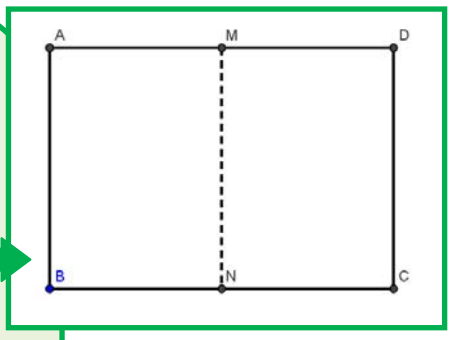
Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Folios y $\sqrt{2}$

Ya sabemos que un cuadrado de lado L tiene una diagonal que vale $\sqrt{2}$ L , veamos algo más:

La imagen representa un folio con la norma DIN 476 que es la más utilizada a nivel mundial.



Esta norma especifica que un folio DIN A0 tiene una superficie de 1 m^2 y que al partirlo por la mitad obtendremos un DIN A1 que debe ser un rectángulo semejante al anterior. Partiendo el A1 en 2 iguales obtenemos el DIN A2 , después el DIN A3 y el DIN A4 que es el más usado. Todos son semejantes a los anteriores.

¿Qué significa ser semejante?

Pues que $\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AM}$, pero AM = AD/2 luego

$$AB^2=\frac{1}{2}AD^2 \Rightarrow AB=\frac{AD}{\sqrt{2}} \Rightarrow AD=\sqrt{2}AB$$

Por lo tanto en los folios DIN 476:

la razón entre el largo y ancho es $\sqrt{2}$.

No queda aquí la cosa, fíjate que al partir el folio en 2 partes iguales el nuevo folio tiene el lado mayor que coincide con el lado menor del original: AB es ahora el lado mayor y antes era el menor, como AB = AD/$\sqrt{2}$ resulta que la razón de semejanza es $\sqrt{2}$. Es decir, para pasar de un folio A0 a otro A1 dividimos sus lados entre $\sqrt{2}$. Lo mismo para los siguientes.

Calculemos las dimensiones:

Para el A0 tenemos que el área es AD · AB = 1m^2

$$\Rightarrow \frac{AD\cdot AD}{\sqrt{2}}=1 \Rightarrow AD^2=\sqrt{2} \Rightarrow AD=\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{2}\approx 1{,}189 \text{ m;}$$

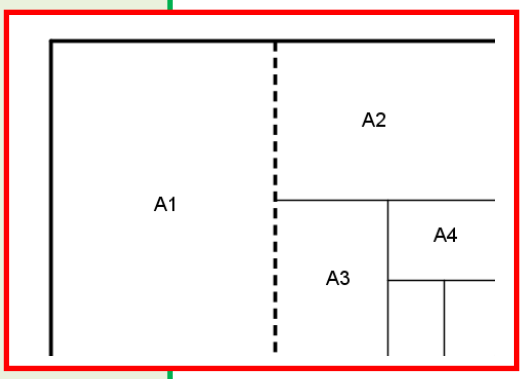
AB = $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}}$ 0,841 m. Para obtener las medidas del A4 dividiremos 4 veces entre $\sqrt{2}$:

Largo = $\frac{\sqrt[4]{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^4}$ ≈ 0,297 m =29,7 cm

Ancho= Largo/$\sqrt{2}$ ≈ 0,210 m = 21,0 cm

Una tabla

	Largo (cm)	Ancho (cm)	Área (cm^2)
A0	118,92	84,09	10000
A1	84,09	59,46	5000
A2	59,46	44,04	2500
A3	42,04	29,83	1250
A4	29,73	21,02	625
A5	21,02	14,87	415,2



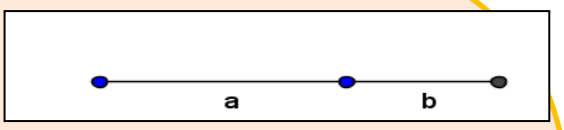
Cuestiones:

1) Comprueba los valores de la tabla anterior (hay al menos dos valores equivocados ☺)
2) ¿Cuántos folios A4 caben en un folio A0?
3) ¿Cuáles son las dimensiones del A6?, ¿y del A7?

Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

El número de oro

Dividimos un segmento en dos partes de forma que si dividimos la longitud del segmento total entre la parte mayor debe de dar lo mismo que al dividir la parte mayor entre la parte menor.
Tenemos que $(a+b)/a = a/b$.



El número de Oro (o Razón Aúrea) llamado Φ (fi) es precisamente el valor de esa proporción, así:

$$\Phi = \frac{a}{b};\ \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi \Rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618034$$

Ya tenemos dos curiosidades:

1

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$$

2

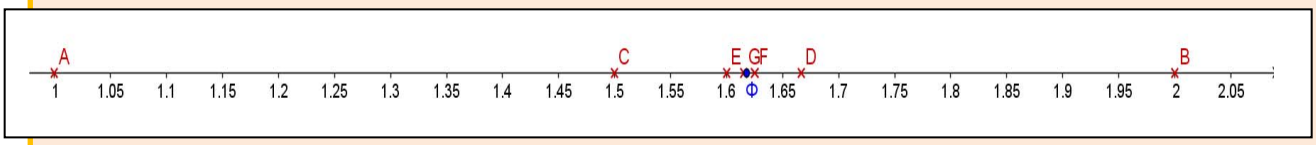
$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi^3 = 2\Phi + 1$$

$$\Phi^4 = 3\Phi + 2$$

$$\ldots \Phi^n = F_n \Phi + F_{n-1}$$

Donde F_n es el *n*-ésimo Número de Fibonacci. Estos números son 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 … donde cada término a partir del tercero se obtiene sumando los dos anteriores.
Más relaciones entre el Número de Oro y la Sucesión de Fibonacci:
a) Si vamos dividiendo un número de la sucesión entre su anterior obtenemos: 1/1 =1; 2/1 =2; 3/2 =1,5; 5/3 =1,666…; 8/5 =1,6; 13/8 = 1,625



Como puede verse, nos acercamos rápidamente al valor del número de Oro, primero por debajo, después por arriba, por debajo, … alternativamente.

b) Formula de Binet:

Para calcular un número de Fibonacci, por ejemplo el que ocupa el lugar 20 hay que calcular los 19 anteriores.
Esto no tiene que ser necesariamente así, pues Binet dedujo esta fórmula, que para el autor es una de las más bonitas de las matemáticas.

$$F_n = \frac{\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Si por ejemplo sustituimos *n* por 20 obtenemos $F_{20} = 6765$.
Realmente podemos prescindir del 2º término del numerador, para $n > 3$ se hace mucho más pequeño que el primero. Por ejemplo, para $n = 6$, si hacemos $\frac{\Phi^6}{\sqrt{5}}$ obtenemos 8,0249 que redondeado es 8, el valor correcto.

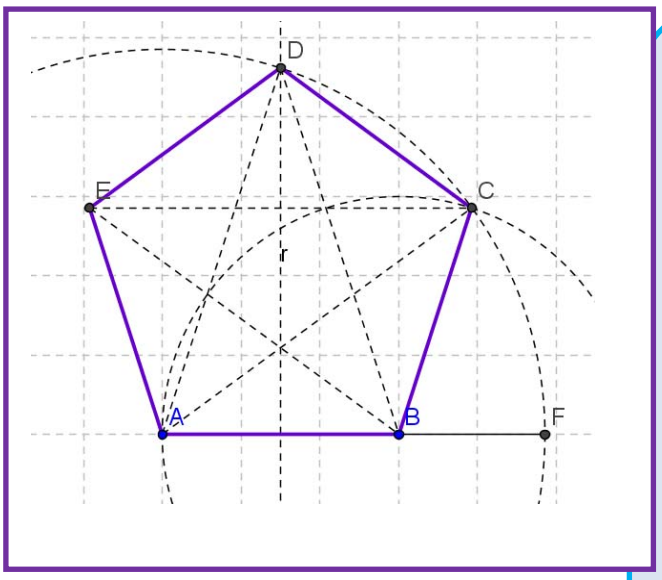
Actividades:

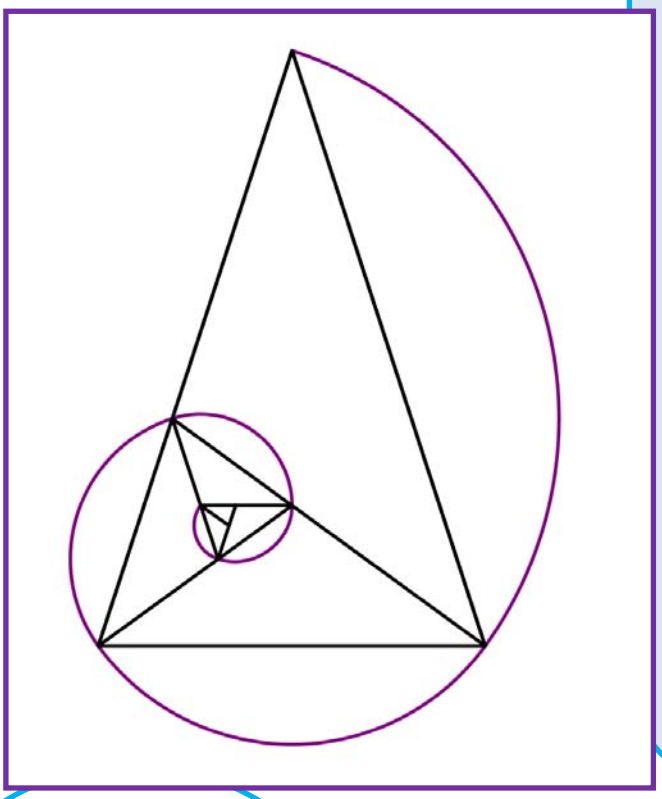
a) Calcula F_{31} y F_{30} con la fórmula de Binet.

b) Haz el cociente y mira si es una buena aproximación del Número de Oro.

Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

El pentágono regular y el Número de Oro.





En un pentágono regular la razón entre una diagonal y el lado es Φ . Como sabemos construir Φ, la construcción de un pentágono regula es muy sencilla:

Si AB va a ser un lado de nuestro pentágono, construimos el punto F alineado con A y B que cumpla AF/AB igual a Fi (se indica cómo hacerlo en el texto).

Entonces, AB será el lado y AF la medida de la diagonal.

Trazamos la mediatriz de AB y una circunferencia de centro A y radio AF. Se cortan en D que es un vértice del pentágono.

Trazamos ahora una circunferencia con centro B y radio AB, se corta con la anterior en C que es otro vértice del pentágono. Sólo queda hallar E que es muy fácil.

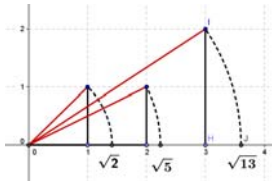
El pentágono regular con sus diagonales se conoce como “Pentagrama Místico” y parece ser que volvía loquitos a los pitagóricos, en él el número de Oro aparece de forma desmesurada.

Del Pentagrama hemos sacado este triángulo, llamado Triángulo Áureo que permite obtener más triángulos áureos haciendo la bisectriz en uno de los ángulos iguales y formar esta espiral. Esta espiral es parecida a la Espiral Áurea, a la de Fibonacci y a la espiral logarítmica que es la

Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

Números reales. 4ºB de ESO

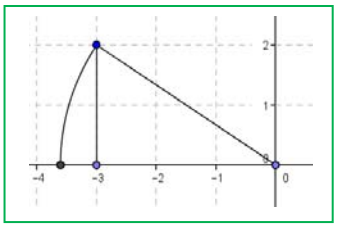
RESUMEN

		Ejemplos
Conjuntos de números	**Naturales ➔** $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$; **Enteros ➔** $\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ **Racionales ➔** $\mathbf{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$ **; Irracionales ➔** $\mathbf{I} = \Re - \mathbf{Q}$; $\Re = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$	
Fracciones y expresión decimal	Todas las fracciones tienen expresión decimal exacta o periódica. Toda expresión decimal exacta o periódica se puede poner como fracción.	$0{,}175 = \frac{175}{1000} = \frac{7}{40}$ X = 1,7252525… = 854/495
$\sqrt{2}$ **irracional**	$\sqrt{2}$ **no** puede ponerse como fracción.	
Error Absoluto	Error Absoluto (*EA*) = $\lvert valor\ real - valor\ aproximado \rvert$	$\sqrt{3} \approx 1{,}73$: *EA* $\approx 0{,}0021$.
Cota del error	Hallamos la cota calculando un valor mayor	*EA* $\leq 0{,}003$
Error Relativo	$ER = \frac{EA}{\lvert Valor\ real \rvert}$	$ER = \frac{0{,}0021}{\sqrt{3}} \approx 0{,}00121$
Control del error	En cada suma o resta el error absoluto es la suma de los errores absolutos. Los errores relativos se suman al multiplicar dos números.	
Densidad	Los números reales y los números racionales son densos. Entre cada dos números, siempre podemos encontrar a otro.	
Representación en la recta real	Fijado un origen y una unidad, existe una biyección entre los números reales y los puntos de la recta	
Intervalo abierto	Intervalo abierto en el que los extremos **no** pertenecen al intervalo	(2, 7) = {$x \in \Re$/ 2 < x < 7}. $(2,7) \Rightarrow$
Intervalo cerrado	Los extremos **SI** pertenecen al intervalo	[−2, 2] = {$x \in \Re$; −2 ≤ x ≤ 2} $[-2,2] \Rightarrow$
Intervalos Semiabiertos (o semicerrados)	Intervalo con un extremo abierto y otro cerrado	$[-8,0) = \{x \in \square\ / -8 \leq x < 0\}$ $[-8,0) \Rightarrow$
Entornos	Forma especial de expresar un intervalo abierto: **E(*a* , *r*) = (*a* − *r* , *a* + *r*)**	$E(5,2) = (3,7) \Rightarrow$

Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. La imagen es la representación de un número irracional, ¿cuál?



2. Representa en la recta numérica: –3,375; 3,666…

3. Representa en la recta numérica: $-\sqrt{8};\ 2\sqrt{5};\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

4. Halla el valor exacto de $\dfrac{0,\overset{\frown}{4}}{0,4}$ sin calculadora.

5. Di cuáles de estas fracciones tienen expresión decimal exacta y cuáles periódica:

$$\frac{9}{40};\frac{30}{21};\frac{37}{250};\frac{21}{15}$$

6. Halla 3 fracciones *a, b, c* tales que $\dfrac{3}{4} < a < b < c < \dfrac{19}{25}$

7. Haz en tu cuaderno una tabla y di a qué conjuntos pertenecen los siguientes números:

2,73535…; $\pi-2$; $\sqrt[5]{-32}$; $\dfrac{2}{0}$; 10^{100} ; $\dfrac{102}{34}$; -2,5 ; 0,1223334444…

8. Contesta verdadero o falso, justificando la respuesta.

a) $\mathbf{Q} \cap (\Re - \mathbf{Q}) = \{0\}$

b) $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$

c) La raíz cuadrada de un número natural es irracional.

d) $\sqrt{7} \notin \mathbf{Q}$

e) 1/47 tiene expresión decimal periódica.

9. Pon ejemplos que justifiquen:

a) La suma y la resta de números irracionales puede ser racional.

b) El producto o división de números irracionales puede ser racional.

10. ¿Qué será la suma de número racional con otro irracional? (Piensa en su expresión decimal)

11. La suma de 2 números con expresión decimal periódica, ¿puede ser un entero?

Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

12. Expresa con palabras los siguientes intervalos o semirrectas:

a. $(-7, 7]$

b. $\{x \in \Re / -3 \le x < 5\}$

c.

d. $(-2, +\infty)$

13. ¿Cuántos metros hay de diferencia al calcular el perímetro de la Tierra poniendo $\pi \approx$ 3,14 en lugar de su valor real?, ¿es mucho o poco?

Básicamente tienes que hallar el error absoluto y el relativo.

*Radio aproximadamente 6370 km

14. Los antiguos hicieron buenas aproximaciones de Pi, entre ellas citemos a Arquímedes (siglo III a.C) con 211875/67441 y a Ptolomeo (siglo II d.C,) con 377/120.

¿Cuál cometió menor error relativo?

15. Lo siguiente es un **Pi**-texto: "*Soy y seré a todos definible, mi nombre tengo que daros, cociente diametral siempre inmedible soy de los redondos aros*." (Manuel Golmayo)

Cuenta y apunta el número de letras de cada palabra y verás de donde viene su nombre. Inventa una frase con la misma propiedad, no es necesario que sea tan largo (al menos 10 palabras)

16. Halla:

a) $(3, 5] \cup (4, 6]$

b) $(3, 5] \cap (4, 6]$

c) $(-\infty, 2] \cap (-2, +\infty)$

17. ¿Puede expresarse como entorno una semirrecta?

18. Expresa como entornos abiertos los siguientes intervalos:

a. $(0, 7)$

b. $(-8, -2)$

c. $(2, +\infty)$

19. Expresa como intervalos abiertos los siguientes entornos:

a) $E(2, 2/3)$

b) $E(-7, 1/2)$

20. Un numero irracional tan importante como Pi es el número "e". $e \approx 2,718281828...$ que parece periódico, pero no, no lo es. Se define como el número al que se acerca $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando *n* se hace muy, pero que muy grande. **Coge la calculadora** y dale a *n* valores cada vez mayores, por ejemplo: 10, 100, 1000, … Apunta los resultados en una **tabla**.

Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

21. Otra forma de definir *e* es $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$

Que dirás tú ¡qué son esos números tan admirados!, se llama factorial y es muy sencillo: 4! = 4·3·2·1 = 24, se multiplica desde el número hasta llegar a 1. Por ejemplo: 6! = 6·5·4·3·2·1= 720. No te preocupes, que la tecla ! está en la calculadora.

¿Puedes calcular *e* con 6 cifras decimales correctas?

*Nota: Fíjate que ahora la convergencia es mucho más rápida, sólo has tenido que llegar hasta *n* = ¿?

22. Ahora trabajamos con valores exactos, ni las fracciones ni los irracionales se sustituyen por su expresión decimal, ejemplos: $\frac{4\pi \cdot 5^3}{3} = \frac{500\pi}{3}$ $3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

Halla el área y el perímetro de un rectángulo de lados $\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$ m.

23. Halla el área y el perímetro de un cuadrado cuya diagonal mide 2 m.

24. Halla el área y el perímetro de un hexágono regular de lado $\sqrt{3}$ m.

25. Halla el área y el perímetro de un círculo de radio $\sqrt{10}$ m.

26. Halla el área total y el volumen de un cubo de lado $\sqrt[3]{7}$ m.

27. ¿Por qué número hemos de multiplicar los lados de un rectángulo para que su área se haga el triple?

28. ¿Cuánto debe valer el radio de un círculo para que su área sea 1 m^2?

29. Tenemos una circunferencia y un hexágono inscrito en ella. ¿Cuál es la razón entre sus perímetros? (Razón es división o cociente)

30. ¿Qué números al cuadrado dan 7?

31. ¿Qué números reales al cuadrado dan menos de 7?

32. ¿Qué números reales al cuadrado dan más de 7?

33. Medir el tamaño de las pantallas en pulgadas (“) ya no parece muy buena idea. La medida se refiere a la longitud de la diagonal del rectángulo, así, una televisión de 32” se refiere a que la diagonal mide 32”. Eso no da mucha información si no sabemos la proporción entre los lados. Las más usuales en las pantallas de televisión y ordenador son 4:3 y 16:9.

Si una pulgada son 2,54 cm, ¿cuáles serán las dimensiones de una pantalla de 32” con proporción 4:3?, ¿y si la proporción es 16/9? ¿Cuál tiene mayor superficie?

Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1) *Sabes a qué conjuntos pertenecen los distintos números.*
Indica en una tabla o un diagrama (como el del texto) a qué conjuntos numéricos pertenecen los siguientes números: 0; -2; 3/4, 7,3; 6,252525…, $\pi-2$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[4]{-16}$; 1,123124125…; 2,999…

2) *Sabes redondear con un número adecuado de cifras y calculas el error relativo para comparar aproximaciones. Sabes hallar una cota para el error absoluto y el relativo.*
   a) Los siguientes números se han redondeado, halla una cota del error absoluto y del error relativo:
   a_1) 3,14
   a_2) 45600 con redondeo en las centenas.
   b) Si tomamos $\sqrt{10} \approx 3{,}16$ y $\frac{2}{3} \approx 0{,}67$ ¿en cual de las aproximaciones cometemos proporcionalmente menor error?

3) *Sabes cuando una fracción tiene expresión decimal exacta o periódica sin hacer la división*.
Pruébalo con estas:
30/150; 30/21

4) *Sabes pasar de decimal a fracción para trabajar con valores exactos:*
Halla: 0,72525…+0,27474…

5) *Sabes representar números racionales e irracionales de forma exacta*
Representa de forma exacta $\frac{-21}{9};\frac{30}{7};\sqrt{10};\sqrt{7}$

6) *Dominas las distintas formas y notaciones de un intervalo o semirrecta (intervalo, conjunto con desigualdades y gráfica).*
Expresa en forma de intervalo (o semirrecta), en forma de desigualdad y representa gráficamente:
   a) Números reales inferiores o iguales que -1
   b) Números reales comprendidos entre -4 y 2, incluido el 1º pero no el 2º.

7) *Sabes pasar de un entorno a un intervalo y viceversa.*
   a) Escribe como intervalo: E(-2 , 2/3)
   b) Escribe como entorno el intervalo (-5/2 , 7/3)

8) *Sabes resolver problemas trabajando con cantidades exactas.*
Halla el área, el volumen y la diagonal principal de un ortoedro de lados $\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$ y $3\sqrt{5}$ m.

Autor: Paco Moya
Revisor: Sergio Hernández
Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF
BY NC SA
Textos Marea Verde

Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.

4ºB ESO
Capítulo 2:
Potencias y raíces

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-042256

Fecha y hora de registro: 2014-05-08 18:22:31.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: JOSE ANTONIO ENCABO DE LUCAS

Revisora: Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

1. POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO.

1.1. POTENCIAS DE EXPONENTE NATURAL

1.2. POTENCIAS DE EXPONENTE NEGATIVO

2. PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS. EJEMPLOS

3. POTENCIAS DE EXPONENTE RACIONAL. RADICALES

3.1. POTENCIAS DE EXPONENTE RACIONAL. DEFINICIÓN

3.2. RADICALES. DEFINICION. EJEMPLOS.

3.3. PROPIEDADES DE LOS RADICALES. EJEMPLOS

4.OPERACIONES CON RADICALES. RACIONALIZACION

4.1. OPERACIONES. DEFINICIÓN. EJEMPLOS

4.2. RACIONALIZACION. EJEMPLOS

4.3. EJEMPLOS PARA RESOLVER.

5. NOTACION CIENTÍFICA.

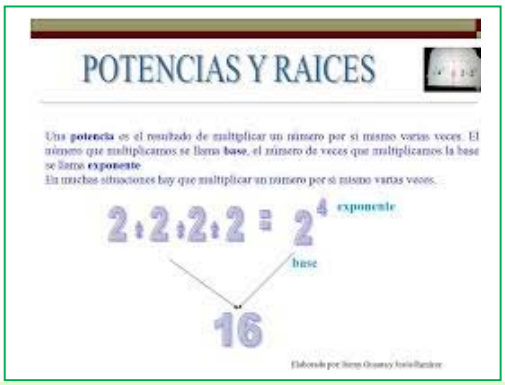
5.1. DEFINICIÓN. EJEMPLOS.

5.2. OPERACIONES CON NOTACION CIENTÍFICA.

6. LOGARITMOS

6.1. DEFINICIÓN

6.2. PROPIEDADES



En este capítulo vamos a estudiar las potencias de exponente natural y entero con sus propiedades. Aprenderemos a operar con las potencias aplicando sus propiedades.

Estudiaremos las potencias de exponente racional, que son los radicales, sus propiedades y así como las operaciones que podemos realizar con ellos. Nos detendremos en la racionalización, que es una operación muy utilizada en matemáticas que la necesitaremos para operar con radicales.

Estudiaremos la notación científica, las propiedades para poder operar con este tipo de notación y las ventajas de operar con esta notación.

Por último estudiaremos los logaritmos y sus propiedades, que facilitan las operaciones pues transforman, por ejemplo, los productos en sumas. Cuando no había calculadoras ni ordenadores y querían multiplicar números de más de diez cifras, ¿cómo hacían?

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO. PROPIEDADES

1.1. Potencias de exponente natural.

Recuerda que:

Dado *a,* un número cualquiera, y *n,* un número natural, la potencia a^n es el producto del número *a* por sí mismo *n* veces

En forma desarrollada, la potencia de base *a* y exponente *n* se escribe: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, *n* veces, siendo *a* cualquier número y *n* un número natural

Ejemplo:

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, 5 veces

$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$, 5 veces.

La base *a* puede ser positiva o negativa. Cuando la base es positiva el resultado es siempre positivo. Cuando la base es negativa, si el exponente es par el resultado es positivo, pero si es impar el resultado es negativo.

Si calculamos los ejemplos de arriba tendremos:

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$. Resultado positivo porque multiplico un número positivo 5 veces.

$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$. Multiplico un número negativo un número impar de veces, por lo que el resultado es negativo. Cada vez que multiplicamos dos veces dos números negativos nos da uno positivo, como tenemos 5, quedaría un signo menos sin multiplicar, luego $(+) \cdot (-) = (-)$.

Recuerda que:

Base positiva: resultado siempre positivo.

Base negativa y exponente par: resultado positivo.

Base negativa y exponente impar: resultado negativo

Actividades resueltas:

- *Calcula las siguientes potencias:*

a) $(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$

b) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

c) $-(2)^4 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$

Actividades propuestas:

1. Calcula las siguientes potencias:

a) -3^3 b) $(2 + 1)^3$ c) $-(-2x)^2$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.2. Potencias de exponente negativo:

Definición de potencia de exponente negativo $-n$ y base a:

$$a^{-n} = 1/a^n$$

$$\boxed{a^{-n} = 1/a^n}$$

Esto se justifica ya que se desea que se sigan verificando las propiedades de las potencias:

$$a^m/a^n = a^{m-n}.$$

$$a^m/a^{m+n} = a^{m-(m+n)} = a^{-n} = 1/a^n.$$

Ejemplo:

- 5^{-2} es lo mismo que $(1/5)^2$.

2. PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS. EJEMPLOS:

Las propiedades de las potencias son:

a) El producto de potencias de la misma base es igual a otra potencia de la misma base y como exponente la suma de los exponentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$$

Ejemplo:

- $3^2 \cdot 3^4 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3^{4+2} = 3^6$

b) El cociente de potencias de la misma base es igual a otra potencia que tiene como base la misma, y como exponente la diferencia de los exponentes.

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

Ejemplo:

- $5^5/5^3 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) / (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^{5-3} = 5^2$

PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS
$a^m . a^n = a^{n+m}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$(a^m)^n = a^{n.m}$
$(a.b)^n = a^n . b^n$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

c) La potencia de una potencia es igual a la potencia cuyo exponente es el producto de los exponentes.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Ejemplo:

- $(7^2)^3 = (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) = 7^6$

d) El producto de potencias de distinta base con el mismo exponente es igual a otra potencia cuya base es el producto de las bases y cuyo exponente es el mismo:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Ejemplo:

- $3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 5) = (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = (3 \cdot 5)^2$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

e) El cociente de potencias de distinta base y el mismo exponente es igual a otra potencia cuya base es el cociente de las bases y cuyo exponente es el mismo.

$$a^n/b^n = (a/b)^n$$

Ejemplo:

- $8^3/7^3 = (8 \cdot 8 \cdot 8) / (7 \cdot 7 \cdot 7) = (8/7) \cdot (8/7) \cdot (8/7) = (8/7)^3$

Todas estas propiedades de las potencias que se han citado para los exponentes naturales siguen siendo válidas para otros exponentes: negativos, fraccionarios…

Actividades resueltas:

- *Calcula las siguientes operaciones con potencias:*

  a) $3^5 \cdot 9^2 = 3^5 \cdot (3^2)^2 = 3^5 \cdot 3^4 = 3^9$

  b) $(2^3)^3 = 2^{3 \cdot 3} = 2^9$

  c) $5^3 / 5^0 = 5^{3-0} = 5^3$

  d) $3^4/3^{-5} = 3^{4-(-5)} = 3^{4+5} = 3^9$

Actividades propuestas:

2. Efectúa las siguientes operaciones con potencias:

a) $(x + 1) \cdot (x + 1)^3$ b) $(x + 2)^3 : (x + 2)^4$ c) $\{(x - 1)^3\}^4$ d) $(x + 3) \cdot (x + 3)^{-3}$

3. POTENCIAS DE EXPONENTE RACIONAL. RADICALES

3.1. Potencias de exponente racional. Definición.

Se define la potencia de exponente fraccionario y base *a* como:

$$a^{r/s} = \sqrt[s]{a^r}$$

Ejemplo:

- *Exponentes fraccionarios:* $(16)^{3/4} = \sqrt[4]{16^3}$

Las propiedades citadas para las potencias de exponente entero son válidas para las potencias de exponentes fraccionarios

Ejemplo:

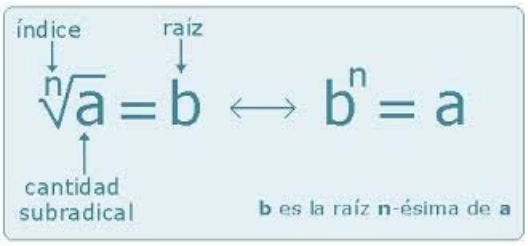
- $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

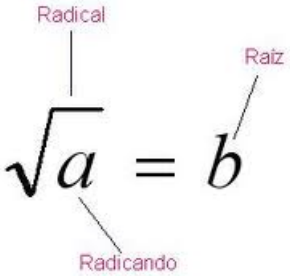
3.2. Radicales. Definición. Ejemplos

Se define **raíz *n*-sima** de un número *a*, como el número *b* que verifica la igualdad $b^n = a$.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Siendo: *n* es el **índice**, *a* es la cantidad subradical o **radicando** y *b* es la raíz ***n*-sima** de *a*





Importante: *n* siempre es positivo. No existe la raíz –5.

La radicación de índice *n* es la operación inversa de la potenciación de exponente *n*.

Por la definición de raíz *n*-ésima de un número *a* se verifica que si *b* es raíz, entonces:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow \boldsymbol{b^n = a}$$

Observa que se puede definir: $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ ya que: $(a^{1/n})^n = a^{(1/n)\cdot n} = a^1 = a$.

Como $a^{1/n}$ satisface la misma propiedad que *b* deben ser considerados como el mismo número.

Ejemplos:

- $(16)^{3/4} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = (2)^{12/4} = 2^3 = 8$
- $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

3.3. Propiedades de los radicales. Ejemplos.

Las propiedades de las potencias enunciadas anteriormente para el caso de exponentes fraccionarios, también se pueden aplicar a las raíces:

a) Si multiplicamos el índice de una raíz *n* por un número *c*, y a la vez elevamos el radicando a ese número *c* el valor de la raíz no varía.

Se verifica $\forall c \neq 0$ se verifica que :

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n.p]{a^p}.$$

Demostración:

$$\sqrt[n.p]{a^p} = a^{\frac{p}{p.n}} = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

Ejemplo:

- $\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{25}$. Se verifica puesto que según acabamos de ver: $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3.2]{5^2} = \sqrt[6]{25}$

b) Para multiplicar raíces del mismo índice, se multiplican los radicandos y se halla la raíz de índice común:

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}\ .$$

Demostración:

Según las propiedades de las potencias de exponentes enteros se verifica que:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

c) Para dividir raíces del mismo índice se dividen los radicandos y se halla la raíz del índice común.

Suponemos que $b \neq 0$ para que tenga sentido el cociente.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\ .$$

Demostración:

Si escribimos:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = (\frac{a}{b})^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ .$$

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[3]{\frac{a^7}{a^4}} = \sqrt[3]{a^{7-4}} = \sqrt[3]{a^3} = a$$

d) Para elevar un radical a una potencia basta con elevar el radicando a dicha potencia:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Demostración:

Esta propiedad la podemos demostrar como sigue:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$$

$$m > 0 \text{ y } m \in Z$$

e) La raíz de una raíz es igual a la raíz cuyo índice es el producto de los índices:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Demostración:

Se verifica que:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n\cdot m}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$$

Ejemplo:

- $\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^{15}\cdot y^{30}}} = \sqrt[15]{x^{15}\cdot y^{30}} = (x^{15}\cdot y^{30})^{\frac{1}{15}} = (x^{15})^{\frac{1}{15}}\cdot(y^{30})^{\frac{1}{15}} = x\cdot y^2$

Actividades resueltas:

- *Reduce a índice común* (6) *los siguientes radicales:* $\sqrt[3]{536};\sqrt[2]{70}$

$$\sqrt[3]{536} = \sqrt[3]{2^3\cdot 67} = \sqrt[6]{(2^3\cdot 67)^2};$$

$$\sqrt{70} = \sqrt[2]{2\cdot 5\cdot 7} = \sqrt[6]{2^3\cdot 5^3\cdot 7^3}.$$

- *Saca factores fuera de la raíz:*

$$\sqrt[2]{108} = \sqrt[2]{2^2\cdot 3^3} = \sqrt[2]{2^2\cdot 3^2\cdot 3} = 2\cdot 3\cdot\sqrt[2]{3} = 6\cdot\sqrt[2]{3}$$

- *Escribe los siguientes radicales como una sola raíz:*

$$\frac{\sqrt{3}.\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{24}} = \frac{\sqrt[6]{3^3}.\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^3}.3} = \sqrt[6]{\frac{3^3.2^4}{2^3.3}} = \sqrt[6]{2.3^2} = \sqrt[6]{18}$$

Actividades propuestas:

3. Calcula:

a) $(\sqrt[3]{a^6.b^9})^2$ b) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}.\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ c) $(\sqrt[12]{(x+1)^3})^2$

4. Halla:

a) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{\frac{x}{5y}}} : \sqrt{\sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}}}$ b) $\sqrt{\frac{5}{3}} : \sqrt{\frac{2}{3}}$

5. Realiza las siguientes operaciones con radicales:

a) $\sqrt[4]{\frac{x}{5y}} : \sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}}$ b) $(\sqrt[5]{(x+3)^2})^3$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4. OPERACIONES CON RADICALES: RACIONALIZACION.

4.1. Operaciones. Definición. Ejemplos

Suma y resta de radicales:

RECUERDA:

Para sumar y restar radicales estos deben de ser idénticos:

$$\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5\neq\sqrt{13}$$

Para sumar estos radicales hay que sumar sus expresiones aproximadas.

Sin embargo la expresión:

$$7\sqrt{5}+11\sqrt{5}-\sqrt{5}=17\sqrt{5}$$

si se puede sumar y restar puesto que sus radicales son idénticos

PARA PODER SUMAR O RESTAR RADICALES ES NECESARIO QUE TENGAN EL MISMO ÍNDICE Y EL MISMO RADICANDO.

SOLO CUANDO ESTO SUCEDE PODEMOS SUMAR O RESTAR LOS COEFICIENTES O PARTE NUMERICA DEJANDO EL MISMO RADICAL

Ejemplo:

- $\sqrt{18}+\sqrt{8}+\sqrt{1250}=\sqrt{2.3^2}+\sqrt{2^3}+\sqrt{2.5^4}.$

Por las propiedades de los radicales podemos sacar factores del radical dejando que todos los radicales sean idénticos:

$$\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^2\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 5^2\cdot 5^2}=3\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2}+5\cdot 5\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}+25\sqrt{2}=(3+2+25)\sqrt{2}=30\sqrt{2}$$

Producto de radicales:

Para multiplicar radicales debemos convertirlos en radicales de igual índice y multiplicar los radicandos:

1.- Calculamos el m.c.m.de los índices

2.- Dividimos el m.c.m entre cada índice y lo multiplicamos por el exponente del radicando y simplificamos

Ejemplo:

- $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[3]{7}=\sqrt[15]{8^3\cdot 7^5}=\sqrt[15]{(2^3)^3\cdot 7^5}=\sqrt[15]{2^9\cdot 7^5}$

División de radicales:

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Para dividir radicales debemos conseguir que tengan igual índice, como en el caso anterior y después dividir los radicales.

Ejemplo:

- $\dfrac{\sqrt{3}.\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{24}} = \sqrt[6]{\dfrac{3^3.4^2}{24}} = \sqrt[6]{\dfrac{3^3.(2^2)^2}{2^3.3}} = \sqrt[6]{\dfrac{3^3.2^4}{2^3.3}} = \sqrt[6]{3^2.2^1} = \sqrt[6]{18}$

Raíz de una raíz:

Es la raíz cuyo índice es el producto de los índices (según se demostró en la propiedad e), y después simplificamos extrayendo factores fuera el radical si se puede.

Ejemplo:

- $\sqrt{\sqrt[3]{x^7 \cdot y^5}} = \sqrt[6]{x^7 \cdot y^5} = \sqrt[6]{x^6 \cdot x^1 \cdot y^5} = x \cdot \sqrt[6]{x \cdot y^5}$

RECUERDA:

Para extraer factores del radical se debe cumplir que el exponente del radicando sea mayor que el índice de la raíz.

2 opciones:

- ✓ Se divide el exponente del radicando entre el índice de la raíz, el cociente indica el número de factores que extraigo y el resto los que se quedan dentro.
- ✓ Se descomponen los factores del radicando elevándolos al mismo índice de la raíz, cada exponente que coincida con el índice, saldrá el factor y los que sobren se quedan dentro

Ejemplo:

- *Extrae factores del radical:*

$$\sqrt{\frac{28x^5}{75y^3}} = \sqrt[2]{\frac{2^2 7 \cdot x^5}{3 \cdot 5^2 y^3}} = \sqrt{\frac{2^2 \cdot 7 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x}{3 \cdot 5^2 \cdot y^2 \cdot y}} =$$

1. $\sqrt{20} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
2. $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$
3. $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{4} = 2$

Los factores que podríamos extraer serían el 2, *x*, *y* y el 5, de la siguiente manera:

Dividimos el exponente de la *x*, 5, entre 2, ya que el índice de la raíz es 2, y tenemos de cociente 2 y de resto 1, por lo que saldrán dos *x* y queda 1 dentro.

De igual forma para la *y*, dividimos 3 entre 2 y obtenemos 1 de cociente y uno de resto, por lo que sale 1 *y* y se queda otra dentro.

Veamos: $$\sqrt{\frac{2^2 \cdot 7 \cdot x^{2} \cdot x^2 \cdot x}{3 \cdot 5^2 \cdot y^2 \cdot y^1}} = \frac{2x^2}{5y}\sqrt{\frac{7x}{3y}}$$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

Actividades propuestas:

6. Escribe bajo un solo radical y simplifica: $\sqrt[2]{2.\sqrt[2]{3.\sqrt[2]{4.\sqrt[2]{5.\sqrt[2]{6\sqrt[2]{8}}}}}}$

7. Calcula y simplifica: $\dfrac{\sqrt[4]{x^3.y^3}.\sqrt[3]{x^4.y^5}}{\sqrt[6]{x^5.y^4}}$

8. Realiza la siguiente operación: $\sqrt{x^3}+\sqrt{16x^7}+\sqrt{x}$

9. Calcula y simplifica: $\sqrt[2]{\dfrac{3}{x}}.\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{8}}.\sqrt[4]{\dfrac{9}{5}}$

4.2. Racionalización. Ejemplos.

Racionalizar una fracción algebraica consiste en encontrar otra equivalente que no tenga radicales en el denominador.

Para ello, hay que multiplicar numerador y denominador por la expresión adecuada.

Cuando en la fracción solo hay monomios, se multiplica y divide la fracción por un mismo número para conseguir completar en el denominador una potencia del mismo exponente que el índice de la raíz.

Ejemplo:

- $\sqrt[4]{\dfrac{6}{x^3}}$.

Multiplicamos y dividimos por $\sqrt[4]{x}$ para obtener en el denominador una cuarta potencia y quitar el radical.

$$\sqrt[4]{\frac{6}{x^3}}=\frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{x^3}}=\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{x^3}}=\frac{\sqrt[4]{6x}}{\sqrt[4]{x^4}}=\frac{\sqrt[4]{6x}}{x}$$

Cuando en la fracción aparecen en el denominador binomios con raíces cuadradas, se multiplica y se divide por un factor que proporcione una diferencia de cuadrados, este factor es el factor conjugado del denominador.

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$, su conjugado es: $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Otro ejemplo: $(\sqrt{a}+b)$ su conjugado es: $(\sqrt{a}-b)$

Ejemplo:

- $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Multiplicamos por el conjugado del denominador que en este caso es: $\sqrt{3}-\sqrt{5}$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})}=\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{3-5}=-\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2}$$

Actividades propuestas:

10. Racionaliza la expresión: $\frac{x+3y}{\sqrt{x}-\sqrt{2y}}$

11. Racionaliza: $\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

12. Racionaliza: $\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}-2}$

5. NOTACION CIENTÍFICA.

5.1. Definición. Ejemplos.

La notación científica se utiliza para escribir números muy grandes o muy pequeños.

La ventaja que tiene sobre la notación decimal es que las cifras se nos dan contadas, con lo que el orden de magnitud del número es evidente.

Un número puesto en notación científica consta de:

- ✓ Una parte entera formada por una sola cifra que no es el cero (la de las unidades).
- ✓ El resto de las cifras significativas puestas como parte decimal.
- ✓ Una potencia de base 10 que da el orden de magnitud del número.

$$N = a,bcd...\cdot 10^n$$

siendo: a su parte entera (solo una cifra)

b c d… su parte decimal

10^n La potencia entera de base 10

Si *n* es positivo, el número *N* es "grande"

Y si *n* es negativo, entonces *N* es "pequeño"

Ejemplos:

- $2{,}48 \cdot 10^{14}$ (= 248000000000000): Número grande.
- $7{,}561 \cdot 10^{-18}$ (= 0,00000000000000007561): Número pequeño.

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

5.2. Operaciones con notación científica

Para operar con números dados en notación científica se procede de forma natural, teniendo en cuenta que cada número está formado por dos factores: la expresión decimal y la potencia de base 10.

El producto y el cociente son inmediatos, mientras que la suma y la resta exigen preparar los sumandos de modo que tengan la misma potencia de base 10 y, así poder sacar factor común.

Ejemplos:

a) $(5{,}24 \cdot 10^6) \cdot (6{,}3 \cdot 10^8) = (5{,}24 \cdot 6{,}3) \cdot 10^{6+8} = 33{,}012 \cdot 10^{14} = 3{,}3012 \cdot 10^{15}$

b) $\dfrac{5{,}24 \cdot 10^6}{6{,}3 \cdot 10^{-8}} = (5{,}24 : 6{,}3) \cdot 10^{6-(-8)} = 0{,}8317 \cdot 10^{14} = 8{,}317 \cdot 10^{13}$

RECUERDA:

- ✓ Para **multiplicar** números en notación científica, se multiplican las partes decimales y se suman los exponentes de la potencia de base 10.
- ✓ Para **dividir** números en notación científica, se dividen las partes decimales y se restan los exponentes de la potencia de base 10.
- ✓ Si hace falta se multiplica o se divide el número resultante por una potencia de 10 para dejar con una sola cifra en la parte entera.

c) $5{,}83 \cdot 10^9 + 6{,}932 \cdot 10^{12} - 7{,}5 \cdot 10^{10} = 5{,}83 \cdot 10^9 + 6932 \cdot 10^9 - 75 \cdot 10^9 = (5{,}83 + 6932 - 75) \cdot 10^9 =$

$= 6862{,}83 \cdot 10^9 = 6{,}86283 \cdot 10^{12}$

RECUERDA:

- ✓ Para **sumar o restar** números en notación científica, hay que poner los números con la misma potencia de base 10, multiplicando o dividiendo por potencias de base 10.
- ✓ Se saca factor común la potencia de base 10 y después se suman o restan los números decimales quedando un número decimal multiplicado por la potencia de 10.
- ✓ Por último si hace falta se multiplica o se divide el número resultante por una potencia de 10 para dejar en la parte entera una sola cifra.

Actividades propuestas:

13. Calcula:

a) $(7{,}83 \cdot 10^{-5}) \cdot (1{,}84 \cdot 10^{13})$ b) $(5{,}2 \cdot 10^{-4}) : (3{,}2 \cdot 10^{-6})$

14. Efectúa y expresa el resultado en notación científica:

a) $\dfrac{3.10^{-5} + 7.10^{-4}}{10^6 - 5.10^5}$ b) $\dfrac{7{,}35.10^4}{5.10^{-3}} + 3{,}2 \cdot 10^7$

15. Realiza las siguientes operaciones y efectúa el resultado en notación científica:

a) $(4{,}3 \cdot 10^3 - 7{,}2 \cdot 10^5)^2$ b) $(7{,}8 \cdot 10^{-7})^3$

6. LOGARITMOS:

6.1. Definición:

El **logaritmo** de un número ***m***, positivo, en **base *a***, positiva y distinta de uno, es el exponente al que hay que elevar la base para obtener dicho número.

$$\text{Si } a > 0,\ \log_a m = z \Leftrightarrow m = a^z$$

Los logaritmos más utilizados son los **logaritmos decimales** o logaritmos de base 10 y los **logaritmos neperianos** (llamados así en honor a **Neper**) o logaritmos en base *e*(e es un número irracional cuyas primeras cifras son: *e* = 2,71828182…). Ambos tienen una notación especial:

$$\log_{10} m = \log m \qquad \log_e m = \ln m$$

Ejemplos:

- $\log_3 9 = 2 \Leftrightarrow 9 = 3^2$
- $\log_2 16 = 4 \Leftrightarrow 16 = 2^4$
- $\log_{1000} = 3 \Leftrightarrow 1000 = 10^3$
- $\ln e = 1 \Leftrightarrow e = e^1$

Como **consecuencias inmediatas** de la definición se deduce que:

- ✓ El logaritmo de 1 es cero (en cualquier base)

Demostración:

Como $a^0 = 1$, por definición de logaritmo, tenemos que $\log_a 1 = 0$

Ejemplos:

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_2 1 = 0$
- $\log_3 1 = 0$

- ✓ El logaritmo de 1 es cero (en cualquier base)
- ✓ El logaritmo de la base es 1.
- ✓ Solo tienen logaritmos los números positivos.

- ✓ El logaritmo de la base es 1.

Demostración:

Como $a^1 = a$, por definición de logaritmo, tenemos que $\log_a a = 1$

Ejemplos:

- $\log_a a = 1$
- $\log_3 3 = 1$
- $\log_5 5 = 1$
- $\log_3 3^5 = 5$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- ✓ Solo tienen logaritmos los números positivos, pero puede haber logaritmos negativos. Un logaritmo puede ser un número natural, entero, fraccionario e incluso un número irracional

Al ser la base un número positivo, la potencia nunca nos puede dar un número negativo ni cero.

- $log_2 (-4)$ No existe
- $log_2 0$ No existe.
- $log\ 100 = 2 \Leftrightarrow 100 = 10^2$.
- $log\ 0{,}1 = -1 \Leftrightarrow 0{,}1 = 10^{-1}$.
- $log\ \sqrt{10} = 1/2 \Leftrightarrow \sqrt{10} = 10^{1/2}$.
- $log\ 2 = 0{,}301030....$.

Actividades resueltas:

- $\log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$
- $\log_2 128 = x \Leftrightarrow 2^x = 128 \Rightarrow 2^x = 2^7 \Rightarrow x = 7$
- $\log_3 \overline{} = x \Leftrightarrow 3^x = (243)^{1/2} \Rightarrow 3^x = (3^5)^{1/2} \Rightarrow x = 5/2$

Actividades propuestas:

15. Copia la tabla adjunta en tu cuaderno y empareja cada logaritmo con su potencia:

$2^5 = 32$	$\log_5 1 = 0$	$2^0 = 1$	$5^2 = 25$
$5^1 = 5$	$\log_2 2 = 1$	$5^0 = 1$	$\log_2 32 = 5$
$2^1 = 2$	$\log_2 1 = 0$	$\log_5 5 = 1$	$\log_5 25 = 2$
$2^4 = 16$	$\log_3 81 = 4$	$\log_2 16 = 4$	$3^4 = 81$

16. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 2^5$ b) $\log_5 25$ c) $\log_2 2^{41}$ d) $\log_5 5^{30}$

17. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 27$ b) $\log_{10} 100$ c) $\log_{1/2}(1/4)$ d) $\log_{10} 0'0001$

18. Calcula x utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 = x$ b) $\log_{1/2} x = 4$ c) $\log_x 25 = 2$

19. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 + \log_2 1/4 - \log_3 9 - \log_2 \overline{}$

b) $\log_2 1/32 + \log_3 1/27 - \log_2 1$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

6.2. Propiedades de los logaritmos:

1. El logaritmo de un **producto** es igual a la suma de los logaritmos de sus factores:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Demostración:

Llamamos $A = \log_a x$ y $B = \log_a y$. Por definición de logaritmos sabemos que:

$$A = \log_a x \Leftrightarrow a^A = x$$

$$B = \log_a y \Leftrightarrow a^B = y$$

Multiplicamos: $x \cdot y = a^A \cdot a^B = a^{A+B} \Leftrightarrow \log_a x \cdot y = A + B = \log_a x + \log_a y$.

Ejemplo:

- $\log_a(2 \cdot 7) = \log_a 2 + \log_a 7$

2. El logaritmo de un **cociente** es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor:

$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$$

Demostración:

Llamamos $A = \log_a x$ y $B = \log_a y$. Por definición de logaritmos sabemos que:

$$A = \log_a x \Leftrightarrow a^A = x$$

$$B = \log_a y \Leftrightarrow a^B = y$$

Dividimos: $x / y = a^A / a^B = a^{A-B} \Leftrightarrow \log_a(x / y) = A - B = \log_a x - \log_a y$.

Ejemplo:

- $\log_a (75/25) = \log_a 75 - \log_a 25$

3. El logaritmo de una **potencia** es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base de la potencia:

$$\log_a x^y = y.\log_a x$$

Demostración:

Por definición de logaritmos sabemos que:

$$A = \log_a x \Leftrightarrow a^A = x \Leftrightarrow (a^A)^y = x^y = a^{Ay} \Leftrightarrow Ay = \log_a x^y = y \log_a x$$

Ejemplo:

- $\log_a 2^5 = 5 \cdot \log_a 2$

4. El logaritmo de una **raíz** es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz:

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$$

Demostración:

Teniendo en cuenta que una raíz es una potencia de exponente fraccionario.

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- $\log_a \sqrt[3]{27} = \left(\dfrac{\log_a 27}{3}\right)$

5. **Cambio de base:** El logaritmo en base *a* de un número *x* es igual al cociente de dividir el logaritmo en base *b* de *x* por el logaritmo en base *b* de *a*:

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

Esta expresión se conoce con el nombre de ***"fórmula del cambio de base"***. Las calculadoras sólo permiten el cálculo de logaritmos decimales o neperianos, por lo que, cuando queremos utilizar la calculadora para calcular logaritmos en otras bases, necesitamos hacer uso de ésta fórmula.

Ejemplo:

- $\log_2 11 = \dfrac{\log 11}{\log 2} = \log 11 - \log 2 = 3{,}45943162$

Actividades resueltas:

- *Desarrollar las expresiones que se indican:*

$$\log_5\left[\frac{a^3 \cdot b^2}{c^4}\right] = \log_5\left[a^3 \cdot b^2\right] - \log_5 c^4 = \log_5 a^3 + \log_5 b^2 - \log_5 c^4 = 3\log_5 a + 2\log_5 b - 4\log_5 c$$

$$\log\left(\frac{x^2}{y^5 \cdot z}\right)^3 = 3\log\left(\frac{x^2}{y^5 \cdot z}\right) = 3\left[\log x^2 - \log(y^5 \cdot z)\right] = 3(2\log x - 5\log y - \log z) = 6\log x - 15\log y - 3\log z$$

- *Escribe con un único logaritmo:*

$$3\log_2 a + \frac{1}{2}\log_2 x - \frac{2}{3}\log_2 b + 2\log_2 c - 4 = \log_2 a^3 + \log_2 \sqrt{x} + \log_2 c^2 - \log_2 \sqrt[3]{b^2} - \log_2 2^4 =$$

$$= (\log_2 a^3 + \log_2 \sqrt{x} + \log_2 c^2) - (\log_2 \sqrt[3]{b^2} + \log_2 2^4) = \log_2(a^3 \cdot \sqrt{x} \cdot c^2) - \log_2(\sqrt[3]{b^2}.2^4) = \log_2\left(\frac{a^3 \cdot \sqrt{x} \cdot c^2}{\sqrt[3]{b^2} \cdot 2^4}\right)$$

- *Expresa los logaritmos de los siguientes números en función de log2* = 0,301030*:*

a) $4 \Rightarrow$ log4= log 2^2= 2·log2 = 2·0,301030 = 0,602060

b) $1024 \Rightarrow$ log1024 = log 2^{10}= 10·log2 = 10 · 0,301030 = 3,01030

Actividades propuestas:

20. Desarrolla las expresiones que se indican:

a) $\ln \sqrt[5]{\dfrac{4x^2}{e^3}}$ b) $\log\left(\dfrac{a^3 \cdot b^2}{c^4.d}\right)$

21. Expresa los logaritmos de los números siguientes en función de log3 = 0,4771212

a) 81 b) 27 c) 59049

22. Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2}\log m - 2\log t - \log p + \frac{5}{2}\log h$$

CURIOSIDADES. REVISTA

POTENCIAS DE 11

Las potencias de 11

Las potencias enteras de 11 no dejan de llamar nuestra atención y pueden ser incluidas entre los productos curiosos:

11 x 11 = 121

11 x 11 x 11 = 1331

11 x 11 x 11 x 11 = 14641

Disposición no menos interesante presentan los números 9, 99, 999, etc. cuando son elevados al cuadrado:

$$9^2 = 81$$

$$99^2 = 9801$$

$$999^2 = 998001$$

$$9999^2 = 99980001$$

Vale la pena observar que el número de nueves de la izquierda es igual al número de ceros de la derecha, que se sitúan entre los dígitos 8 y 1.

Utiliza la calculadora o el ordenador para calcular 26^{378}.

¡Da error! No sale. ¡Es necesario usar logaritmos! Aplicamos logaritmos decimales a la expresión:

$$x = 26^{378} \Leftrightarrow \log(x) = 378*\log(26)$$

Eso sí sabe calcularlo la calculadora o el ordenador. Da:

$$\log(x) = 534{,}86 \Leftrightarrow x = 10^{534{,}86} = 10^{534} \cdot 10^{0{,}86} = 10^{534} \cdot 7{,}24.$$

Solución:

$$26^{378} = 7{,}24 \cdot 10^{534}.$$

Es un número tan grande que ni el ordenador ni la calculadora sabe calcularlo directamente y es necesario usar logaritmos. Repite el proceso con 50^{200} y comprueba que te sale $6{,}3 \cdot 10^{339}$.

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

NÚMEROS GRANDES

Los primeros números que se acercan a nuestra definición de lo que es infinito los podemos tomar de la misma naturaleza, contando elementos muy pequeños que existen en abundancia, como son **las gotas del mar** (1×10^{25} gotas), **los granos de arena en todas las playas del mundo** ($5{,}1 \times 10^{23}$ granos) o el **número de estrellas de todo el Universo conocido** (3×10^{23} estrellas). Podemos incluso tomar el número de partículas elementales del universo (1×10^{80}) si queremos obtener un número más grande.

Si queremos hallar un número más grande **"Googol"**, acuñado por un niño de 9 años en 1939, posee 100 ceros, y fue creado con el objetivo de darnos una aproximación hacia lo que significa el infinito. Pero hoy en día se conocen cantidades (mucho) más grandes que el Googol.

Tenemos por ejemplo, los **números primos de la forma de Mersenne**, que han podido ser encontrados gracias a la invención de las computadoras. En 1952, el número primo de Mersenne más grande era $(2 \cdot 10^{17})-1$, un número primo con 39 dígitos, y ese mismo año, las computadoras probaron que el número $(2 \cdot 10^{521})-1$ es también primo, y que dicho número posee 157 dígitos, siendo este mucho más grande que un Googol

10^100

Googol (10^{100})

10, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

RESUMEN:

Potencias de exponente natural y entero	$a^{-n} = 1/a^n$	$(-3)^2 = (-3).(-3) = 9$ $(-\frac{1}{2})^{-2} = (-2)^2 = 4$
Propiedades de las potencias	$a^n.a^m=a^{m+n}$ $a^n:a^m=a^{n-m}$ $(a^n)^m=a^{n.m}$ $a^n.b^n=(a.b)^n$ $a^n/b^n=(a/b)^n$	$(-3)^3\cdot(-3)^3 = (-3)^{3+3} = (-3)^6$ $5^3 : 5^2 = 5^{2-1} = 5^1$ $(-3^5)^2 = (-3)^{5.2} = (-3)^{10}$ $(-2)^3\cdot(-5)^3 = ((-2)\cdot(-5))^3$ $3^4/2^4 = (3/2)^4$
Potencias de exponente racional. Radicales	$a^{r/s} = \sqrt[s]{a^r}$	$(16)^{3/4} = \sqrt[4]{16^3}$
Propiedades de los radicales	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n.p]{a^p}$ $\quad \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$ $\quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ $\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[2]{5^2}} = \sqrt[6]{25}$ $\quad \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3\cdot 2} = \sqrt[3]{6}$ $\frac{\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[3]{\frac{a^7}{a^4}} = \sqrt[3]{a^{7-4}} = \sqrt[3]{a^3} = a$ $(\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{2^3}$ $\quad \sqrt[3]{\sqrt[2]{5}} = \sqrt[3\cdot 2]{5} = \sqrt[6]{5}$
Racionalización de radicales	Se suprimen las raíces del denominador. Se multiplica numerador y denominador por la expresión adecuada (conjugado del denominador, radical del numerador, etc.)	$\frac{1}{\sqrt[3]{25}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2}.\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{5}$ $\frac{1}{5-\sqrt{3}} = \frac{5+\sqrt{3}}{(5-\sqrt{3}).(5+\sqrt{3})} =$ $= \frac{5+\sqrt{3}}{5^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{5+\sqrt{3}}{22}$
Notación científica	Se suprimen las raíces del denominador. Se multiplica numerador y denominador por la expresión adecuada (conjugado del denominador, radical del numerador, etc.)	$5{,}83\cdot 10^9+6{,}932\cdot 10^{12}-7{,}5\cdot 10^{10}=$ $5{,}83\cdot 10^9+6932\cdot 10^9-75.10^9=(5{,}83+6932-75)\cdot 10^9= 6862{,}83\cdot 10^9= 6{,}86283\cdot 10^{12}$ $(5{,}24\cdot 10^6)\cdot(6{,}3\cdot 10^8)=33{,}012\cdot 10^{14}=3{,}32012\cdot 10^{15}$ $\frac{5{,}24\cdot 10^6}{6{,}3\cdot 10^{-8}} = (5{,}24 : 6{,}3)\cdot 10^{6-(-8)} = 0{,}8317\cdot 10$
Logaritmos	*Si a > 0, $\log_a m = z \Leftrightarrow m = a^z$* $\log_a (x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$ $\log_a x^y = y.\log_a x$	$\log_a (75/25) = \log_a 75 - \log_a 25$ $\log_a 2^5 = 5\cdot\log_a 2$ $\log_a \sqrt[3]{27} = \left(\frac{\log_a 27}{3}\right)$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

EJERCICIOS Y PROBLEMAS:

Potencias:

1. Expresa en forma exponencial:

a) $\frac{1}{64}$ **b)** $\frac{t}{t^5}$ **c)** $(\frac{1}{z+1})^2$ **d)** $\frac{27^{-2}}{81^{-5}}$ **e)** $\frac{x^{-2}.y^{-7}}{x^8.y^{-4}}$

2. Calcula:

a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $125^{\frac{1}{3}}$ c) $625^{\frac{5}{6}}$ d) $(64^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{6}}$ e) $(8^{\frac{-4}{3}})^{\frac{2}{5}}$

Radicales:

3. Expresar en forma de radical:

a) $x^{\frac{7}{9}}$ b) $(m^5 \cdot n^3)^{\frac{1}{3}}$ c) $[(x^2)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{5}}$ d) $a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}}$

4. Expresar en forma exponencial:

a) $(\sqrt[3]{x^2})^5$ b) $\sqrt{\frac{a^{13}}{a^6}}$ c) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}}$ d) $\sqrt[3]{x^{(5x+1)}}$ e) $\sqrt[4]{(x^2)^{(3x+2)}}$ f) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[2]{(x^2)^{\frac{1}{5}}}}}$

5. Expresa como potencia única:

a) $\frac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2}$ b) $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{25}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a.\sqrt{a}}$ d) $2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ e) $a.\sqrt{\frac{1}{a}}$ f) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2}$ g) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a^3} \cdot \frac{a^3}{\sqrt{a}}$

Propiedades de los radicales:

6. Simplifica:

a) $\sqrt[9]{64}$ b) $\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^5 \cdot c}}{\sqrt{a.b^3.c^3}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5 \cdot x^7}}$ e) $(\sqrt{\sqrt{2}})^8$ f) $\frac{\sqrt[4]{x^3 \cdot y^3 \cdot \sqrt[3]{x^4 \cdot y^5}}}{\sqrt[6]{x^5.y^4}}$ g) $\sqrt[5]{x^2 \cdot 3 \cdot \sqrt[10]{x^2.\sqrt{x^3}}}$

7. Extraer factores del radical:

a) $\sqrt[3]{32x^4}$ b) $\sqrt[3]{81a^3b^5c}$ c) $(\sqrt{\sqrt{2}})^{10}$ d) $\sqrt[4]{\frac{25a^2b}{c^6}}$ d) $\sqrt{\frac{8a^5}{b^4}}$ e) $\sqrt{\frac{28x^5}{75y^3}}$ f) $\sqrt{\frac{32a^3}{45b^4}}$

8. Introducir factores en el radical:

a) $2.\sqrt{\frac{3}{2}}$ b) $3.\sqrt{\frac{2}{3}}$ c) $2.\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ d) $2.\sqrt[4]{\frac{5}{12}}$ e) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{12}$ f) $\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

Operaciones con radicales:

9. a) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{b^4}\cdot\sqrt[3]{b^2}$ b) $\sqrt{5a}\cdot\sqrt{10ab}\cdot\sqrt{8a^3b}\cdot\sqrt{a}$ c) $\frac{\sqrt[6]{20}}{\sqrt[4]{10}}$ d) $\sqrt[4]{\frac{5}{12}}:\sqrt[4]{\frac{20}{3}}$ e) $\sqrt{\frac{3}{2}}:\sqrt{\frac{2}{3}}$ f) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$

10. Efectúa:

a) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{2}-\sqrt{8}$ b) $\sqrt{50a}-\sqrt{18a}$ c) $\sqrt{320}+\sqrt{80}-\sqrt{500}$ d) $\sqrt{\frac{7}{64}}+\sqrt{\frac{7}{4}}$

e) $5\sqrt{96}-\sqrt[5]{\frac{3}{32}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{135}{8}}-\sqrt[3]{\frac{5}{8}}$ g) $\sqrt{150}+\sqrt{54}-\sqrt{24}$

Racionalizar

11. Racionaliza los denominadores:

a) $\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{3}{2-\sqrt{3}}$ c) $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ f) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

12. Racionaliza y simplifica:

a) $\frac{11}{2\cdot\sqrt{5}+3}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}+3}$ c) $\frac{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{6}`-\sqrt{5}}$ d) $\frac{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{2}}$ e) $\frac{4\cdot\sqrt{15}-2\cdot\sqrt{21}}{2\cdot\sqrt{5}-\sqrt{7}}$ f) $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

13. Efectúa y simplifica:

a) $(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}})$ (3+2· $\sqrt{2}$ b) $\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}-1}-3\sqrt{5}$ c) (1- $\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$) : (1+ $\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

Logaritmos

14. Desarrolla los siguientes logaritmos:

a) $\ln\left(\frac{\sqrt{x^3}}{y^2\cdot z^{-4}}\right)$

b) $\log_3\sqrt[4]{\frac{(x\cdot y)^5}{z^{1/2}\cdot e^2}}$

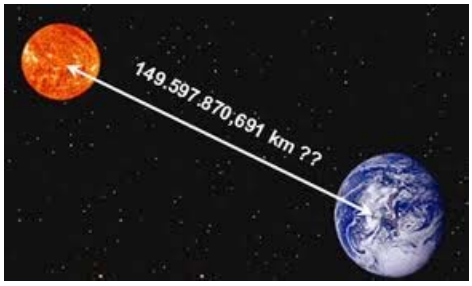
15. Simplifica la siguiente expresión:

$$\log_2 5-3\log_2 a+\frac{7}{3}\log_2 9$$

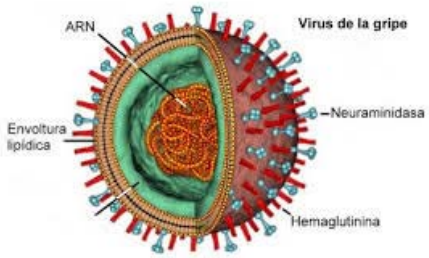
Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

Notación científica:

16.La masa del Sol es 330000 veces la de la Tierra, aproximadamente, y esta es $5{,}98\cdot10^{21}$ t. Expresa en notación científica la masa del Sol, en kilogramos.

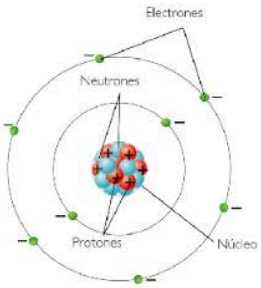


17. El ser vivo más pequeño es un virus que pesa del orden de 10^{-18} g y el más grande es la ballena azul, que pesa, aproximadamente, 138 t. ¿Cuántos virus serían necesarios para conseguir el peso de la ballena?.



16. Los cinco países más contaminantes del mundo (Estados Unidos, China, Rusia, Japón y Alemania) emitieron 12 billones de toneladas de CO_2 en el año 1995, cantidad que representa el 53,5 % de las emisiones de todo el mundo. ¿Qué cantidad de CO_2 se emitió en el año 1995 en todo el mundo?

17. Expresa en notación científica:



a) Recaudación de las quinielas en una jornada de la liga de fútbol: 1628000 €

b) Toneladas de CO_2 que se emitieron a la atmósfera en 1995 en Estados Unidos 5228,5 miles de millones.

c) Radio del átomo de oxigeno: 0,000000000066 m

18. Efectúa y expresa el resultado en notación científica:

a) $(3\cdot10^{-7})\cdot(8\cdot10^{18})$ b) $(4\cdot10^{-12})\cdot(5\cdot10^{-3})$ c) $(5\cdot10^{12}):(2\cdot10^{-3})$ d) $3{,}1\cdot10^{12}+2\cdot10^{10}$ e) $(4\cdot10^{5})^{-2}$

19. Expresa en notación científica y calcula:

a) $(75800)^4:(12000)^4$ b) $\dfrac{0{,}000541\cdot10318000}{1520000\cdot0{,}00302}$ c) $(0{,}0073)^2\cdot(0{,}0003)^2$ d) $\dfrac{2700000-13000000}{0{,}00003-0{,}00015}$

20. Efectúa y expresa el resultado en notación científica:

a) $\dfrac{3\cdot10^{-5}+7\cdot10^{-4}}{10^{6}-5\cdot10^{5}}$ b) $\dfrac{7{,}35\cdot10^{4}}{5\cdot10^{-3}}+3{,}2\cdot10^{7}$ c) $(4{,}3\cdot10^{3}-7{,}2\cdot10^{5})$

21. Que resultado es correcto de la siguiente operación expresada en notación científica:

$(5{,}24.10^{6})\cdot(8{,}32\cdot10^{5})$:

a) $4{,}35968\cdot10^{12}$ b) $43{,}5968\cdot10^{13}$ c) $4{,}35968\cdot10^{11}$ d) $4{,}35968\cdot10^{13}$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

AUTOEVALUACION

1. El número $8^{-4/3}$ vale:

a) un dieciseisavo b) Dos c) Un cuarto d) Un medio.

2. Expresa como potencia de base 2 cada uno de los números que van entre paréntesis y efectúa después la operación: $(16^{1/4})\cdot(\sqrt[6]{4})\cdot(\frac{1}{8})$. El resultado es:

a) $2^{-1/3}$ b) $2^{-5/4}$ c) $2^{-5/3}$ d) 2^{-5}

3. El número: $\sqrt[3]{4\sqrt[3]{6\sqrt{8}}}$ es igual a :

a) $6^{1/4}$ b) $2^{1/3}$ c) $2^{5/6}\cdot 6^{1/9}$ d) 2

4. ¿Cuál es el resultado de la siguiente expresión si la expresamos como potencia única?: $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{16}}$

a) $\frac{1}{2.\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{2}{2\cdot\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{2}}$ d) $\sqrt[3]{2}$

5. Simplificando y extrayendo factores la siguiente expresión tiene un valor: $\sqrt[2]{\sqrt{625\cdot a^6.b^7.c^6}}$

a) $5^3.a.b.c^2\cdot\sqrt[4]{a\cdot b^2.c}$ b) $5\cdot a^2.b.c\cdot\sqrt[4]{a^2.b^3.c^2}$ c) $5.a.b.c\cdot\sqrt[4]{a^3.b^2.c^3}$ d) $5.a.b.c\cdot\sqrt[4]{a^2.b^3.c^2}$

6. ¿Cuál de los siguientes valores es igual a $a^{3/2}$?

a) $a^{1/2}\cdot a^2$ b) $a^{5/2}.a^{-1}$ c) $(a^2)^2$ d) $a^3.\ a^{-2}$

7. ¿Cuál es el resultado de esta operación con radicales?: $\sqrt{63}-\frac{5}{2}\cdot\sqrt{28}+\frac{\sqrt{112}}{3}$

a) $2\cdot\sqrt{7}$ b) $\frac{11}{8}\cdot\sqrt{7}$ c) $-\frac{2}{3}.\sqrt{7}$ d) $\frac{-2}{5}.\sqrt{7}$

8. Una expresión con un único radical de: $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{(x+2)^3}\cdot\sqrt{(x+1)}$ está dada por:

a) $\sqrt[6]{x^2.(x+2)\cdot(x+1)}$ b) $\sqrt[8]{x^2.(x+2)^3.(x+1)}$ c) $\sqrt[12]{x^8.(x+2)^9.(x+1)^6}$ d) $\sqrt[12]{x^2.(x+2)^3.(x+1)}$

9. Para racionalizar la expresión: $\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ hay que multiplicar numerador y denominador por:

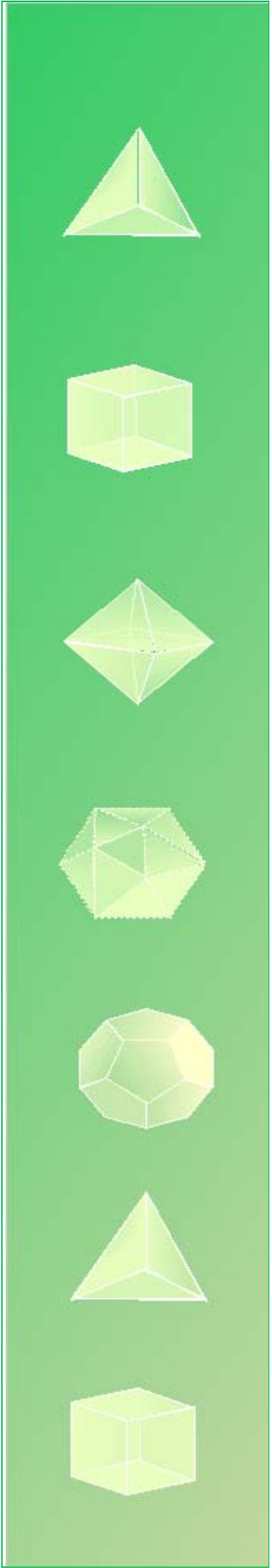
a) $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ b) $2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{5}$ c) $2+\sqrt{5}$ d) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$

10. ¿Cuál es el resultado en notación científica de la siguiente operación?: $5{,}83\cdot10^9+6{,}932\cdot10^{12}-7{,}5\cdot10^{10}$

a) $6{,}86283.10^{12}$ b) $6{,}86283\cdot10^{13}$ c) $6{,}8623\cdot10^{11}$ d) $6{,}8628\cdot10^{12}$

11. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación expresado en notación científica?: $\frac{5{,}24\cdot10^{10}}{6{,}3\cdot10^{-7}}$

a) $0{,}8317.10^{17}$ b) $8{,}317\cdot10^{16}$ c) $8{,}317\cdot10^{15}$ d) $83{,}17.10^{16}$



Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas:

4ºB ESO
Capítulo 3: Expresiones algebraicas. Polinomios.

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-044032

Fecha y hora de registro: 2014-05-28 18:13:02.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez

Revisor: Javier Rodrigo

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y commons.wikimedia

Índice

1. INTRODUCCIÓN. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1.1. INTRODUCCIÓN

1.2. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

2. POLINOMIOS. SUMA Y PRODUCTO

2.1. MONOMIOS. POLINOMIOS

2.2. SUMA DE POLINOMIOS

2.3. PRODUCTO DE POLINOMIOS

3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

3.1. INTRODUCCIÓN A LAS FRACCIONES POLINÓMICAS

3.2. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

3.3. OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

4. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN POLINOMIO

4.1. FACTORIZACIÓN DE UN POLINOMIO

4.2. RAÍCES DE UN POLINOMIO

4.3. REGLA DE RUFFINI

4.4. CÁLCULO DE LAS RAÍCES DE UN POLINOMIO

4.5. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

4.6. PRODUCTOS NOTABLES DE POLINOMIOS

Resumen

En multitud de situaciones el ser humano se ve obligado a cuantificar, a manejar cantidades, datos, números, ya sea para explicar algo ocurrido en el pasado, algún hecho que esté sucediendo en la actualidad, o para predecir o pronosticar el comportamiento de determinado fenómeno en el futuro. Pese a la dificultad que puedan encerrar esas justificaciones, algunas herramientas son de carácter sencillo, como las operaciones usuales de suma, resta, producto y división. En ocasiones hay que manejar datos aún no conocidos, por lo que aparecen indeterminadas o variables. La mezcla de números reales y las citadas cuatro operaciones básicas nos lleva a las expresiones algebraicas y, dentro de ellas, destacan unas expresiones concretas por su abundante uso y simplicidad de exposición, los polinomios.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. INTRODUCCIÓN. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1.1. Introducción

No hace falta imaginar situaciones rebuscadas para que, a la hora de realizar un razonamiento, nos topemos con alguna de las cuatro operaciones matemáticas básicas: suma, resta, multiplicación o división.

Ejemplos:

- Tres amigos han realizado un viaje de vacaciones. A la vuelta, han sumado los gastos efectuados y éstos ascienden a 414 euros. El gasto realizado por cada uno ha sido de $\frac{414}{3}$ euros, es decir, 138 euros.

- Si vamos a comprar mandarinas a una frutería en la que el precio de un kilogramo es de 1'25 euros, resulta habitual que, según vamos introduciendo la fruta en una bolsa, vayamos tanteando el importe final. Para ello podemos colocar varias veces la bolsa sobre una balanza y, tras observar el peso, realizamos la operación

$$1'25 \cdot x$$

donde x es la cantidad de kilogramos que nos ha indicado la balanza. Después de cada pesada, el resultado de esa multiplicación refleja el importe de las mandarinas que, en ese momento, contiene la bolsa.

- Supongamos que tenemos un contrato con una compañía de telefonía móvil por el que pagamos 5 céntimos de euro por minuto, así como 12 céntimos por establecimiento de llamada. Con esa tarifa, una llamada de 3 minutos nos costará:

$$(0'05 \cdot 3) + 0'12 = 0'15 + 0'12 = 0'27 \text{ euros}$$

Pero ¿cuál es el precio de una llamada cualquiera? Como desconocemos su duración, nos encontramos con una cantidad no determinada, o indeterminada, por lo que en cualquier respuesta que demos a la pregunta anterior se apreciará la ausencia de ese dato concreto. Podemos decir que el coste de una llamada cualquiera es

$$(0'05 \cdot x) + 0'12 = 0'05 \cdot x + 0'12 \text{ euros}$$

donde x señala su duración, en minutos.

Actividades propuestas

1. A finales de cada mes la empresa de telefonía móvil nos proporciona la factura mensual. En ella aparece mucha información, en particular, el número total de llamadas realizadas (N) así como la cantidad total de minutos de conversación (M). Con los datos del anterior ejemplo, justifica que el importe de las llamadas efectuadas durante ese mes es:

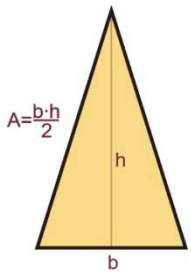
$$(0'05 \cdot M) + (0'12 \cdot N) = 0'05 \cdot M + 0'12 \cdot N \text{ euros}$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

Ejemplo:

- Es bien conocida la *fórmula* del área de un triángulo de base *b* y altura asociada *h*:

$$\frac{b \cdot h}{2}$$



En todos estos ejemplos han surgido **expresiones algebraicas**.

1.2. Expresiones algebraicas

Llamamos **expresión algebraica** a cualquier expresión matemática que se construya con números reales y las operaciones matemáticas básicas: suma, resta, multiplicación y/o división. En una expresión algebraica puede haber datos no concretados; según el contexto, recibirán el nombre de ***variable***, ***indeterminada***, ***parámetro***, entre otros.

Si en una expresión algebraica no hay *variables*, dicha expresión no es más que un número real:

Ejemplo:

$$\frac{3\cdot(-7)}{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}+1=\frac{-21}{\frac{4\cdot 3}{5\cdot 3}-\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}}+1=\frac{-21}{\frac{12}{15}-\frac{10}{15}}+1=\frac{-21}{\frac{2}{15}}+1=\frac{-21\cdot 15}{2}+1=\frac{-315}{2}+1=\frac{-315}{2}+\frac{2}{2}=\frac{-313}{2}$$

Al fijar un valor concreto para cada *indeterminada* de una expresión algebraica aparece un número real: el **valor numérico** de esa expresión algebraica para tales valores de las indeterminadas.

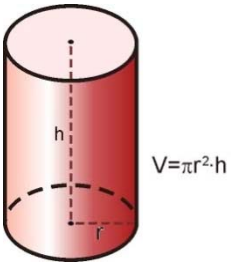
Ejemplo:

- El volumen de un cilindro viene dado por la expresión algebraica

$$\pi \cdot r^2 \cdot h$$

en la que *r* es el radio del círculo base y *h* es su altura. De este modo, el volumen de un cilindro cuya base tiene un radio de 10 cm y de altura 15 cm es igual a:

$$\pi \cdot 10^2 \cdot 15 = 1500 \cdot \pi \quad cm^3$$



- La expresión algebraica que representa el producto de los cuadrados de dos números cualesquiera x e y se simboliza por $x^2 \cdot y^2$.
- Si en la expresión

$$7+\frac{x}{2}+x\cdot y^3-\frac{6}{z}$$

particularizamos las tres variables con los valores

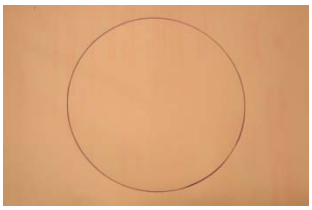
$$x=4,\ y=-1,\ z=\frac{1}{2}$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

surge el número real

$$7+\frac{4}{2}+4\cdot(-1)^3-\frac{6}{1/2}=7+2-4-12=-7$$

En una expresión algebraica puede no tener sentido otorgar algún valor a cierta indeterminada. En efecto, en el último ejemplo no es posible hacer $z=0$.



Actividades propuestas

2. Recuerda la expresión algebraica que nos proporciona la longitud de una circunferencia.

3. Escribe en lenguaje algebraico los siguientes enunciados, referidos a dos números cualesquiera x e y:

a) La mitad del opuesto de su suma.

b) La suma de sus cubos

c) El cubo de su suma

d) El inverso de su suma

e) La suma de sus inversos

4. Una tienda de ropa anuncia en sus escaparates que está de rebajas y que todos sus artículos están rebajados un 20 % sobre el precio impreso en cada etiqueta. Escribe lo que pagaremos por una prenda en función de lo que aparece en su etiqueta.

5. El anterior comercio, en los últimos días del periodo de rebajas, desea deshacerse de sus existencias y para ello ha decidido aumentar el descuento. Mantiene el 20 % para la compra de una única prenda y, a partir de la segunda, el descuento total aumenta un 5 % por cada nueva pieza de ropa, hasta un máximo de 10 artículos. Analiza cuánto pagaremos al realizar una compra en función de la suma total de las cantidades que figuran en las etiquetas y del número de artículos que se adquieran.

6. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para el valor o valores que se indican:

a) $x^2 + 7x - 12$ para $x = 0$.

b) $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ para $a = -3$ y $b = 4$.

c) $a^2 - 5a + 2$ para $a = -1$.

7. Indica, en cada caso, el valor numérico de la siguiente expresión: $10x + 20y + 30z$

a) $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$

b) $x = 2$, $y = 0$, $z = 5$

c) $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

2. POLINOMIOS. SUMA Y PRODUCTO

2.1. Monomios. Polinomios

Unas expresiones algebraicas de gran utilidad son los **polinomios**, cuya versión más simple y, a la vez, generadora de ellos, son los **monomios**.

Un **monomio** viene dado por el producto de números reales e indeterminadas. Llamaremos **coeficiente** de un monomio al número real que multiplica a la indeterminada, o indeterminadas; la indeterminada, o indeterminadas, conforman la **parte literal** del monomio.

Ejemplos:

- La expresión que nos proporciona el doble de una cantidad, $2 \cdot x$, es un monomio con una única variable, x, y coeficiente 2.
- El volumen de un cilindro, $\pi \cdot r^2 \cdot h$, es un monomio con dos indeterminadas, r y h, y coeficiente π. Su parte literal es $r^2 \cdot h$.
- Otros monomios: $\frac{4}{7} \cdot x^2 \cdot y^3$, $5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$
- La expresión $7xy^2 + 3xy - 2x$ está formada por tres términos, tres monomios. Cada uno tiene un coeficiente y una parte literal:

  En el primero, $7xy^2$, el coeficiente es 7 y la parte literal xy^2

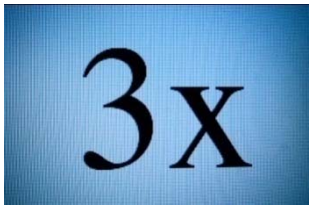
  El segundo, $3xy$, tiene por coeficiente 3 y parte literal xy

  Y en el tercero, $-2x$, el coeficiente es -2 y la parte literal x

Atendiendo al exponente de la variable, o variables, adjudicaremos un **grado** a cada monomio con arreglo al siguiente criterio:

- Cuando haya una única indeterminada, el grado del monomio será el exponente de su indeterminada.
- Si aparecen varias indeterminadas, el grado del monomio será la suma de los exponentes de esas indeterminadas.

Ejemplos:



- $2 \cdot x$ es un monomio de grado 1 en la variable x.
- $\pi \cdot r^2 \cdot h$ es un monomio de grado 3 en las indeterminadas r y h.
- $\frac{4}{7} \cdot x^2 \cdot y^3$ es un monomio de grado 5 en x e y.
- $5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$ es un monomio de grado 4 en x, y y z.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Un número real puede ser considerado como un monomio de grado 0.

Un **polinomio** es una expresión construida a partir de la suma de monomios. El **grado de un polinomio** vendrá dado por el mayor grado de sus monomios.

Ejemplos:

- $\frac{1}{5}\cdot x^2 - 7\cdot x^3 + 2$ es un polinomio de grado 3 en la variable x.
- $-3\cdot y^4 + 8\cdot x^2 + 2\cdot x$ es un polinomio de grado 4 en las indeterminadas x e y.
- $4\cdot x^2\cdot y^3 - 7 + 3\cdot y^2$ es un polinomio de grado 5 en x e y.
- $x - 2\cdot y + 6\cdot z$ es un polinomio de grado 1 en x, y y z.

Tanto en esta sección como en la siguiente nos limitaremos, básicamente, a considerar polinomios con una única variable. Es habitual escribir los diferentes monomios de un polinomio de forma que sus grados vayan en descenso para, con este criterio, apreciar en su primer monomio cuál es el grado del polinomio.

El aspecto genérico de un polinomio en la variable x es

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde los coeficientes a_k son números reales.

Decimos que un polinomio es **mónico** cuando el coeficiente de su término de mayor grado es igual a 1.

Ejemplos:

- $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ es un polinomio de grado 4 en la variable x.
- $4y^3 + 3y - 7$ es un polinomio de grado 3 en la indeterminada y.
- $z^2 - 3z + 12$ es un polinomio de grado 2 en z. Además, es un polinomio mónico.
- $3x + 9$ es un polinomio de grado 1 en x.

Como ocurre con cualquier expresión algebraica, si fijamos, o escogemos, un valor concreto para la variable de un polinomio aparece un número real: el **valor numérico** del polinomio para ese valor determinado de la variable. Si hemos llamado p a un polinomio, a la evaluación de p en, por ejemplo, el número -3 la denotamos por $p(-3)$, y leemos *"p de menos tres"* o *"p en menos tres"*. Con este criterio, si p es un polinomio cuya indeterminada es la variable x, podemos referirnos a él como p o $p(x)$ indistintamente.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

De esta forma apreciamos que un polinomio puede ser entendido como una manera concreta de asignar a cada número real otro número real.

Ejemplos:

- Si evaluamos el polinomio $p \equiv -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ en $x=5$ nos encontramos con el número

$$p(5) = -3 \cdot 5^4 + \frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 = -3 \cdot 625 + 5 + 2 = -1875 + 7 = -1868$$

- El valor del polinomio $q(y) = 4y^3 + 3y - 7$ para $y = -1$ es

$$q(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1) - 7 = 4 \cdot (-1) - 3 - 7 = -4 - 10 = -14$$

- Al particularizar el polinomio $r \equiv z^2 - 3z + 12$ en $z=0$ resulta el número $r(0) = 12$.

2.2. Suma de polinomios

Como un polinomio es una suma de monomios, la suma de dos polinomios es otro polinomio. A la hora de sumar dos polinomios procederemos a sumar los monomios de igual parte literal.

Ejemplos:

- La suma de los polinomios $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ y $-x^4 + 4x^2 - 5x - 6$ es el polinomio

$$\left(-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2\right) + (-x^4 + 4x^2 - 5x - 6) = (-3x^4 - x^4) + \left(\frac{1}{5}x^2 + 4x^2\right) - 5x + (2-6) =$$

$$= (-3-1) \cdot x^4 + \left(\frac{1}{5} + 4\right) \cdot x^2 - 5x + (2-6) = -4x^4 + \frac{21}{5}x^2 - 5x - 4$$

- $(5x^2 - 3x + 1) + (x^2 + 4x - 7) = (5x^2 + x^2) + (-3x + 4x) + (1 - 7) = 6x^2 + x - 6$
- $(2x^3 + 1) + (-x^4 + 4x) = -x^4 + 2x^3 + 4x + 1$
- $(x^3 + 9) + (-x^3 + 2) = 11$
- $3xy + 5xy + 2x = 8xy + 2x$

En el siguiente ejemplo sumaremos dos polinomios disponiéndolos, adecuadamente, uno sobre otro.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & & 4x^5 & +2x^4 & +x^3 & -5x^2 & +x & +4 \\ + & & -7x^5 & & +4x^3 & +5x^2 & -3x & -6 \\ \hline & & -3x^5 & +2x^4 & +5x^3 & & -2x & -2 \end{array}$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Propiedades de la suma de polinomios

Propiedad conmutativa. Si *p* y *q* son dos polinomios, no importa el orden en el que los coloquemos a la hora de sumarlos:

$$p+q\equiv q+p$$

Ejemplo:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)=-x^3+(4x^2+x^2)+(-2x-3x)+(7+1)=-x^3+5x^2-5x+8$$

$$(-x^3+x^2-3x+1)+(4x^2-2x+7)=-x^3+(x^2+4x^2)+(-3x-2x)+(1+7)=-x^3+5x^2-5x+8$$

Propiedad asociativa. Nos señala cómo se pueden sumar tres o más polinomios. Basta hacerlo agrupándolos de dos en dos:

$$(p+q)+r\equiv p+(q+r)$$

Ejemplo:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=$$
$$=(-x^3+5x^2-5x+8)+(x-6)=-x^3+5x^2-4x+2$$

También:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1+x-6)=$$
$$=(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-2x-5)=-x^3+5x^2-4x+2$$

Actividades propuestas

8. Realiza las siguientes sumas de polinomios:

- $(x^2-x)+(-2x^2-3x+1)+(2x^3-2x^2+x-2)$
- $-x^4+(x^3+2x-3)+(-3x^2-5x+4)+(2x^3-x+5)$

Elemento neutro. Hay un polinomio con una propiedad particular: el resultado de sumarlo con cualquier otro siempre es éste último. Se trata del polinomio dado por el número 0, el *polinomio cero*.

Ejemplo:

$$0+(-7x^3+3x+7)=(-7x^3+3x+7)+0=-7x^3+3x+7$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

Elemento opuesto. Cada polinomio tiene asociado otro, al que llamaremos su *polinomio opuesto*, tal que la suma de ambos es igual al polinomio cero. Alcanzamos el polinomio opuesto de uno dado, simplemente, cambiando el signo de cada monomio.

Ejemplo:

- El polinomio opuesto de $p \equiv -2x^4 + x^3 + 2x - 7$ es $2x^4 - x^3 - 2x + 7$, al que denotaremos como "$-p$". Ratifiquemos que su suma es el polinomio cero:

$$(-2x^4 + x^3 + 2x - 7) + (2x^4 - x^3 - 2x + 7) = (-2x^4 + 2x^4) + (x^3 - x^3) + (2x - 2x) + (-7 + 7) = 0$$

Actividades propuestas

9. Escribe el polinomio opuesto de cada uno de los siguientes polinomios:

- $3x^4 + 5x^3 + x^2 + 4x - 1$
- $7x$
- $-x^4 + 3x^2$

10. Considera los polinomios $p \equiv -x^3 - 5x + 2$, $q \equiv 3x^2 + 3x + 1$, así como el polinomio suma $s \equiv p + q$. Halla los valores que adopta cada uno de ellos para $x = -2$, es decir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ y $s(-2)$. Estudia si existe alguna relación entre esos tres valores.

11. Obtén el valor del polinomio $p \equiv -x^3 - 5x + 2$ en $x = 3$. ¿Qué valor toma el polinomio opuesto de p en $x = 3$?

2.3. Producto de polinomios

Otra operación que podemos realizar con polinomios es la multiplicación.

El resultado del producto de polinomios siempre será otro polinomio. Aunque en un polinomio tenemos una indeterminada, o variable, como ella toma valores en los números reales, a la hora de multiplicar polinomios utilizaremos las propiedades de la suma y el producto de los números reales, en particular la propiedad distributiva del producto respecto de la suma; así, todo queda en función del producto de monomios, cuestión que resolvemos con facilidad:

$$ax^n \cdot bx^m = abx^{n+m}$$

Ejemplos:

- $(-5)x^2 \cdot 2x^4 = (-5) \cdot 2 \cdot x^{2+4} = -10x^6$
- $5x^3 \cdot (-4) = 5 \cdot (-4) \cdot x^3 = -20x^3$
- $3x^2 \cdot (2x^2 - 4x + 6) = (3x^2 \cdot 2x^2) - (3x^2 \cdot 4x) + (3x^2 \cdot 6) = 6x^4 - 12x^3 + 18x^2$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

- $(-x^3+3x-1)\cdot(-2x)=(-x^3)\cdot(-2x)+(3x)\cdot(-2x)+(-1)\cdot(-2x)=2x^4-6x^2+2x$
- $(3x-2)\cdot(x^2-4x-5)=(3x)\cdot(x^2-4x-5)+(-2)\cdot(x^2-4x-5)=(3x^3-12x^2-15x)+(-2x^2+8x+10)=$
  $=3x^3+(-12x^2-2x^2)+(-15x+8x)+10=3x^3-14x^2-7x+10$
- $(x-6)\cdot(x^3-2x)=(x-6)\cdot x^3+(x-6)\cdot(-2x)=(x^4-6x^3)+(-2x^2+12x)=x^4-6x^3-2x^2+12x$

También podemos materializar el producto de polinomios tal y como multiplicamos números enteros:

Ejemplo:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & & & -2x^3 & +x+4 \\
 & & & \times & x^2 & -3x+1 \\
\hline
 & & & -2x^3 & & +x+4 \\
 & & 6x^4 & & -3x^2 & -12x \\
 & -2x^5 & & +x^3 & +4x^2 & \\
\hline
 & -2x^5 & +6x^4 & -x^3 & +x^2 & -11x+4
\end{array}$$

Recordemos que el polinomio *opuesto* de otro se obtiene simplemente cambiando el signo de cada monomio. Esta acción se corresponde con multiplicar por el número "-1" el polinomio original. De esta forma el polinomio opuesto de p es

$$-p\equiv(-1)\cdot p$$

En este momento aparece de manera natural la **operación diferencia**, o **resta**, de polinomios. La definimos con la ayuda del polinomio opuesto de uno dado:

$$p-q\equiv p+(-q)\equiv p+(-1)\cdot q$$

Ejemplo:

$$(-5x^2-3x+2)-(-2x^4+x^3+3x^2+6)=(-5x^2-3x+2)+(2x^4-x^3-3x^2-6)=$$
$$=2x^4-x^3+(-5x^2-3x^2)-3x+(2-6)=2x^4-x^3-8x^2-3x-4$$

Actividades propuestas

12. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

- $(-4x^3+2x)\cdot(-3x^2)$
- $(2x^4+x)\cdot(-3x-4)$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

- $(2x^3+x^2-x)\cdot(3x^2-x)$
- $(-1)\cdot(7x^3-4x^2-3x+1)$

13. Realiza las siguientes diferencias de polinomios:

- $(-4x^3+2x)-(-3x^2)$
- $(2x^4+x)-(-3x-4)$
- $(3x^2-x)-(2x^3+x^2-x)$

14. Multiplica cada uno de los siguientes polinomios por un número de tal forma que surjan polinomios mónicos:

- $4x^3-3x^2+2x$
- $-2x^4+x-1$
- $-x^2+x-7$

15. Calcula y simplifica los siguientes productos:

a) $3x\cdot(2x^2+4x-6)$ b) $(3x-4)\cdot(4x+6)$

c) $(2a^2-5b)\cdot(4b-3a^3)$ d) $(3a-6)\cdot(8-2a)\cdot(9a-2)$

Propiedades del producto de polinomios

Propiedad conmutativa. Si *p* y *q* son dos polinomios, no importa el orden en el que los coloquemos a la hora de multiplicarlos:

$$p\cdot q\equiv q\cdot p$$

Ejemplo:

$$(2x-7)\cdot(-x^3+x^2)=2x\cdot(-x^3+x^2)-7\cdot(-x^3+x^2)=-2x^4+2x^3+7x^3-7x^2=-2x^4+9x^3-7x^2$$

$$(-x^3+x^2)\cdot(2x-7)=-x^3\cdot(2x-7)+x^2\cdot(2x-7)=-2x^4+7x^3+2x^3-7x^2=-2x^4+9x^3-7x^2$$

Propiedad asociativa. Nos señala cómo se pueden multiplicar tres o más polinomios. Basta hacerlo agrupándolos de dos en dos:

$$(p\cdot q)\cdot r\equiv p\cdot(q\cdot r)$$

Ejemplo:

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

$$\left((4x^2-2)\cdot(-3x+1)\right)\cdot(-x^3+x)=(-12x^3+4x^2+6x-2)\cdot(-x^3+x)=$$
$$=12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

También:

$$(4x^2-2)\cdot\left((-3x+1)\cdot(-x^3+x)\right)=(4x^2-2)\cdot(3x^4-3x^2-x^3+x)=$$
$$=12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

Actividades propuestas

16. Realiza los siguientes productos de polinomios:

- $x^2\cdot(-2x^2-3x+1)\cdot 2x^3$
- $(2x-3)\cdot(-3x^2-5x+4)\cdot(-x)$

Elemento neutro. Hay un polinomio con una propiedad particular: al multiplicarlo por cualquier otro siempre nos da éste último. Se trata del polinomio dado por el número 1, el *polinomio unidad*.

Ejemplo:

$$1\cdot(-5x^3-2x+3)=(-5x^3-2x+3)\cdot 1=-5x^3-2x+3$$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma. Cuando en una multiplicación de polinomios uno de los factores viene dado como la suma de dos polinomios como, por ejemplo,

$$(3x^2-x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right)$$

tenemos dos opciones para conocer el resultado:

a) realizar la suma y, después, multiplicar

$$(3x^2-x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right)=(3x^2-x)\cdot\left(x^3-6x+7\right)=$$
$$=3x^5-18x^3+21x^2-x^4+6x^2-7x=3x^5-x^4-18x^3+27x^2-7x$$

b) distribuir, aplicar, la multiplicación a cada uno de los sumandos y, después, sumar:

$$(3x^2-x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right)=(3x^2-x)\cdot(-2x+7)+(3x^2-x)\cdot(x^3-4x)=$$
$$=(-6x^3+21x^2+2x^2-7x)+(3x^5-12x^3-x^4+4x^2)=3x^5-x^4-18x^3+27x^2-7x$$

Comprobamos que obtenemos el mismo resultado.

En general, la **propiedad distributiva** de la multiplicación respecto de la suma nos dice que

$$p\cdot(q+r)\equiv(p\cdot q)+(p\cdot r)$$

Conviene comentar que la anterior propiedad distributiva leída en sentido contrario, de derecha a izquierda, es lo que comúnmente se denomina **sacar factor común**.

Ejemplo:

$$6x^5-4x^4-18x^3+2x^2=(3x^3-2x^2-9x+1)\cdot 2x^2$$

Actividades propuestas

17. De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:

a) $-15x^3-20x^2+10x$ b) $24x^4-30x^2$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

3.1. Introducción a las fracciones polinómicas

Hasta este momento hemos estudiado varias operaciones con polinomios: suma, resta y producto. En cualquiera de los casos el resultado siempre es otro polinomio. Cuando establecemos una **fracción polinómica** como, por ejemplo,

$$\frac{3x^3 - x}{2x^2 + x - 3}$$

lo que tenemos es una expresión algebraica, una **fracción algebraica**, la cual, en general, no es un polinomio. Sí aparece un polinomio en el muy particular caso en el que el denominador es un número real diferente de cero, esto es, un polinomio de grado 0.

Es sencillo constatar que la expresión anterior no es un polinomio: cualquier polinomio puede ser evaluado en cualquier número real. Sin embargo esa expresión no puede ser evaluada para $x=1$, ya que nos quedaría el número 0 en el denominador.

Podríamos creer que la siguiente fracción polinómica sí es un polinomio:

$$\frac{-2x^3 + 5x^2 - 3x}{x} = \frac{-2x^3}{x} + \frac{5x^2}{x} + \frac{-3x}{x} = -2x^2 + 5x - 3$$

La expresión de la derecha sí es un polinomio, pues se trata de una suma de monomios, pero la de la izquierda no lo es ya que no puede ser evaluada en $x=0$. No obstante, esa fracción algebraica y el polinomio, cuando son evaluados en cualquier número diferente de cero, ofrecen el mismo valor. Son **expresiones equivalentes** allí donde ambas tienen sentido.

3.2. División de polinomios

Aunque, como hemos visto en el apartado anterior, una fracción polinómica, en general, no es un polinomio, vamos a adentrarnos en la división de polinomios pues es una cuestión importante y útil.

Analicemos con detenimiento la división de dos números enteros positivos. Cuando dividimos dos números, *D* (dividendo) entre *d* (divisor, distinto de 0), surgen otros dos, el cociente (*c*) y el resto (*r*). Ellos se encuentran ligados por la llamada *prueba de la división*:

$$D = d \cdot c + r$$

Alternativamente:

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$

Además, decimos que la división es exacta cuando $r=0$.

El conocido algoritmo de la división persigue encontrar un número entero, el cociente *c*, tal que el resto *r* sea un número menor que el divisor *d*, y mayor o igual que cero. Fijémonos en que, sin esta exigencia para el resto *r*, podemos escoger arbitrariamente un valor para el cociente *c* el cual nos suministra su valor asociado como resto *r*. En efecto, si tenemos como dividendo *D* = 673 y como divisor *d* = 12, "si queremos" que el cociente sea *c* = 48 su resto asociado es

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

$$r = D - d \cdot c = 673 - 12 \cdot 48 = 673 - 576 = 97$$

y la conexión entre estos cuatro números es

$$673 = 12 \cdot 48 + 97$$

Esta última "lectura" de la división de números enteros va a guiarnos a la hora de dividir dos polinomios.

Dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, la división de $p(x)$, polinomio dividendo, entre $q(x)$, polinomio divisor, nos proporcionará otros dos polinomios, el polinomio cociente $c(x)$ y el polinomio resto $r(x)$. También aquí pesará una exigencia sobre el polinomio resto: su grado deberá ser menor que el grado del polinomio divisor. La relación entre los cuatro será, naturalmente,

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

También escribiremos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

aunque, en tal caso, seremos conscientes de las cautelas señaladas en el apartado anterior en cuanto a las equivalencias entre polinomios y otras expresiones algebraicas.

Al igual que ocurre con el algoritmo de la división entera, el algoritmo de la división de polinomios consta de varias etapas, de carácter repetitivo, en cada una de las cuales aparecen unos polinomios cociente y resto "provisionales" de forma que el grado de esos polinomios resto va descendiendo hasta que nos topamos con uno cuyo grado es inferior al grado del polinomio divisor, lo que indica que hemos concluido. Veamos este procedimiento con un ejemplo concreto.

Ejemplo:

Vamos a dividir el polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$. Como el polinomio divisor, $q(x)$, es de grado 2, debemos encontrar dos polinomios, un polinomio cociente $c(x)$, y un polinomio resto $r(x)$ de grado 1 o 0, tales que

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

o, como igualdad entre expresiones algebraicas,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

A la vista de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$, y de lo dicho sobre $r(x)$, es evidente que el grado del polinomio cociente, $c(x)$, ha de ser igual a 2. Vamos a obtenerlo monomio a monomio.

- Primera aproximación a los polinomios cociente y resto:

Para poder lograr la igualdad $p \equiv q \cdot c + r$, como el grado de $r(x)$ será 1 o 0, el término de mayor grado de $p(x)$, $6x^4$, surgirá del producto $q(x) \cdot c(x)$. Así obtenemos la primera aproximación de $c(x)$, su monomio de mayor grado:

$$c_1(x) = 3x^2$$

y, de manera automática, también un primer resto $r_1(x)$:

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$r_1(x) = p(x) - q(x)\cdot c_1(x) = (6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2) - (2x^2 - x + 3)\cdot 3x^2 =$$
$$= (6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2) - (6x^4 - 3x^3 + 9x^2) = 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2$$

Como este polinomio $r_1(x)$ es de grado 3, mayor que 2, el grado del polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto no es el definitivo; debemos continuar.

- Segunda aproximación a los polinomios cociente y resto:

Si particularizamos la igualdad entre expresiones algebraicas $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ a lo que tenemos hasta ahora resulta

$$\frac{6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3}$$

Esta segunda etapa consiste en dividir el polinomio $r_1(x) = 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2$, surgido como resto de la etapa anterior, entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$, el divisor inicial. Es decir, repetimos lo hecho antes pero considerando un nuevo polinomio dividendo: el polinomio resto del paso anterior.

El nuevo objetivo es alcanzar la igualdad $r_1 \equiv q\cdot c_2 + r$. Al igual que antes, el grado de $r(x)$ debería ser 1 o 0. Como el término de mayor grado de $r_1(x)$, $8x^3$, sale del producto $q(x)\cdot c_2(x)$, es necesario que el polinomio cociente contenga el monomio

$$c_2(x) = 4x$$

Ello nos lleva a un segundo resto $r_2(x)$:

$$r_2(x) = r_1(x) - q(x)\cdot c_2(x) = (8x^3 - 8x^2 + 3x - 2) - (2x^2 - x + 3)\cdot 4x =$$
$$= (8x^3 - 8x^2 + 3x - 2) - (8x^3 - 4x^2 + 12x) = -4x^2 - 9x - 2$$

Como este polinomio $r_2(x)$ es de grado 2, igual que el grado del polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto no es el definitivo; debemos continuar.

- Tercera aproximación a los polinomios cociente y resto:

Lo realizado en la etapa segunda nos permite avanzar en la adecuada descomposición de la expresión algebraica que nos ocupa:

$$\frac{6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + 4x + \frac{-4x^2 - 9x - 2}{2x^2 - x + 3}$$

Esta tercera etapa consiste en dividir el polinomio $r_2(x) = -4x^2 - 9x - 2$, el resto de la etapa anterior, entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$, el divisor inicial. De nuevo repetimos el algoritmo pero con otro polinomio dividendo: el polinomio resto del paso anterior.

Perseguimos que $r_2 \equiv q\cdot c_3 + r$. Como en cada paso, el grado de $r(x)$ debería ser 1 o 0. El término de mayor grado de $r_2(x)$, $-4x^2$, surge del producto $q(x)\cdot c_3(x)$, por lo que

$$c_3(x) = -2$$

y el tercer resto $r_3(x)$ es

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

$$r_3(x) = r_2(x) - q(x)\cdot c_3(x) = (-4x^2 - 9x - 2) - (2x^2 - x + 3)\cdot(-2) =$$
$$= (-4x^2 - 9x - 2) - (-4x^2 + 2x - 6) = -11x + 4$$

Como este polinomio $r_3(x)$ es de grado 1, menor que 2, grado del polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto sí es el definitivo. Hemos concluido:

$$\frac{6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + 4x + \frac{-4x^2 - 9x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + 4x - 2 + \frac{-11x + 4}{2x^2 - x + 3}$$

Si lo expresamos mediante polinomios:

$$6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 = (2x^2 - x + 3)\cdot(3x^2 + 4x - 2) + (-11x + 4)$$

Conclusión: al dividir el polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$ obtenemos como polinomio cociente $c(x) = 3x^2 + 4x - 2$ y como polinomio resto $r(x) = -11x + 4$.

Seguidamente vamos a agilizar la división de polinomios:

Actividades propuestas

18. Comprueba que los cálculos que tienes a continuación reflejan lo que se hizo en el ejemplo anterior para dividir el polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$.

- Primera etapa:

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 & 2x^2 - x + 3 \\ \cline{2-2} \underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} \qquad\qquad & 3x^2 \\ 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 & \end{array}$$

- Primera y segunda etapas:

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 & 2x^2 - x + 3 \\ \cline{2-2} \underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} \qquad\qquad & 3x^2 + 4x \\ 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 & \\ \underline{-8x^3 + 4x^2 - 12x} \qquad & \\ -4x^2 - 9x - 2 & \end{array}$$

- Las tres etapas:

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 & 2x^2 - x + 3 \\ \cline{2-2} \underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} \qquad\qquad & 3x^2 + 4x - 2 \\ 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 & \\ \underline{-8x^3 + 4x^2 - 12x} \qquad & \\ -4x^2 - 9x - 2 & \\ \underline{4x^2 - 2x + 6} & \\ -11x + 4 & \end{array}$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

19. Divide los siguientes polinomios:

- $2x^3 - x^2 - x + 7$ entre $x^2 - 2x + 4$
- $-10x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ entre $5x^3 - x^2 - x + 3$
- $4x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 3x - 7$ entre $-2x^2 + x + 3$
- $-8x^5 - 2x^4 + 10x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ entre $4x^3 + x^2 + x - 1$
- $-6x^5 + x^2 + 1$ entre $x^2 + 1$

20. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca $q(x) = x^2 + x - 3$ como polinomio cociente y $r(x) = -3x^2 + 1$ como resto.

3.3. Operaciones con fracciones algebraicas

Puesto que tanto los polinomios como las fracciones algebraicas obtenidas a partir de dos polinomios son, en potencia, números reales, operaremos con tales expresiones siguiendo las propiedades de los números reales.

- **Suma o resta.** Para sumar o restar dos fracciones polinómicas deberemos conseguir que tengan igual denominador. Una manera segura de lograrlo, aunque puede no ser la más adecuada, es ésta:

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} \equiv \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot q_2} + \frac{p_2 \cdot q_1}{q_2 \cdot q_1} \equiv \frac{p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1}{q_1 \cdot q_2}$$

- **Producto.** Basta multiplicar los numeradores y denominadores entre sí:

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \equiv \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2}$$

- **División.** Sigue la conocida regla de la división de fracciones numéricas:

$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}} \equiv \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot p_2}$$

Actividades propuestas

21. Efectúa los siguientes cálculos:

- $\dfrac{2x+1}{x^2+1} + \dfrac{3}{x}$
- $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{2}{x+1}$
- $\dfrac{-x}{x^2+3x} \cdot \dfrac{1}{x-1}$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- $\dfrac{x-2}{x^2+3x} : \dfrac{x-2}{x+3}$

22. Realiza las siguientes operaciones alterando, en cada apartado, únicamente uno de los denominadores, y su respectivo numerador:

- $\dfrac{-x^2+x-1}{x^3} + \dfrac{3x-2}{x^2}$
- $\dfrac{x-2}{x^2+3x} - \dfrac{4}{x+3}$

23. Comprueba las siguientes identidades simplificando la expresión del lado izquierdo de cada igualdad:

- $\dfrac{8a^4b^2}{2a^2b} = 4a^2b$
- $\dfrac{4x^3y^2-3xy^2}{2xy} = 2x^2y - \dfrac{3}{2}y$
- $\dfrac{3x^2-9x}{6x+12} = \dfrac{x^2-3x}{x+4}$
- $\dfrac{6a^2b^2+4a^2b-4ab}{2ab^2+16a^2b} = \dfrac{3ab+2a-2}{b+8a}$

24. Calcula los siguientes cocientes:

a) $(3x^3 - 9x^2 - 6x) : 3x$

b) $(7a^3 - 70a^2 - 21) : 7$

c) $(25x^4 - 10x^2) : 5x^2$

d) $(3x^2y^3 - 8xy^2) : xy^2$

25. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{3x^2-6x}{9x^2+15}$ b) $\dfrac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2}$ c) $\dfrac{x^2y+3xy^2}{4xy}$ d) $\dfrac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab}$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

4. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN POLINOMIO

4.1. Factorización de un polinomio

Tal y como ocurre con la división entera, la división de polinomios también puede ser **exacta**, es decir, el resto puede ser el polinomio cero.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ \cline{2-2} 04 & 12 \\ 0 & \end{array}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{rl}
3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8 & \quad \underline{|\ -3x^2+3x-2} \\
\underline{-3x^5+3x^4-2x^3} & \quad -x^3+2x-4 \\
-6x^3+18x^2-16x+8 & \\
\underline{6x^3-6x^2+4x} & \\
12x^2-12x+8 & \\
\underline{-12x^2+12x-8} & \\
0 &
\end{array}$$

En este caso escribimos

$$\frac{3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8}{-3x^2+3x-2}=-x^3+2x-4$$

y diremos que $q(x)=-3x^2+3x-2$ divide a $p(x)=3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8$. Si optamos por una igualdad polinómica:

$$3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8=(-3x^2+3x-2)\cdot(-x^3+2x-4)$$

Observamos que el haber obtenido como resto el polinomio 0 nos permite expresar el polinomio dividendo, $p(x)$, como producto de otros dos polinomios, los polinomios divisor y cociente, $q(x)\cdot c(x)$. Hemos alcanzado una **factorización** del polinomio $p(x)$, o una **descomposición en factores** de $p(x)$.

En general, un polinomio concreto puede ser factorizado, o descompuesto, por medio de diferentes grupos de factores. Si continuamos con el polinomio $p(x)$ anterior, una manera de obtener una descomposición alternativa consiste en, a su vez, alcanzar una factorización de alguno de los polinomios $q(x)$ o $c(x)$. Constatemos que el polinomio $-x^2+2x-2$ divide a $c(x)=-x^3+2x-4$:

$$\begin{array}{rl}
-x^3 \qquad +2x-4 & \quad \underline{|\ -x^2+2x-2} \\
\underline{x^3-2x^2+2x} & \quad x+2 \\
-2x^2+4x-4 & \\
\underline{2x^2-4x+4} & \\
0 &
\end{array}$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

En efecto, la división es exacta y ello nos lleva a la siguiente igualdad:

$$-x^3+2x-4=(-x^2+2x-2)\cdot(x+2)$$

Si la trasladamos a la descomposición que teníamos de $p(x)$:

$$3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8=(-3x^2+3x-2)\cdot(-x^2+2x-2)\cdot(x+2)$$

Actividades propuestas

26. Completa, cuando sea posible, las siguientes factorizaciones:

- $-2x^3+2x=-2x\cdot(\qquad)$
- $-6x^2+5x+6=(2x-3)\cdot(\qquad)$
- $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+1)\cdot(\qquad)$
- $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+2)\cdot(\qquad)$

27. Determina un polinomio de grado 4 que admita una descomposición factorial en la que participe el polinomio $6x^3-x^2+3x-1$.

Decimos que un polinomio es **reducible** si admite una factorización mediante polinomios de grado inferior al suyo. En caso contrario el polinomio será **irreducible**.

Es claro que los polinomios de grado 1 no pueden ser descompuestos como producto de otros dos polinomios de menor grado. Son polinomios irreducibles. En el siguiente apartado constataremos que hay polinomios de grado 2 que también son irreducibles.

De las diferentes factorizaciones que puede admitir un polinomio la que más información nos proporciona es aquella en la que todos los factores que intervienen son polinomios irreducibles, puesto que *no es mejorable*. Conviene advertir que, en general, no es fácil alcanzar ese tipo de descomposiciones. Seguidamente vamos a ahondar en esta cuestión.

4.2. Raíces de un polinomio

Dado un polinomio $p(x)$ diremos que un número real concreto α es **una raíz**, o **un cero**, del polinomio p, si al evaluar p en $x=\alpha$ obtenemos el número 0, esto es, si

$$p(\alpha)=0$$

Ejemplo:

Consideremos el polinomio $s(x)=2x^3+2x^2-8x-8$.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

- El número 2 es una raíz de $s(x)$, puesto que

$$s(2)=2\cdot 2^3+2\cdot 2^2-8\cdot 2-8=2\cdot 8+2\cdot 4-16-8=16+8-16-8=0$$

- Otra raíz de $s(x)$ es el número -1:

$$s(-1)=2\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)^2-8\cdot(-1)-8=2\cdot(-1)+2\cdot(+1)+8-8=-2+2+8-8=0$$

- En cambio, el número 1 no es una raíz de $s(x)$:

$$s(1)=2\cdot 1^3+2\cdot 1^2-8\cdot 1-8=2+2-8-8=4-16=-12\neq 0$$

- Tampoco es raíz de $s(x)$ el número 0:

$$s(0)=2\cdot 0^3+2\cdot 0^2-8\cdot 0-8=0+0-0-8=-8\neq 0$$

Actividades propuestas

28. Estudia si los siguientes números son o no raíz de los polinomios indicados:

- $x=3$ de x^3-3x^2+1
- $x=-2$ de x^3+3x^2+3x+2
- $x=1$ de x^3-3x^2+x+1
- $x=0$ de x^3-3x^2+1
- $x=-1$ de x^3-3x^2-x+3

En el siguiente ejercicio vamos a recoger algunas conexiones entre las raíces de un polinomio y las operaciones de suma y producto de polinomios.

Actividades propuestas

29. Supongamos que tenemos dos polinomios, $p_1(x)$ y $p_2(x)$, y un número real α.

- Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio suma $p_1(x)+p_2(x)$?
- Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio producto $p_1(x)\cdot p_2(x)$?
- ¿Hay alguna relación entre las raíces del polinomio $p_1(x)$ y las del polinomio $4\cdot p_1(x)$?

El que un número real sea raíz de un polinomio está fuertemente conectado con la factorización de dicho polinomio:

Si un número real concreto α es una raíz del polinomio $p(x)$, entonces el polinomio $x-\alpha$ divide a $p(x)$. Dicho de otro modo, el polinomio $p(x)$ admite una descomposición factorial de la siguiente forma:

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

para cierto polinomio $c(x)$, el cual puede ser conocido al dividir $p(x)$ entre $x-\alpha$.

Vamos a demostrar la anterior aseveración. Si dividimos $p(x)$ entre $x-\alpha$, obtendremos

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)+r(x)$$

Como el polinomio divisor, $x-\alpha$, es de grado 1, y el polinomio resto ha de ser de inferior grado, deducimos que el resto anterior es un número real β. Escribamos $r(x)\equiv\beta$:

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)+\beta$$

El polinomio de la izquierda, $p(x)$, es idéntico al de la derecha, $(x-\alpha)\cdot c(x)+\beta$. Por esa razón, al evaluarlos en cierto número real obtendremos el mismo valor. Procedamos a particularizarlos para $x=\alpha$. Al ser α raíz de $p(x)$, $p(\alpha)=0$. Esto nos lleva a

$$0=p(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot c(\alpha)+\beta=0\cdot c(\alpha)+\beta=0+\beta=\beta$$

y, así, el resto es 0, y

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

Es natural que nos preguntemos si es cierto el recíproco del resultado anterior. La respuesta es afirmativa:

Si un polinomio $p(x)$ admite una descomposición factorial de la forma

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

para cierto polinomio $c(x)$ y cierto número real α, entonces el número α es una raíz del polinomio $p(x)$, esto es, $p(\alpha)=0$.

Su demostración es sencilla. Basta que evaluemos p en $x=\alpha$:

$$p(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot c(\alpha)=0\cdot c(\alpha)=0$$

Si fundimos estos dos últimos resultados en uno solo nos encontramos ante el denominado *teorema del factor*:

Teorema del factor. Un número real concreto α es raíz de un polinomio $p(x)$ si y solo si el polinomio $x-\alpha$ divide a $p(x)$, es decir, si y solo si el polinomio $p(x)$ admite una descomposición factorial de la forma

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

Volvamos con el polinomio $s(x)=2x^3+2x^2-8x-8$.

- Sabemos que el número 2 es una raíz de $s(x)$. Ratifiquemos que $x-2$ divide a $s(x)$:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+2x^2-8x-8 & x-2 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^3+4x^2} & 2x^2+6x+4 \\ 6x^2-8x-8 & \\ \underline{-6x^2+12x} & \\ 4x-8 & \\ \underline{-4x+8} & \\ 0 & \end{array}$$

  Podemos descomponer $s(x)$ de la siguiente forma:

$$2x^3+2x^2-8x-8=(x-2)\cdot(2x^2+6x+4)$$

- Vimos que otra raíz de $s(x)$ es el número -1. Si observamos la precedente factorización de $s(x)$, es evidente que este número -1 no es raíz del factor $x-2$, por lo que necesariamente debe serlo del otro factor $c(x)=2x^2+6x+4$:

$$c(-1)=2\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)+4=2\cdot(+1)-6+4=0$$

  Al haber constatado que -1 es raíz del polinomio $c(x)$, deducimos que $x-(-1)=x+1$ nos va a ayudar a descomponer $c(x)$:

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+6x+4 & x+1 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^2-2x} & 2x+4 \\ 4x+4 & \\ \underline{-4x-4} & \\ 0 & \end{array}$$

  Luego:

$$2x^2+6x+4=(x+1)\cdot(2x+4)$$

- Si reunimos lo hecho en los apartados precedentes de este ejemplo:

$$s(x)=2x^3+2x^2-8x-8=(x-2)\cdot(2x^2+6x+4)=(x-2)\cdot(x+1)\cdot(2x+4)=$$
$$=(x-2)\cdot(x+1)\cdot 2\cdot(x+2)=2\cdot(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$$

  Se ha descompuesto $s(x)$ como producto de tres polinomios irreducibles de grado 1. A la vista de ellos conocemos todas las raíces de $s(x)$, los números 2, -1 y -2.

Los resultados teóricos que hemos establecido nos conducen a este otro:

Todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales, alguna de las cuales puede aparecer repetida entre esos no más de n números reales.

Hay polinomios que no admiten raíces, es decir, que no se anulan nunca:

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplos:

- El polinomio $t(x)=x^2+1$ no tiene raíces puesto que al evaluarlo en cualquier número real α siempre nos da un valor positivo y, por lo tanto, distinto de 0:

$$t(\alpha)=\alpha^2+1>0$$

  Además, este polinomio de grado dos, $t(x)=x^2+1$, es un polinomio irreducible porque, al carecer de raíces, no podemos expresarlo como producto de polinomios de menor grado.
- Otro polinomio sin raíces es

$$u(x)=(x^2+1)^2=(x^2+1)\cdot(x^2+1)=x^4+2x^2+1$$

  Sin embargo, $u(x)=x^4+2x^2+1$ es un polinomio reducible puesto que, obviamente, puede ser expresado como producto de dos polinomios de inferior grado.

Aunque no sea posible demostrarlo, por su dificultad, sí se puede anunciar que todo polinomio de grado impar posee, al menos, una raíz real.

Actividades propuestas

30. Construye un polinomio de grado 3 tal que posea tres raíces distintas.

31. Determina un polinomio de grado 3 tal que tenga, al menos, una raíz repetida.

32. Construye un polinomio de grado 3 de forma que tenga una única raíz.

33. Conjetura, y luego demuestra, una ley que nos permita saber cuándo un polinomio cualquiera

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_1x+a_0$$

admite al número 0 como raíz.

34. Demuestra una norma que señale cuándo un polinomio cualquiera

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_1x+a_0$$

admite al número 1 como raíz.

35. Obtén todas las raíces de cada uno de los siguientes polinomios:

- $x+7$
- $-x+5$
- $2x-3$
- $-4x-9$
- $-2x$
- x^2-3x
- $4x^2-x-3$
- x^3-x
- x^3+x

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4.3. Regla de Ruffini

En el apartado anterior se probó la equivalencia entre que un número real α sea raíz de un polinomio $p(x)$ y el hecho de que el polinomio mónico de grado uno $x-\alpha$ divida a $p(x)$, esto es, que exista otro polinomio $c(x)$ tal que sea posible una factorización de $p(x)$ del tipo:

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

Debido a la importancia que tiene la división de polinomios cuando el polinomio divisor es de la forma $x-\alpha$, es conveniente agilizar tales divisiones.

Ejemplo:

- Consideremos el polinomio $p(x)=3x^3-4x^2+x+3$. Vamos a dividirlo entre $x+2$. Si el resto es 0 el número -2 será una raíz de $p(x)$; en el caso contrario, si no es 0 el resto, entonces -2 no será raíz de $p(x)$.

$$\begin{array}{rl|l}
3x^3-4x^2+x+3 & & x+2 \\ \cline{3-3}
\underline{-3x^3-6x^2} & & 3x^2-10x+21 \\
-10x^2+\ x\ +3 & & \\
\underline{10x^2+20x} & & \\
21x+3 & & \\
\underline{-21x-42} & & \\
-39 & &
\end{array}$$

Puesto que el resto no es cero, -2 no es una raíz de $p(x)$.

Veamos cómo han surgido tanto el polinomio cociente como el resto. El que el grado del dividendo sea tres y que el divisor sea de grado uno impone que el cociente tenga grado dos y que el resto sea un número real. El cociente consta de los monomios $3x^2$, $-10x$ y 21, los cuales coinciden con los monomios de mayor grado de cada uno de los dividendos después de disminuir sus grados en una unidad: $3x^2$ procede de $3x^3-4x^2+x+3$ (el dividendo inicial), $-10x$ viene de $-10x^2+\ x\ +3$ y, por último, 21 de $21x+3$. Este hecho, coincidencia en el coeficiente y disminución del grado en una unidad, se debe a que el divisor, $x+2$, es mónico y de grado uno.

Seguidamente, vamos a tener en cuenta únicamente los coeficientes del dividendo, por orden de grado, 3, –4, 1 y 3; en cuanto al divisor, como es mónico y de grado uno, basta considerar su término independiente, +2, pero como el resultado de multiplicar los monomios que van conformando el cociente por el divisor hemos de restárselo a cada uno de los dividendos, atendiendo a este cambio de signo, en lugar del término independiente, +2, operaremos con su opuesto, –2, número que, a la vez, es la raíz del divisor $x+2$ y sobre el que pesa la pregunta de si es o no raíz de $p(x)$.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- Primer paso de la división:

$$\begin{array}{l|l} 3x^3-4x^2+x+3 & x+2 \\ \hline \underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2 \\ \quad -10x^2+\ x\ +3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & & \\ \hline & 3 & -10 & & \end{array}$$

Aparece en el cociente el monomio $3x^2$ (coeficiente 3), el cual provoca la "desaparición" de $3x^3$ en el dividendo y la aparición del monomio $-6x^2$ (coeficiente $-6=(-2)\cdot 3$). Después de operar (sumar) nos encontramos con $-10x^2$ (coeficiente $-10=(-4)+(-6)$) y, en el cociente, $-10x$.

- Segundo paso. El dividendo pasa a ser $-10x^2+\ x\ +3$.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3-4x^2+x+3 & x+2 \\ \hline \underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2-10x \\ \quad -10x^2+\ x\ +3 & \\ \quad \underline{10x^2+20x} & \\ \qquad\qquad 21x+3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & 20 & \\ \hline & 3 & -10 & 21 & \end{array}$$

La irrupción en el cociente del monomio $-10x$ (coeficiente -10) provoca la "desaparición" de $-10x^2$ en el dividendo y la aparición del monomio $20x$ (coeficiente $20=(-2)\cdot(-10)$). Después de operar (sumar) nos encontramos con $21x$ (coeficiente $21=1+20$) y, en el cociente, 21.

- Tercer paso. El dividendo pasa a ser $21x\ +3$.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3-4x^2+x+3 & x+2 \\ \hline \underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2-10x+21 \\ \quad -10x^2+\ x\ +3 & \\ \quad \underline{10x^2+20x} & \\ \qquad\qquad 21x+3 & \\ \qquad\quad \underline{-21x-42} & \\ \qquad\qquad\quad -39 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & 20 & -42 \\ \hline & 3 & -10 & 21 & -39 \end{array}$$

Tenemos en el cociente el término independiente 21. Éste provoca la eliminación de $21x$ en el dividendo y la aparición del término $-42=(-2)\cdot 21$. Después de operar (sumar) nos encontramos con el resto $-39=3-42$.

En cada uno de los pasos figura, en la parte derecha, lo mismo que se ha realizado en la división convencional, pero con la ventaja de que todo es más ágil debido a que únicamente se manejan números reales: los coeficientes de los distintos polinomios intervinientes.

Estamos ante la llamada **regla de Ruffini**, un algoritmo que nos proporciona tanto el cociente como el resto que resultan de dividir un polinomio cualquiera entre otro de la forma $x-\alpha$.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- Dividamos el polinomio $p(x)=-x^4+2x^3-5x+4$ entre $x-3$:

$$\begin{array}{c|ccccc} & -1 & 2 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & & -3 & -3 & -9 & -12 \\ \hline & -1 & -1 & -3 & -4 & \boxed{-8} \end{array}$$

El cociente es $-x^3-x^2-3x-4$ y el resto -8. Como el resto no es 0 deducimos que el número 3 no es raíz de $p(x)=-x^4+2x^3-5x+4$. La relación entre dividendo, divisor, cociente y resto es, como siempre:

$$p(x)=-x^4+2x^3-5x+4=(x-3)\cdot(-x^3-x^2-3x-4)+(-8)$$

Si evaluamos $p(x)$ en $x=3$ no puede dar cero, pero ¿qué valor resulta?

$$p(3)=(3-3)\cdot(-3^3-3^2-3\cdot 3-4)+(-8)=0+(-8)=-8$$

Naturalmente hemos obtenido el resto anterior. Este hecho viene recogido en el denominado teorema del resto.

Teorema del resto. El valor numérico que adopta un polinomio $p(x)$ al particularizarlo en $x=\alpha$ coincide con el resto que aparece al dividir $p(x)$ entre $x-\alpha$.

Actividades propuestas

36. Usa la regla de Ruffini para realizar las siguientes divisiones de polinomios:

- $-2x^2+x+1$ entre $x+1$
- x^3+2x^2-2x+1 entre $x+2$
- $4x^3-3x^2-1$ entre $x-1$
- x^3-9x+1 entre $x-3$

37. Emplea la regla de Ruffini para dictaminar si los siguientes números son o no raíces de los polinomios citados:

- $\alpha=3$ de x^3-4x^2+5
- $\beta=-2$ de $-x^3-2x^2+x+2$
- $\gamma=1$ de $-2x^4+x+1$
- $\sigma=-1$ de $2x^3+2x^2$
-

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

38. Utiliza la regla de Ruffini para conocer el valor del polinomio $-x^3+2x^2+x+2$ en $x=3$.

39. Estudia si es posible usar la regla de Ruffini, de alguna forma, para dividir x^3+3x^2+3x+2 entre $2x+6$.

Para facilitar la comprensión de los conceptos y resultados de este tema la mayoría de los números que han aparecido hasta ahora, coeficientes, raíces, etc., han sido números enteros. Por supuesto que podemos encontrarnos con polinomios con coeficientes racionales, o irracionales, o con polinomios con raíces dadas por una fracción o un número irracional. También existen polinomios que carecen de raíces.

Ejemplos:

- Comprobemos, mediante la regla de Ruffini, que $\alpha=\frac{1}{2}$ es raíz del polinomio $2x^2-3x+1$:

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & -3 & 1 \\ 1/2 & & 1 & -1 \\ \hline & 2 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

- Para conocer las raíces del polinomio x^2-2 debemos estudiar si hay algún número real α tal que lo anule, es decir, para el que se tenga

$$\alpha^2-2=0$$
$$\alpha^2=2$$
$$\alpha=\pm\sqrt{2}$$

  Así, el polinomio de grado dos x^2-2 tiene dos raíces distintas, las cuales son números irracionales.
- Ya sabemos que hay polinomios que carecen de raíces, como por ejemplo x^2+4.

Apreciamos que la regla de Ruffini nos informa sobre si un número concreto es o no raíz de un polinomio. Naturalmente, cuando estamos ante un polinomio, y nos interesa conocer sus raíces, no es posible efectuar una prueba con cada número real para determinar cuáles son raíz del polinomio. En el próximo apartado destacaremos ciertos “números candidatos” a ser raíz de un polinomio.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4.4. Cálculo de las raíces de un polinomio

A la hora de buscar las **raíces enteras de un polinomio** disponemos del siguiente resultado:

Dado un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

cuyos coeficientes son todos números enteros, sus **raíces enteras**, si las tuviera, se encuentran necesariamente entre los divisores enteros de su término independiente a_0.

Procedamos a su demostración. Supongamos que cierto número entero α es una raíz de ese polinomio. Tal número debe anularlo:

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots\ldots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0$$
$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots\ldots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha = -a_0$$
$$\alpha\cdot(a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + \ldots\ldots + a_2\alpha + a_1) = -a_0$$
$$a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + \ldots\ldots + a_2\alpha + a_1 = \frac{-a_0}{\alpha}$$

En la última igualdad, el número del lado izquierdo es entero, porque está expresado como una suma de productos de números enteros. Por ello, el número del lado derecho, $\frac{-a_0}{\alpha}$, también es entero. Al ser también enteros tanto $-a_0$ como α, alcanzamos que α es un divisor de a_0.

Ejemplos:

- Determinemos, con arreglo al anterior resultado, qué números enteros son candidatos a ser raíces del polinomio $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$:
  Tales números enteros candidatos deben ser divisores de -6, el término independiente del polinomio. Por ello, los únicos números enteros que pueden ser raíz de ese polinomio son:
  $$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$$
  Puede comprobarse que los números enteros 2 y -3 son raíces; los demás no lo son.
- Las únicas posibles raíces enteras del polinomio $2x^3 + x^2 + 12x + 6$ también son:
  $$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$$
  En este caso ninguno de esos números es raíz del polinomio.

Actividades propuestas

40. Para cada uno de los siguientes polinomios señala, en primer lugar, qué números enteros son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

- $x^3 - x^2 + 2x - 2$
- $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

- $2x^3+x^2-18x-9$
- $x^4+2x^3+3x^2+6x$

Algo más general podemos afirmar sobre clases de números y raíces de un polinomio:

Dado un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

cuyos coeficientes son todos números enteros, sus **raíces racionales**, si las tuviera, necesariamente tienen por numerador algún divisor del término independiente, a_0, y por denominador algún divisor del coeficiente del término de mayor grado, a_n.

Ejemplos:

- Volviendo a uno de los polinomios del ejemplo anterior, $2x^3+3x^2-11x-6$, los números racionales candidatos a ser raíces suyas tienen por numerador a un divisor de -6 y por denominador a un divisor de 2. Por lo tanto, los únicos números racionales que pueden ser raíz de ese polinomio son:

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6,\ \frac{\pm 1}{2},\ \frac{\pm 2}{2}=\pm 1,\ \frac{\pm 3}{2},\ \frac{\pm 6}{2}=\pm 3$$

  Además de 2 y -3, también es raíz $\frac{-1}{2}$; los demás no lo son.

- Las únicas posibles raíces racionales del polinomio $2x^4+2x^3-x^2-3x-3$ son:

$$\pm 1,\ \pm 3,\ \frac{\pm 1}{2},\ \frac{\pm 3}{2}$$

  En este caso ninguno de esos números es raíz del polinomio.

Actividades propuestas

41. Completa el ejemplo precedente comprobando que, en efecto, $\frac{-1}{2}$ es raíz del polinomio $2x^3+3x^2-11x-6$.

42. Para cada uno de los siguientes polinomios indica qué números racionales son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

- $3x^2+4x+1$
- $2x^3-9x^2+12x-4$

En el capítulo próximo, dedicado a las ecuaciones, seremos capaces de obtener las raíces de todo polinomio de grado dos, si las tuviere.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

4.5. Factorización de polinomios y fracciones algebraicas

La factorización de polinomios puede ser utilizada para simplificar algunas expresiones en las que intervienen fracciones algebraicas. Veámoslo a través de un par de ejemplos:

Ejemplo:

- Una fracción algebraica como

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}$$

puede ser simplificada gracias a que el numerador y el denominador admiten factorizaciones en las que algún polinomio está presente en ambas.

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}=\frac{(x^2+1)\cdot(x+3)\cdot(x-3)}{(x^2+1)\cdot(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-3)}=\frac{x+3}{(x+2)\cdot(x+1)}$$

Como ya hemos apuntado en otras ocasiones, las expresiones final e inicial no son idénticas pero sí son equivalentes en todos aquellos valores para los que ambas tienen sentido, esto es, para aquellos en los que no se anula el denominador.

Ejemplo:

- En una suma de fracciones polinómicas como ésta

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}$$

podemos alcanzar un común denominador en las fracciones a partir de la descomposición de cada denominador:

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}=\frac{3x-2}{x\cdot(x+1)}+\frac{4}{(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}+\frac{4\cdot x}{(x+1)\cdot(x-2)\cdot x}=$$

$$=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)+4x}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{3x^2-4x+4}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}$$

Conviene destacar que en el resultado final se ha optado por dejar el denominador factorizado. De esa forma, entre otras cuestiones, se aprecia rápidamente para qué valores de la indeterminada esa fracción algebraica no admite ser evaluada.

Actividades propuestas

43. Simplifica, si es posible, las siguientes expresiones:

$$\frac{x^2+4x}{x^3+3x^2-6x-8} \qquad \frac{x^2-1}{x^3+3x^2-6x-8} \qquad \frac{x^2-1}{x^3+x^2-6x}$$

44. Realiza las siguientes operaciones teniendo en cuenta las factorizaciones de los denominadores:

- $\dfrac{5}{-3x+12}+\dfrac{x+2}{x^2-4x}$
- $\dfrac{-x}{x^2-2x+1}-\dfrac{3x-1}{x^2-1}$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

4.6. Productos notables de polinomios

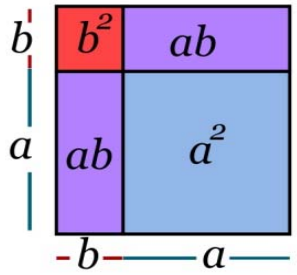
En este apartado vamos a destacar una serie de productos concretos de polinomios que surgen frecuentemente. Podemos exponerlos de muy diversas formas. Tal y como lo haremos, aparecerá más de una indeterminada; hemos de ser capaces de apreciar que si, en un algún caso concreto, alguna indeterminada pasa a ser un número concreto esto no hará nada más que particularizar una situación más general.

Potencias de un binomio. Las siguientes igualdades se obtienen, simplemente, tras efectuar los oportunos cálculos:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

  El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

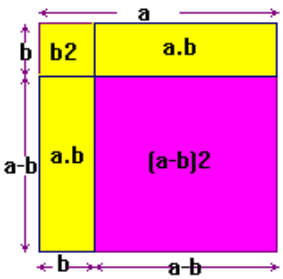
  Comprueba la igualdad a partir de los cuadrados y rectángulos de la ilustración.

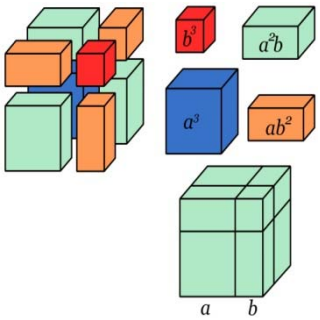


- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

  El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

  Observa la figura y conéctala con la igualdad.





- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Ratifica la igualdad con los cubos y prismas de la figura.

- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Podemos observar que, en cada uno de los desarrollos, el exponente del binomio coincide con el grado de cada uno de los monomios.

Ejemplos:

- $(a+3)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9$
- $(x-4)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
- $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5 + (5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

- $(x-6y)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 6y + (6y)^2 = x^2 - 12xy + 36y^2$
- $(2x-5)^3 = (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot 5 + 3\cdot(2x)\cdot 5^2 - 5^3 = 8x^3 - 60x^2 + 150x - 125$

Actividades propuestas

45. Realiza los cálculos:

- $(1+3a)^2$
- $(-x+3)^2$
- $(-3x-2)^2$
- $(x^2-1)^3$
- $(4x+2)^3$

46. Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios:

- $(a+b+c)^2$
- $(a+b-c)^2$

47. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(2x + 3y)^2$ b) $(3x + y/3)^2$ c) $(5x - 5/x)^2$

d) $(3a - 5)^2$ e) $(a^2 - b^2)^2$ f) $(3/5y - 2/y)^2$

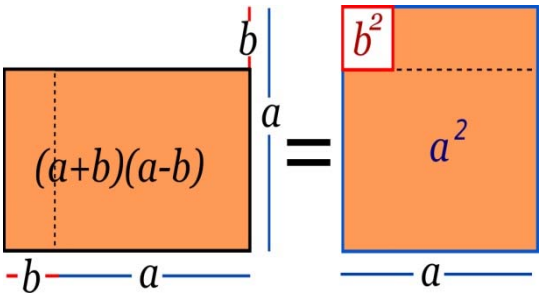
48. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia las siguientes expresiones algebraicas:

a) $a^2 + 6a + 9$ b) $4x^2 - 4x + 1$ c) $b^2 - 10b + 25$

d) $4y^2 + 12y + 9$ e) $a^4 - 2a^2 + 1$ f) $y^4 + 6y^2 + 9$

Suma por diferencia. De nuevo la siguiente igualdad se obtiene tras efectuar el producto señalado:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$



Suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados.

Observa las figuras y conéctalas con la igualdad.

Ejemplos:

- $(a+7)\cdot(a-7) = a^2 - 7^2 = a^2 - 49$
- $(x+1)\cdot(x-1) = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$
- $(2x+3)\cdot(2x-3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$
- $(-3x-5)\cdot(-3x+5) = (-1)\cdot(3x+5)\cdot(-3x+5) = (-1)\cdot(5+3x)\cdot(5-3x) =$
  $= (-1)\cdot(5^2 - (3x)^2) = -25 + 9x^2$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

Actividades propuestas

49. Efectúa estos productos:

- $(4x+3y)\cdot(4x-3y)$
- $(2x^2+4)\cdot(2x^2-4)$
- $(-x^2+3x)\cdot(x^2+3x)$

De vuelta a los polinomios de una variable, podemos decir que en este apartado hemos expandido *potencias de un polinomio*, o productos de un polinomio por sí mismo, así como productos de la forma *suma por diferencia*. Conviene darse cuenta de que sus fórmulas, leídas al revés, constituyen una factorización de un polinomio.

Ejemplos:

- $x^2+12x+36=x^2+2\cdot 6\cdot x+6^2=(x+6)^2$
- $2x^3-12x^2+18x=2x\cdot(x^2-6x+9)=2x\cdot(x^2-2\cdot 3\cdot x+3^2)=2x\cdot(x-3)^2$
- $x^2-5=(x+\sqrt{5})\cdot(x-\sqrt{5})$
- $x^4-16=(x^2+4)\cdot(x^2-4)=(x^2+4)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$

Actividades propuestas

50. De acuerdo con lo expuesto, factoriza los siguientes polinomios:

- x^2-2x+1
- $3x^2+18x+27$
- $4x^5-16x^3$

51. Calcula los siguientes productos:

a) $(3x + 1) \cdot (3x - 1)$ b) $(2a - 3b) \cdot (2a + 3b)$

c) $(x^2 - 5) \cdot (x^2 + 5)$ d) $(3a^2 + 5) \cdot (3a^2 - 5)$

52. Expresa como suma por diferencia las siguientes expresiones

a) $9x^2 - 25$ b) $4a^4 - 81b^2$ c) $49 - 25x^2$ d) $100a^2 - 64$

53. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas

a) $\dfrac{x^2-1}{3x+3}$ b) $\dfrac{2x^2+12x+18}{x^2-9}$ c) $\dfrac{6-3a}{a^2-4}$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

CURIOSIDADES. REVISTA

Numerosos actos que podemos encuadrar dentro de "**trucos de magia**" pueden ser analizados, o "destripados", mediante un uso adecuado de las Matemáticas, en particular a partir de expresiones algebraicas.

i. Dile a un compañero que escriba en un papel un número natural y que no lo muestre
ii. Que lo multiplique por 10
iii. Que al resultado anterior le sume 32
iv. Que multiplique por 100 lo obtenido
v. Qué le sume 800
vi. Que divida entre 1000 la última cantidad
vii. Que al resultado precedente le reste el número que escribió
viii. ¡Tiene un 4! ¡Magia!

En los ejercicios 1 y 2 tienes otros ejemplos de esto.

ALGORITMOS

La regla de Ruffini es un ejemplo de *algoritmo*. Un *algoritmo* es una relación ordenada y precisa de operaciones, o acciones, que se han de realizar sobre los datos inicialmente disponibles con la finalidad de resolver un problema o alcanzar nueva información. Otros algoritmos:
- el de la división de dos números enteros, que nos proporciona su cociente y su resto.
- el de Euclides, por el que obtenemos el máximo común divisor de dos enteros positivos.
- el de la raíz cuadrada, que ofrece la raíz cuadrada de un número.
- el que origina la letra de un DNI o NIF.

Los algoritmos son un pilar básico en el funcionamiento de cualquier ordenador o computadora.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

COEFICIENTES BINOMIALES

Cuando expandimos el binomio $(a+b)^n$ aparece un polinomio tal que todos sus monomios son del mismo grado, grado n. La parte literal de cada uno de ellos es muy fácil de escribir, no así, en principio, cada uno de los coeficientes. Sin embargo, gracias a un triángulo numérico podemos conocer los coeficientes que corresponden a cada exponente n: el ***triángulo de Tartaglia*** o ***de Pascal***. Es un triángulo numérico con muchas propiedades y utilidades. Apuntemos una propiedad: cada una de sus líneas comienza y concluye con el dígito 1, el resto de números es igual a la suma de los dos números que se encuentran sobre él.

n = 0	1									
n = 1	1	1								
n = 2	1	2	1							
n = 3	1	3	3	1						
n = 4	1	4	6	4	1					
n = 5	1	5	10	10	5	1				
n = 6	1	6	15	20	15	6	1			
n = 7	1	7	21	35	35	21	7	1		
n = 8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
n = 9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Por ejemplo, el desarrollo para el exponente $n=5$ sería

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

RESUMEN

Noción	*Descripción*	*Ejemplos*
Expresión algebraica	Expresión matemática que se construye con números reales y las operaciones matemáticas básicas de suma, resta, multiplicación y/o división	$\frac{-3x}{2x+y^3}-x\cdot y^2\cdot z$
Variable, indeterminada	Lo no concretado en una expresión algebraica	Las variables, o indeterminadas, del ejemplo anterior son *x*, *y*, *z*.
Valor numérico de una expresión algebraica	Al fijar un valor concreto para cada indeterminada, o variable, de una expresión algebraica aparece un número real: el **valor numérico** de esa expresión algebraica para tales valores de las indeterminadas	Si, en la expresión precedente, hacemos *x*=3, *y*=-2, *z*=1/2 obtenemos $\frac{-3\cdot 3}{2\cdot 3+(-2)^3}-3\cdot(-2)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{-3}{2}$
Monomio	Expresión dada por el producto de números reales e indeterminadas	$-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2$, $7\cdot x^2$
Coeficiente de un monomio	El número real que multiplica a la indeterminada, o indeterminadas, del monomio	Los coeficientes de los anteriores monomios son, respectivamente, -5 y 7
Parte literal de un monomio	La indeterminada, o producto de indeterminadas, que multiplica al coeficiente del monomio	La parte literal de $-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2$ es $x\cdot y^3\cdot z^2$
Grado de un monomio	Cuando hay una única indeterminada es el exponente de dicha indeterminada. Si aparecen varias, el grado del monomio será la suma de los exponentes de esas indeterminadas	Los grados de los monomios precedentes son 6 y 2, respectivamente
Polinomio	Expresión construida a partir de la suma de monomios	$-x^3+4x^2+8x+6$
Grado de un polinomio	El mayor grado de sus monomios	El anterior polinomio es de grado 3
Suma, resta y producto de polinomios	El resultado siempre es otro polinomio	$p=-3x+6$; $q=x^2+4$. $p+q=x^2-3x+10$; $p-q=-x^2-3x+2$; $p\cdot q=-3x^3+6x^2-12x+24$.
División de dos polinomios	Se obtienen otros dos polinomios, los polinomios cociente ($c(x)$) y resto ($r(x)$), ligados a los polinomios	$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

	iniciales, los polinomios dividendo ($p(x)$) y divisor ($q(x)$)	
Factorización de un polinomio	Consiste en expresarlo como producto de otros polinomios de menor grado	$x^5-3x^3-x^2+3=$ $=(x^2-3)\cdot(x^3-1)$
Polinomio irreducible	Es aquel que no puede ser expresado como producto de otros polinomios de grado inferior	$-3x+6$, x^2+4
Raíz de un polinomio	Un número real concreto α es **una raíz**, o **un cero**, del polinomio p, si al evaluar p en $x=\alpha$ obtenemos el número 0, es decir, si $p(\alpha)=0$	2 es raíz de $-3x+6$ 1 y -3 son raíces de x^2+2x-3
Raíces y factorización	El que un número real concreto α sea una raíz del polinomio $p(x)$ es equivalente a que el polinomio $p(x)$ admita una descomposición factorial de la forma $p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$ para cierto polinomio $c(x)$	-2 es una raíz de x^3+2x^2-x-2 $x^3+2x^2-x-2=(x+2)\cdot(x^2-1)$
Número de raíces y grado	Todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales, alguna de las cuales puede aparecer repetida entre esos no más de n números reales	x^2+2x-3 tiene dos raíces, 1 y -3 $3x^2+7$ no tiene raíces
Regla de Ruffini	Nos puede ayudar a la hora de factorizar un polinomio y conocer sus raíces	

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. En este ejercicio se va a presentar un *truco* mediante el cual vamos a adivinar el número que resulta tras manipular repetidamente un número desconocido. Convierte en una expresión algebraica las sucesivas alteraciones del número desconocido y justifica lo que ocurre.

i. Dile a un compañero que escriba en un papel un número natural y que no lo muestre
ii. Que lo multiplique por 10
iii. Que al resultado anterior le sume 100
iv. Que multiplique por 1000 lo obtenido
v. Que divida entre 10000 la última cantidad
vi. Que al resultado precedente le reste el número que escribió
vii. Independientemente del número desconocido original ¿qué número ha surgido?

2. En este otro ejercicio vamos a *adivinar* dos números que ha pensado un compañero. Construye una expresión algebraica que recoja todos los pasos y, finalmente, descubre el truco.

i. Solicita a un compañero que escriba en un papel, y no muestre, dos números naturales: uno de una cifra (entre 1 y 9) y otro de dos cifras (entre 10 y 99)
ii. Que multiplique por 4 el número escogido de una cifra
iii. Que al resultado anterior le sume 3
iv. Que multiplique por 5 lo obtenido
v. Que a la última cantidad le sume 10
vi. Que multiplique el resultado precedente por 5
vii. Que le sume a lo anterior el número de dos cifras que eligió
viii. Dile al compañero que desvele cuál es el resultado de todos esos cambios
ix. ¿Qué debemos hacer para descubrir los dos números que escogió el compañero?

3. Estudia si hay números reales en los que las siguientes expresiones no pueden ser evaluadas:

- $\dfrac{3x-6}{(x+2)\cdot(2x-14)}$
- $\dfrac{-x}{x^2-4x+4}$
- $\dfrac{3x^3-x}{-2x^4-3x^2-4}$
- $\dfrac{5x-y+1}{x^2+y^2}$

4. Una persona tiene ahorrados 1000 euros y decide depositarlos en un producto bancario con un tipo de interés anual del 3 %. Si decide recuperar sus ahorros al cabo de dos años, ¿cuál será la cantidad total de la que dispondrá?

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

5. Generalicemos el ejercicio anterior: Si ingresamos X euros en un depósito bancario cuyo tipo de interés es del i % anual, ¿cuál será la cantidad que recuperaremos al cabo de n años?

6. Construye un polinomio de grado 2, $p(x)$, tal que $p(3)=-7$.

7. Consideremos los polinomios $p(x)=-5x^3+x^2-3x-2$, $q(x)=3x^4+2x^3-x^2+2x+7$ y $r(x)=4x^2+5x-1$. Realiza las siguientes operaciones:

- $p+q+r$
- $p-q$
- $p\cdot r$
- $p\cdot r-q$

8. Calcula los productos:

a) $\left(\frac{ax}{3}-\frac{by}{2}\right)\cdot\left(\frac{-xy}{6}\right)$ b) $(0{,}3x-0{,}2y+0{,}1z)\cdot(0{,}1x+0{,}2y-0{,}3z)$ c) $(x-1)(x-a)(x-b)$

9. Efectúa las divisiones de polinomios:

- $2x^4-3x^3-8x^2+9x-1$ entre $2x^2+3x-3$
- $4x^5-5x^4+6x^3+2x^2-10x-6$ entre x^3+2x+3

10. Calcula los cocientes:

a) $(5x^4):(x^2)$ b) $(3x^2y^4z^6) : ((1/2)xy^3z^5)$ c) $(x^4 + 2x^2y + y^2) : (x^2 + y)$

11. Realiza las operaciones entre fracciones algebraicas:

- $\frac{x-1}{x^2-3x}+\frac{2x}{x^2-6x+9}$
- $\frac{x-1}{x^2-3x}-\frac{2x}{x^2-6x+9}$
- $\frac{x-1}{x^2-3x}\cdot\frac{2x}{x^2-6x+9}$
- $\frac{x-1}{x^2-3x}:\frac{2x}{x^2-6x+9}$

12. Construye un polinomio de grado 2 tal que el número -5 sea raíz suya.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

13. Determina un polinomio de grado 3 tal que sus raíces sean 6, -3 y 0.

14. Construye un polinomio de grado 4 tal que tenga únicamente dos raíces reales.

15. Encuentra un polinomio $q(x)$ tal que al dividir $p(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ entre $q(x)$ se obtenga como polinomio resto $r(x)=5x^2+5x+1$.

16. Halla las raíces enteras de los siguientes polinomios:

- $3x^3+11x^2+5x-3$
- $3x^3+2x^2+8x-3$
- $3x^3+5x^2+x-1$
- $2x^3+x^2-6x-3$

17. Obtén las raíces racionales de los polinomios del ejercicio anterior.

18. Descompón los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles:

- $3x^3+11x^2+5x-3$
- $3x^3+5x^2+x-1$
- $2x^3+x^2-6x-3$
- $3x^3-6x^2+x-2$

19. Calcula las potencias:

a) $(x-2y+z)^2$ b) $(3x-y)^3$ c) $((1/2)a+b^2)^2$ d) $(x^3-y^2)^2$

20. Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o trinomios, o de un producto *suma por diferencia*. En caso afirmativo expresa su procedencia.

- x^2+6x+9
- x^4-8x^2+16
- $x^2+\sqrt{20}\,xy+5y^2$
- $x^4+2x^3+x^2+2x+1$
- $x^4-2x^3+x^2+2x+1$
- x^2-36
- $5x^2+1$
- $5x^2-11$
- x^2-3y^2

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

21. Descompón en factores:

a) $x^4 - 1$ b) $x^2 - y^2$ c) $x^2y^2 - z^2$ d) $x^4 - 2x^2y + y^2$

22. Con este ejercicio se pretende mostrar la conveniencia a la hora de no operar una expresión polinómica que tenemos factorizada total o parcialmente.

a) Comprueba la igualdad $x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 2)\cdot(x^2 - 3)$.

b) Determina todas las raíces del polinomio $x^4 - 5x^2 + 6$.

23. Factoriza numerador y denominador y simplifica:

a) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$ b) $\dfrac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{x^2 + y^2}$ c) $\dfrac{x^3 - x}{x^4 - 1}$

24. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{2}{x(5-x)} - \dfrac{3}{2(5-x)}$ b) $\dfrac{x-y}{x+y}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ c) $\dfrac{2x+1}{4x^2-1}$

25. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{x^4-1}{x^7} : \dfrac{x^2+1}{x^8}$ b) $\dfrac{2x+3y}{a-b} - \dfrac{3x+4y}{2a-2b}$ c) $-4x + (1-x^4)\left(\dfrac{x+1}{1-x} - \dfrac{1-x}{1+x}\right)$

26. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\left(x^4 - \dfrac{1}{x^2}\right) : \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)$ b) $\dfrac{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3}{x+a} : \dfrac{x-a}{x+a}$ c) $\left(\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b}\right) : \dfrac{ab}{a+b}$

27. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{x+y}}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{x+y}} : \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a+y}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{a+y}}$ b) $\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}\right) : \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}\right)$ c) $\dfrac{\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{y}} \cdot \dfrac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y}}{\dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{y}}$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

AUTOEVALUACIÓN

1. Señala los coeficientes que aparecen en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ b) $-2x^5+x^4-x^3+5x-1$ c) $5\cdot\sqrt{2}\cdot x\cdot y^2\cdot z$

2. El valor numérico de la expresión $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ en $x=2,\ y=-1,\ z=-1$ es:

a) 17 b) 15 c) -3 d) -5

3. Completa adecuadamente las siguientes frases:

a) La suma de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado …….

b) La suma de tres polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado …….

c) El producto de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado …….

d) La diferencia de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado …….

4. Al dividir el polinomio $p(x)=x^5+x^4+x^3+1$ entre $q(x)=x^2+x+1$ el polinomio resto resultante:

a) debe ser de grado 2. b) puede ser de grado 2.

c) debe ser de grado menor que 2. d) ninguna de las opciones precedentes.

5. Considera el polinomio $2x^4-7x^3+5x^2-7x+3$. ¿Cuáles de los siguientes números enteros son *razonables candidatos* para ser una raíz suya?

a) 3 b) 2 c) -1 d) -7

6. Considera el polinomio $2x^4+7x^3+x^2-7x-3$. ¿Cuáles de los siguientes números racionales son *razonables candidatos* para ser una de sus raíces?

a) -3 b) $\frac{-1}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{3}{2}$

7. Todo polinomio con coeficientes enteros de grado tres

a) tiene tres raíces. b) tiene, a lo sumo, tres raíces. c) tiene, al menos, tres raíces.

8. ¿Es posible que un polinomio, con coeficientes enteros, de grado cuatro tenga exactamente tres raíces, ya sean diferentes o con alguna múltiple?

9. Justifica la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes frases:

a) La regla de Ruffini sirve para dividir dos polinomios cualesquiera.

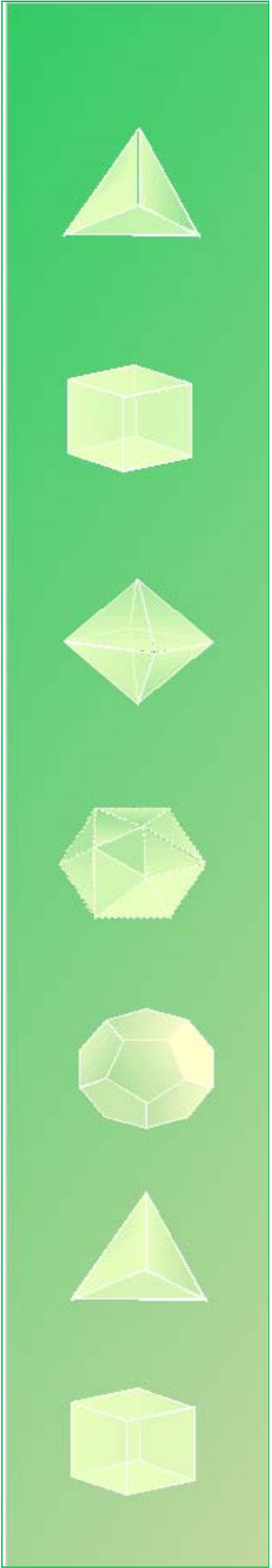
b) La regla de Ruffini permite dictaminar si un número es raíz o no de un polinomio.

c) La regla de Ruffini solo es válida para polinomios con coeficientes enteros.

d) La regla de Ruffini es un algoritmo que nos proporciona todas las raíces de un polinomio.

10. Analiza si puede haber algún polinomio de grado ocho que no tenga ninguna raíz.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde



Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas:

4ºB ESO
Capítulo 4:
Ecuaciones y sistemas

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-052242

Fecha y hora de registro: 2014-09-07 17:36:23.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Raquel Hernández

Revisora: María Molero

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

1. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

1.1. CONCEPTO DE ECUACIONES DE 2º GRADO

1.2. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE 2º GRADO COMPLETAS

1.3. NÚMERO DE SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DE 2º GRADO COMPLETA

1.4. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE 2º GRADO INCOMPLETAS

1.5. SUMA Y PRODUCTO DE LAS SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DE 2º GRADO

2. OTROS TIPOS DE ECUACIONES

2.1. ECUACIONES BICUADRADAS

2.2. ECUACIONES RACIONALES

2.3. ECUACIONES RADICALES

3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

3.1. CONCEPTO DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

3.2. CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

3.3. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES POR EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

3.4. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES POR EL MÉTODO DE IGUALACIÓN

3.5. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES POR EL MÉTODO DE REDUCCIÓN

4. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

4.1. CONCEPTO DE SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

4.2. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

Resumen

Los matemáticos han tardado cerca de tres mil años en comprender y resolver ecuaciones tan sencillas y que tu conoces tan bien cómo $ax + b = 0$. Ya los egipcios resolvían problemas que se pueden considerar de ecuaciones aunque no existía la notación algebraica. El matemático griego *Diofanto* en el siglo III resolvió ecuaciones de primer y segundo grado. En el siglo XV hubo un desafío para premiar a quien resolviera una ecuación de tercer grado. En el siglo XIX se demostró que no existe una fórmula general que resuelva las ecuaciones de quinto grado. Para imponer que la ecuación $ax + b = 0$ tenga siempre solución, el conjunto numérico de los números naturales debe ampliarse con los números negativos. Para imponer que la ecuación $ax = b$ tenga siempre solución, el conjunto numérico de los números enteros debe ampliarse con los números fraccionarios. Para imponer que la ecuación $x^2 = a$, $a > 0$, recuerda $x^2 = 2$, tenga solución, el conjunto numérico debe ampliarse con los números irracionales. Pero la ecuación $x^2 + 1 = 0$, todavía no tiene solución en el conjunto numérico de los números reales. El próximo curso se ampliará el dominio a los números complejos.

En este capítulo repasaremos la solución de ecuaciones de segundo grado y sistemas lineales, que ya conoces, y ampliaremos con ecuaciones y sistemas nuevos.

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

1.1. Concepto de ecuaciones de segundo grado

Recuerda que:

Una **ecuación de segundo grado** es una ecuación polinómica en la que la mayor potencia de la incógnita es 2. Las ecuaciones de segundo grado se pueden escribir de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde *a, b* y *c* son números reales, con $a \neq 0$.

Ejemplo:

a) *Son ecuaciones de 2º grado:*

$$2x^2 - 7x + 4 = 0; \qquad -9x^2 + 2x - 5 = 0; \qquad 6x^2 - (1/2)x - 3{,}25 = 0$$

b) *Los coeficientes de las ecuaciones de* 2º grado son números reales, por lo tanto pueden ser fracciones o raíces. Por ejemplo:

$$\frac{9}{2}x^2 - \sqrt{3}x + \frac{2}{5} = 0\,; \quad \frac{7}{3}x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{4}{9} = 0\,; \quad -5{,}8x^2 + 1{,}7x - 7{,}02 = 0; \quad \sqrt{5}x^2 + \frac{3}{2}x - \sqrt[3]{2} = 0\,.$$

Actividades propuestas

1. Indica si son ecuaciones de segundo grado las siguientes ecuaciones:

a) $3x^2 - \sqrt{7}x + 5 = 0$ b) $4{,}7x^2 - 6{,}25 = 0$ c) $7x^2 - \frac{2}{x} + 5x = 0$

d) $2xy^2 - 5 = 0$ e) $33 - 2{,}35x = 0$ f) $9x^2 - 52\sqrt{x} + 3'2 = 0$

2. En las siguientes ecuaciones de segundo grado, indica quiénes son *a*, *b* y *c*.

a) $3 - 8x^2 + 10x = 0$ b) $-3{,}4x^2 + 7{,}8x = 0$

c) $6x^2 - 1 = 0$ d) $1{,}25x^2 - 3{,}47x + 2{,}75 = 0$.

1.2. Resolución de ecuaciones de 2º grado completas

Recuerda que:

Se llama **ecuación de segundo grado completa** a aquella que tiene valores distintos de cero para *a*, *b* y *c*.

Para resolver las ecuaciones de segundo grado completas se utiliza la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula nos permite calcular las dos soluciones de la ecuación.

Llamamos **discriminante** a la parte de la fórmula que está en el interior de la raíz:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- *Resuelve la ecuación de segundo grado* $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Primero debemos saber quiénes son *a*, *b* y *c:*

$$a = 1;\ b = -3;\ c = 2.$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula, obtenemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

Por lo tanto, las dos soluciones son:

$$x_1 = \frac{3+1}{2} = 2; \qquad x_2 = \frac{3-1}{2} = 1.$$

En efecto, $2^2 - 3\cdot 2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$, y $1^2 - 3\cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$, luego 2 y 1 son soluciones de la ecuación.

Actividades propuestas

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:

a) $x^2 - 8x + 7 = 0$ b) $2x^2 + 3x - 12 = 0$

c) $10x^2 - 9x + 50 = 0$ d) $x^2 - 13x + 22 = 0$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 3\cdot\frac{x-1}{5} = 6x^2 - \frac{8x+7}{5}$; b) $2\cdot\frac{x-7}{5} - \frac{3-2x}{x} = 10$; c) $5x\cdot(x-3) + 4(x^2-5) + 10 = -10$;

d) $5(x^2-1) + 3(x^2-5) + 4 = 7$; e) $\frac{2-5x^2}{3x} - \frac{5}{3} = \frac{4x-7}{6}$; f) $\frac{2-3x^2}{5x} - \frac{4}{3} = \frac{2x-1}{15}$.

1.3. Número de soluciones de una ecuación de 2º grado completa

Recuerda que:

Antes hemos definido lo que era el **discriminante**, ¿te acuerdas?

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Para saber cuántas soluciones tiene una ecuación de 2º grado, nos vamos a fijar en el signo del discriminante.

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene **dos soluciones reales y distintas**.

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales iguales, (una **solución doble**).

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación **no tiene solución**.

El motivo es muy sencillo, la raíz cuadrada de un número real negativo no es un número real, no existe.

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

Ejemplo:

- *La ecuación* $x^2 - 7x + 10 = 0$ *tiene como discriminante*:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4\cdot1\cdot10 = 49 - 40 = 9 > 0$$

Por lo tanto, la ecuación dada tiene 2 soluciones reales y distintas, 2 y 5. (*Comprobación:* $5^2 - 7\cdot5 + 10 = 25 - 35 + 10 = 0$ y $(2)^2 - 7(2) + 10 = 4 - 14 + 10 = 0$).

- *La ecuación* $x^2 - 6x + 9 = 0$ *tiene como discriminante*:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4\cdot1\cdot9 = 36 - 36 = 0$$

Por lo tanto, la ecuación tiene dos soluciones reales iguales. Se puede escribir como:

$x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 0$, que tiene la solución doble $x = 3$.

- La ecuación $x^2 + 4x + 10 = 0$ *tiene como discriminante*:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4\cdot1\cdot(10) = 16 - 40 = -24 < 0$$

Por lo tanto, la ecuación no tiene solución real. Ningún número real verifica la ecuación.

Actividades propuestas

5. Averigua cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $9x^2 + 4x + 7 = 0$ **b)** $3x^2 - 5x + 2 = 0$

c) $x^2 - 9x - 12 = 0$ **d)** $2x^2 - 7x + 9 = 0$.

1.4. Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas

Recuerda que:

Llamamos **ecuación de 2º grado incompleta** a aquella ecuación de segundo grado en la que el coeficiente *b* vale 0 (falta *b*), o el coeficiente *c* vale 0 (falta *c*).

Observa: Si el coeficiente *a* vale cero no es una ecuación de segundo grado.

Ejemplo:

- *La ecuación de segundo grado* $3x^2 - 22 = 0$ es incompleta porque el coeficiente $b = 0$, es decir, falta *b*.
- *La ecuación de segundo grado* $2x^2 - 7x = 0$ es incompleta porque no tiene *c*, es decir, $c = 0$.

Una ecuación de segundo grado incompleta también se puede resolver utilizando la fórmula de las completas pero es un proceso más lento y es más fácil equivocarse.

Si el **coeficiente *b* = 0:** Despejamos la incógnita normalmente, como hacíamos en las ecuaciones de primer grado:

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Si $\frac{-c}{a} > 0$ tiene dos soluciones distintas, si $\frac{-c}{a} < 0$ no existe solución.

Si el **coeficiente *c* = 0:** Sacamos factor común:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x\cdot(ax + b) = 0.$$

Para que el producto de dos factores valga cero, uno de los factores debe valer cero.

Por tanto $x = 0$, o $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$.

Resumen

Si el **coeficiente *b* = 0,** $ax^2 + c = 0$, despejamos la incógnita: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$.

Si el **coeficiente *c* = 0,** $ax^2 + bx = 0$, sacamos factor común: $x = 0$ y $x = \frac{-b}{a}$.

Ejemplo:

- *En la ecuación* $2x^2 - 200 = 0$ *falta la b*.

Para resolverla despejamos la incógnita, es decir, x^2:

$$2x^2 - 200 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 200 \Rightarrow x^2 = 200/2 = 100$$

Una vez que llegamos aquí, nos falta quitar ese cuadrado que lleva nuestra incógnita. Para ello, hacemos la raíz cuadrada en los 2 miembros de la ecuación:

$$\boldsymbol{x = \pm\sqrt{100} = \pm 10}.$$

Así hemos obtenido las dos soluciones de nuestra ecuación, 10 y –10.

En efecto, $2\cdot 10^2 - 200 = 2\cdot 100 - 200 = 0$, y $2\cdot(-10)^2 - 200 = 2\cdot 100 - 200 = 0$.

Ejemplo:

- *En la ecuación* $3x^2 - 21x = 0$ falta la *c*.

Para resolverla, sacamos factor común:

$$3x^2 - 21x = 0 \Rightarrow 3x\cdot(x - 21) = 0$$

Una vez que llegamos aquí, tenemos dos opciones

1) $3x = 0 \Rightarrow x = 0$.

2) $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$.

Así hemos obtenido las dos soluciones de la ecuación $x = 0$ y $x = 7$.

En efecto, $3\cdot 0^2 - 21\cdot 0 = 0$, y $3\cdot(7)^2 - 21\cdot 7 = 3\cdot 49 - 21\cdot 7 = 147 - 147 = 0$.

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- *Resuelve la ecuación de segundo grado* $2x^2 - 50 = 0$:

Solución: Se trata de una ecuación de 2º grado incompleta donde falta la *b*. Por lo tanto, despejamos la incógnita:

$$2x^2 - 50 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 50/2 = 25 \Rightarrow \text{Las soluciones son 5 y } -5.$$

- *Resuelve la ecuación de segundo grado* $x^2 + 11x = 0$:

Solución: Se trata de una ecuación de 2º grado incompleta donde falta la *c*.

Por lo tanto, sacamos factor común: $x^2 + 11x = 0 \Rightarrow x(x + 11) = 0$.

Obtenemos las dos soluciones: $x = 0$ y $x + 11 = 0 \Rightarrow x = -11$.

Las soluciones son 0 y –11.

Actividades propuestas

6. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:

a) $5x^2 + 75x = 0$ b) $4x^2 - 160 = 0$

c) $x^2 - 64 = 0$ d) $3x^2 + 2x = 0$

e) $9x^2 - 49 = 0$ f) $3x^2 - 33x = 0$.

7. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:

a) $3x^2 + 18x = 0$ b) $5x^2 - 180 = 0$

c) $x^2 - 49 = 0$ d) $2x^2 + x = 0$

e) $4x^2 - 25 = 0$ f) $5x^2 - 10x = 0$.

1.5. Suma y producto de las soluciones en una ecuación de segundo grado

Recuerda que:

Si en una ecuación de segundo grado: $x^2 + bx + c = 0$, con $a = 1$, conocemos sus soluciones: x_1 y x_2 sabemos que podemos escribir la ecuación de forma factorizada:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Hacemos operaciones:

$$x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0,$$

por lo que el coeficiente *c* es igual al producto de las soluciones y la suma de las soluciones es igual al opuesto del coeficiente *b*, es decir, –*b*.

$$\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = c;\ x_1 + x_2 = -b.}$$

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Si la ecuación es $ax^2 + bx + c = 0$, dividiendo por a, ya tenemos una de coeficiente $a = 1$, y obtenemos que:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}; \; x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Esta propiedad nos permite, en ocasiones, resolver mentalmente algunas ecuaciones de segundo grado.

Actividades resueltas

- *Resuelve mentalmente la ecuación* $x^2 + x - 2 = 0$.

Las soluciones son 1 y –2, pues su producto es –2 y su suma –1.

- *Resuelve mentalmente la ecuación* $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Buscamos, mentalmente dos números cuyo producto sea 6 y cuya suma sea 5. En efecto, $2 \cdot 3 = 6$, y $2 + 3 = 5$, luego las soluciones de la ecuación son 2 y 3.

- *Resuelve mentalmente la ecuación* $x^2 - 8x + 16 = 0$.

El producto debe ser 16. Probamos con 4 como solución, y en efecto $4 + 4 = 8$. Las soluciones son la raíz 4 doble.

- *Resuelve mentalmente la ecuación* $x^2 + x - 2 = 0$.

Las soluciones son –2 y 1, pues su producto es –2 y su suma –1.

Actividades propuestas

8. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $2x^2 + 8x = 0$ b) $x^2 + 6x - 27 = 0$

c) $x^2 - 81 = 0$ d) $x^2 - 10x + 22 = 0$

e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ f) $x^2 - 5x - 24 = 0$

9. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 5 y 9.

10. El perímetro de un rectángulo mide 20 cm y su área 24 cm^2. Calcula mentalmente sus dimensiones.

11. Si 3 es una solución de $x^2 - 7x + a = 0$, ¿cuánto vale a?

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

2. OTROS TIPOS DE ECUACIONES

Durante siglos los algebristas han buscado fórmulas, como la que ya conoces de la ecuación de segundo grado, que resolviera las ecuaciones de tercer grado, de cuarto, de quinto… sin éxito a partir del quinto grado. Las fórmulas para resolver las ecuaciones de tercer y cuarto grado son complicadas. Sólo sabemos resolver de forma sencilla algunas de estas ecuaciones.

Ejemplo:

- Resuelve: $(x - 5) \cdot (x - 3) \cdot (x + 2) \cdot (x - 9) \cdot (x - 6) = 0$.

Es una ecuación **polinómica** de grado cinco, pero al estar factorizada sabemos resolverla pues para que el producto de varios factores sea cero, uno de ellos debe valer cero. Igualando a cero cada factor tenemos que las soluciones son 5, 3, –2, 9 y 6.

2.1. Ecuaciones bicuadradas

Una **ecuación bicuadrada** es una ecuación de la forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$.

Para resolverla, hacemos el cambio $x^n = t$, convirtiéndola así en una ecuación de segundo grado de fácil resolución.

Cuando hayamos calculado el valor de t, deshacemos el cambio efectuado, $x = \sqrt[n]{t}$ para obtener la solución x.

Las ecuaciones bicuadradas más comunes son las de cuarto grado

Ejemplo:

- *Para resolver la ecuación bicuadrada* $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$, hacemos el cambio obteniendo la ecuación de segundo grado $t^2 - 10t + 9 = 0$.

Resolvemos dicha ecuación de segundo grado:

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 8}{2}$$

$$t_1 = \frac{10+8}{2} = 9 \quad y \quad t_2 = \frac{10-8}{2} = 1$$

Deshacemos el cambio para obtener los valores de x:

$$Si\ t_1 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

$$Si\ t_2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- *La ecuación* $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ es una ecuación polinómica de cuarto grado, pero con una forma muy especial, es una ecuación **bicuadrada**, porque podemos transformarla en una ecuación de segundo grado llamando a x^2 por ejemplo, t.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

Una solución de la ecuación de segundo grado es $t = 4$, y la otra es $t = 1$.

Por tanto si $t = x^2 = 4$, entonces $x = 2$ y $x = -2$.

Y si $t = x^2 = 1$, entonces $x = 1$ y $x = -1$.

Nuestra ecuación de cuarto grado tiene cuatro soluciones: 2, –2, 1 y –1.

Actividades propuestas

12. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $(x - 7) \cdot (x - 2) \cdot (x + 5) \cdot (x - 3) \cdot (x - 11) = 0$ b) $3(x - 5) \cdot (x - 7) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) = 0$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ b) $x^4 + 12x^2 + 35 = 0$ c) $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$.

14. Resuelve las ecuaciones bicuadradas siguientes:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ d) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$.

2.2. Ecuaciones racionales

Si hay incógnitas en el denominador, la ecuación se denomina **racional**, y se resuelve de forma similar, quitando denominadores.

Para resolver ecuaciones **racionales**, se multiplican ambos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Ejemplos:

- *Resuelve* $\frac{3x - 8 + 9x}{2x} = 4$

Quitamos denominadores:

$$\frac{3x - 12 + 9x}{2x} = 4 \Rightarrow 3x - 12 + 9x = 8x \Rightarrow 3x + 9x - 8x = 12 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3.$$

- *Para resolver la ecuación racional* $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x^2-4}$, primero calculamos el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$$\text{m.c.m.}(x - 2, x + 2, x^2 - 4) = (x - 2) \cdot (x + 2).$$

Multiplicamos toda la ecuación por el mínimo común múltiplo, obteniendo la nueva ecuación:

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x-2}+\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x+2}=\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x^2-4}\Rightarrow (x+2)+(x-2)=1.$$

Resolvemos dicha ecuación y así obtenemos el resultado:

$$(x+2)+(x-2)=1\Rightarrow 2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Actividades propuestas

15. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales:

a) $\frac{1}{x^2-x}-\frac{1}{x-1}=0$ b) $\frac{1}{x-6}+\frac{x}{x-2}=\frac{1}{x^2-8x+12}$ c) $\frac{3}{x}=1+\frac{x-13}{6}$.

2.3. Ecuaciones radicales

Si hay incógnitas dentro de un radical, la ecuación se denomina **irracional**, y se resuelve aislando el radical y elevando al cuadrado (o al índice del radical). Ahora es preciso tener una precaución, al elevar al cuadrado, la ecuación obtenida no es equivalente, se pueden haber añadido soluciones. Siempre es conveniente comprobar el resultado, pero en este caso, es necesario.

Una **ecuación radical o irracional** es aquella que tiene la incógnita bajo el signo de la raíz.

Para resolver ecuaciones radicales, seguimos los siguientes pasos:

1.- Se aísla un radical en uno de los dos miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos, aunque tengan también radicales.

2.- Se elevan al cuadrado los dos miembros.

3.- Si quedan más radicales, se vuelve a despejar uno y se eleva al cuadrado, hasta que no quede ninguno.

4.- Se resuelve la ecuación obtenida.

5.- Se comprueba que la solución es válida.

Ejemplo:

- *Vamos a resolver la ecuación radical* $\sqrt{2x-3}+1=x$.

1.- Se aísla un radical en uno de los dos miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos:

$$\sqrt{2x-3}+1=x\Rightarrow\sqrt{2x-3}=x-1.$$

2.- Se elevan al cuadrado los dos miembros:

$$\sqrt{2x-3}=x-1\Rightarrow 2x-3=(x-1)^2\Rightarrow 2x-3=x^2-2x+1.$$

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.- Se resuelve la ecuación obtenida:

$$2x - 3 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2 \text{ doble.}$$

4.- Se comprueba que la solución es válida:

$$\sqrt{2 \cdot 2 - 3} + 1 = 2 \Rightarrow \sqrt{1} + 1 = 2 \Rightarrow 2 = 2.$$

Actividades resueltas

- *Resuelve la ecuación radical* $\sqrt{x+6} - \sqrt{x-2} = 2$.

1.- Se aísla un radical en uno de los dos miembros, pasando al otro miembro el resto de los términos, aunque tengan también radicales:

$$\sqrt{x+6} = 2 + \sqrt{x-2}.$$

2.- Se elevan al cuadrado los dos miembros:

$$\left(\sqrt{x+6}\right)^2 = \left(2 + \sqrt{x-2}\right)^2 \Rightarrow x + 6 = 4 + 4\sqrt{x-2} + x - 2.$$

Se simplifica la ecuación obtenida:

$$x + 6 = 4 + 4\sqrt{x-2} + x - 2 \Rightarrow x + 6 - 4 - x + 2 = 4\sqrt{x-2} \Rightarrow 4 = 4\sqrt{x-2}.$$

3.- Volvemos ahora al paso 2 para eliminar la raíz que tenemos aún:

$$4 = 4\sqrt{x-2} \Rightarrow 4^2 = \left(4\sqrt{x-2}\right)^2 \Rightarrow 16 = 16(x-2).$$

4.- Se resuelve la ecuación obtenida:

$$16 = 16(x-2) \Rightarrow 1 = x - 2 \Rightarrow x = 3.$$

5.- Se comprueba que la solución es válida:

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{x-2} = 2 \Rightarrow \sqrt{3+6} - \sqrt{3-2} = 2 \Rightarrow \sqrt{9} - \sqrt{1} = 2 \Rightarrow 3 - 1 = 2 \Rightarrow 2 = 2.$$

La solución $x = 3$ verifica la ecuación.

Actividades propuestas

16. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $\sqrt{5x+4} - 1 = 2x$ b) $\sqrt{x+19} + 1 = \sqrt{2x+4}$ c) $3\sqrt{x-1} + 11 = 2x$.

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

2.4. Otras ecuaciones

Hay también ecuaciones trigonométricas, logarítmicas, exponenciales. Así, si la incógnita está en un exponente la ecuación se denomina **exponencial**. Si podemos expresar los dos miembros de la ecuación como potencias de la misma base, se igualan los exponentes.

Ejemplo:

- Resuelve: $2^{2x} = \frac{1}{16}$

Expresamos la ecuación como potencias de una misma base: $\mathbf{2^{2x} = \frac{1}{16} \Rightarrow 2^{2x} = 2^{-4}}$

Igualamos los exponentes: $2x = -4 \Rightarrow x = -2$.

Actividades propuestas

17. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $(x - 9) \cdot (x - 1) \cdot (x + 24) \cdot (x - 5) \cdot (x - 3) = 0$ b) $3(x - 5) \cdot (x - 9) \cdot (x + 2) \cdot (x - 1) \cdot (x - 4) = 0$

18. Resuelve las ecuaciones bicuadradas siguientes:

a) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$ b) $x^4 - 21x^2 + 12100 = 0$ c) $x^4 - 45x^2 + 234 = 0$ d) $x^4 - 37x^2 + 36 = 0$

19. Resuelve las ecuaciones racionales siguientes:

a) $\frac{2x-1+7x}{3x} = \frac{3}{x} - 2$ b) $\frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{4}{3}$ d) $\frac{2x-3}{x} + \frac{1}{x} = 1$

20. Resuelve las ecuaciones irracionales siguientes:

a) $5 + \sqrt{x-1} = x + 2$ b) $\sqrt{x-2} + 3\sqrt{x-2} = x + 1$ c) $\sqrt{x} - 4 = x - 1$ d) $7 + \sqrt{x+4} = x + 9$

21. Resuelve las ecuaciones exponenciales siguientes:

a) $5^{3x} = \frac{1}{625}$ b) $2^{2x} \cdot 4^x = \frac{1}{16}$ c) $2^{x+5} + 2^{x+4} + 2^{x+3} = 28$

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

3.1. Concepto de sistema de ecuaciones lineales

Recuerda que:

Una **ecuación** con varias incógnitas es una igualdad que las relaciona.

Por ejemplo:

$x^2 + y^2 = 25$, es la ecuación de una circunferencia de centro el origen y radio 5.

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones con varias incógnitas.

Por ejemplo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 7x + 2y = 0 \end{cases}$$

La primera ecuación es la de una circunferencia de centro el origen y radio 5, y la segunda es la ecuación de una recta que pasa por el origen. Las soluciones del sistema son los puntos de intersección entre la circunferencia y la recta.

Se llama **solución del sistema** a cada uno de los conjuntos de números que verifican todas las ecuaciones del sistema.

Dos sistemas son **equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones.

Un **sistema de ecuaciones lineales** con dos incógnitas se puede expresar de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2X + Y = 5 \\ X - 2 = 3Y \end{cases}$$

donde a, b, a' y b' son números reales que se denominan **coeficientes** y c y c' también son números reales llamados **términos independientes**.

Llamamos **solución** del sistema al par de valores (x, y) que satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

Se dice que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes**, cuando tienen la misma solución.

Ejemplo:

- *Son sistemas de ecuaciones lineales, por ejemplo:*

$$\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$$

Ejemplo:

- ***No** es un sistema lineal* $\begin{cases} 9xy + 2y = 5 \\ 3x - xy = 4 \end{cases}$ porque tiene términos en xy, aunque es un sistema de dos ecuaciones.

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Tampoco lo es $\begin{cases} 5x^2 + 9y = 2 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$ porque tiene un término en x^2, aunque también es un sistema de dos ecuaciones.

Actividades propuestas

22. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 7xy + 5y = 2 \\ 3x - 5y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2y - 4x = 3 \\ 3x - 5y = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 4 = 2y \\ 6x + 8y = 9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x^2 + 3y = 5 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

3.2. Clasificación de sistemas de ecuaciones

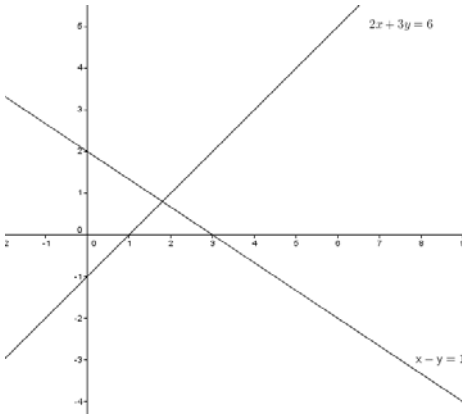
Recuerda que:

En un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, cada una de las ecuaciones representa una recta en el plano. Estas rectas pueden estar posicionadas entre sí de tres maneras distintas, lo que nos ayudará a clasificar nuestro sistema en:

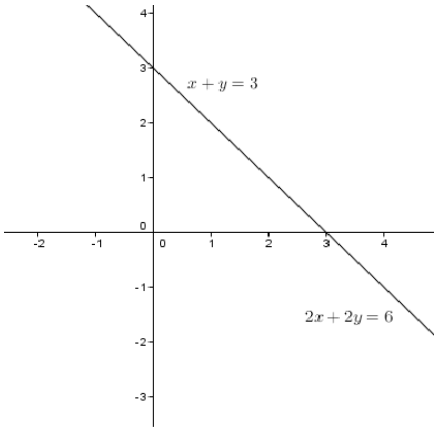
1) **Compatible determinado**: el sistema tiene una única solución, por lo que nuestras rectas son **SECANTES**

2) **Compatible indeterminado**: el sistema tiene infinitas soluciones, por lo que las rectas son **COINCIDENTES**

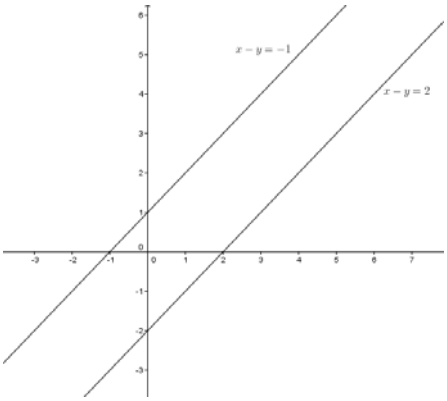
3) **Incompatible**: el sistema no tiene solución, por lo que las rectas son **PARALELAS.**



Compatible determinado



Compatible indeterminado



Incompatible

Actividades resueltas

- *Añade una ecuación a* $x - 2y = 2$ para que el sistema resultante sea:

  a) Compatible determinado.

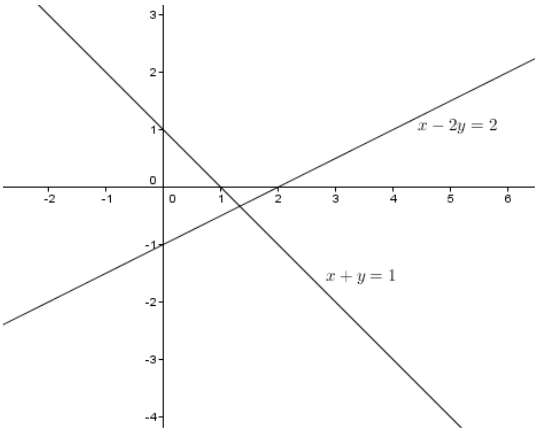
  b) Incompatible.

  c) Compatible indeterminado.

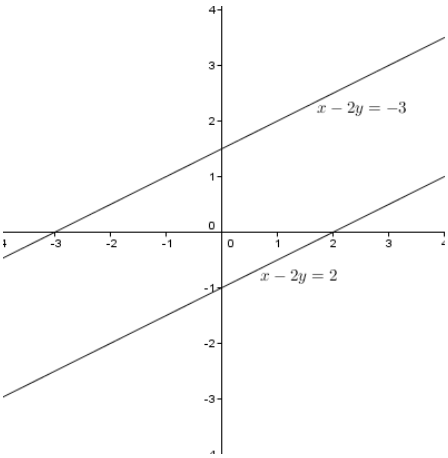
Solución:

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

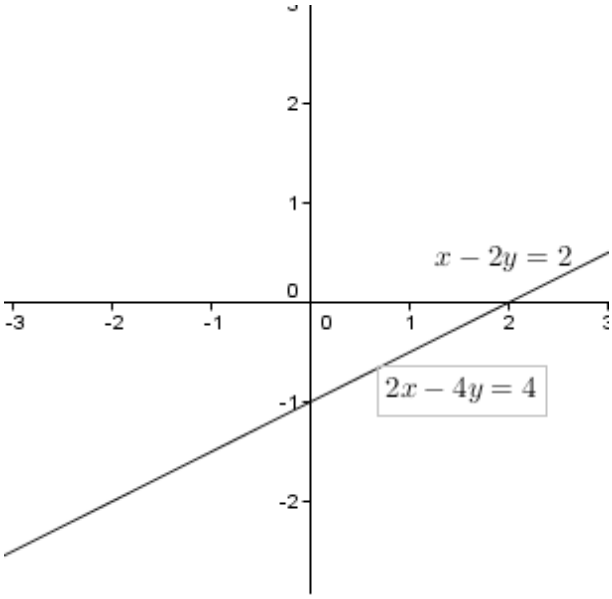
a) Para que el sistema sea compatible determinado, añadiremos una ecuación que no tenga los mismos coeficientes que la que nos da el ejercicio. Por ejemplo, $x + y = 1$.



b) Para que sea incompatible, los coeficientes tienen que ser los mismos pero tener diferente término independiente. Por ejemplo $x - 2y = -3$.



c) Para que sea compatible indeterminado, pondremos una ecuación proporcional a la que tenemos. Por ejemplo $2x - 4y = 4$.



Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

23. Representa los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ -2x+y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-y=4 \\ -y+3x=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-9y=9 \\ 2x-6y=6 \end{cases}$

24. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} 2x+y=6 \\ -3x+y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=3 \\ -2y+2x=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-3y=3 \\ 4x-6y=6 \end{cases}$

25. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ -3x+y=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=3 \\ -2y+x=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 4x-4y=4 \end{cases}$

3.3. Resolución de sistemas por el método de sustitución

Recuerda que:

El **método de sustitución** consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones del sistema y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación. Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podremos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, obtenemos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

- *Vamos a resolver el sistema* $\begin{cases} \mathbf{2x-3y=1} \\ \mathbf{x+2y=4} \end{cases}$ *por el método de sustitución:*

Despejamos *x* de la segunda ecuación: $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y=1 \\ x=4-2y \end{cases}$

y lo sustituimos en la primera:

$$\begin{cases} 2(4-2y)-3y=1 \\ x=3-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8-4y-3y=1 \\ x=3-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4y-3y=1-8 \\ x=3-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7y=-7 \\ x=3-2y \end{cases} \Rightarrow y = 1.$$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*: $x = 4 - 2y \Rightarrow x = 4 - 2\cdot 1 = 2.$

La solución es: $\begin{cases} \mathbf{x=2} \\ \mathbf{y=1} \end{cases}$.

Comprobamos: $\begin{cases} 2\cdot 2-3\cdot 1=4-3=1 \\ 2+2\cdot 1=4 \end{cases}$.

Actividades propuestas

26. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

a) $\begin{cases} 2x+5y=-6 \\ x+2y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+4y=5 \\ 4x+y=8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x-2y=3 \\ 2x+y=10 \end{cases}$

27. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x+4y=26 \\ x-2y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+4y=26 \\ 3x+y=24 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-2y=8 \\ 2x+3y=14 \end{cases}$

3.4. Resolución de sistemas por el método de igualación

Recuerda que:

El **método de igualación** consiste en despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema e igualar los resultados obtenidos. Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podremos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, calculamos el valor de la otra incógnita

Ejemplo:

- *Vamos a resolver el sistema* $\begin{cases} \mathbf{2x-3y=1} \\ \mathbf{x+2y=4} \end{cases}$ *por el método de igualación:*

Despejamos la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema:

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3y+1}{2} \\ x=4-2y \end{cases}.$$

Igualamos ahora los resultados obtenidos y resolvemos la ecuación resultante:

$$\begin{cases} \dfrac{3y+1}{2}=4-2y \\ x=4-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y+1=8-4y \\ x=4-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y+4y=8-1 \\ x=4-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y=7 \\ x=4-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=4-2y \end{cases}.$$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*: $\begin{cases} y=1 \\ x=4-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=4-2\cdot 1=2 \end{cases}.$

La solución es: $\begin{cases} \mathbf{x=2} \\ \mathbf{y=1} \end{cases}.$

Comprobamos: $\begin{cases} 2\cdot 2-3\cdot 1=4-3=1 \\ 2+2\cdot 1=4 \end{cases}.$

Actividades propuestas

28. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} x+y=11 \\ -x+3y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-5y=4 \\ 2x+7y=-11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x-3y=5 \\ 3x+4y=11 \end{cases}$

29. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

a) $\begin{cases} 3x+y=2 \\ -2x+y=-5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ 4x+5y=12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-2y=7 \\ x+3y=8 \end{cases}$

4.5. Resolución de sistemas por el método de reducción

Recuerda que:

El **método de reducción** consiste en eliminar una de las incógnitas sumando las dos ecuaciones. Para ello se multiplican una o ambas ecuaciones por un número de modo que los coeficientes de *x* o *y* sean iguales pero de signo contrario.

Ejemplo:

- *Vamos a resolver el sistema* $\begin{cases} \mathbf{2x-3y=1} \\ \mathbf{x+2y=4} \end{cases}$ *por el método de reducción:*

Multiplicamos la segunda ecuación por –2 para que los coeficientes de la *x* sean iguales pero de signo contrario y sumamos las ecuaciones obtenidas:

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x+2y=4 \end{cases} \xrightarrow[\cdot(-2)]{} \begin{cases} 2x-3y=1 \\ -2x-4y=-8 \end{cases} \xrightarrow{sumamos} \begin{cases} 2x-3y=1 \\ -7y=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$$\begin{cases} 2x-3\cdot(1)=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{2}=2 \\ y=1 \end{cases}$$

La solución es: $\begin{cases} \mathbf{x=2} \\ \mathbf{y=1} \end{cases}$

Comprobamos: $\begin{cases} 2\cdot 2-3\cdot 1=4-3=1 \\ 2+2\cdot 1=4 \end{cases}$.

Actividades propuestas

30. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} x+2y=3 \\ -2x-5y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 3x+y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ x-4y=5 \end{cases}$

31. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x+y=8 \\ x-5y=-9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+3y=9 \\ x+2y=10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-2y=7 \end{cases}$

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

5. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES

5.1. Concepto de sistema de ecuaciones no lineales

Un **sistema de ecuaciones es no lineal** cuando al menos una de sus ecuaciones no es de primer grado

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Donde *a, b, a'* y *b'* son números reales que se denominan **coeficientes** y *c* y *c'* también son números reales llamados **términos independientes**.

Llamamos **solución** del sistema al par (*x, y*) de valores que satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

Ejemplo:

- *Son sistemas de ecuaciones **no** lineales, por ejemplo:*

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ x\cdot y=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+y=7 \\ x+y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \sqrt{x}+y=3 \\ x+5y=7 \end{cases}$

Actividades propuestas

32. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x\cdot y+2y=6 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5y-x=4 \\ 2x-3y=-1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x-2=y \\ 3x+5y=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2+y=2 \\ 3x+y^2=4 \end{cases}$

5.2. Resolución de sistemas de ecuaciones no lineales

La resolución de este tipo de sistemas se suele hacer por el método de **sustitución** mediante los siguientes pasos:

1.- Se despeja una incógnita de una de las ecuaciones, a ser posible de la de primer grado.

2.- Se sustituye la incógnita despejada en la otra ecuación.

3.- Se resuelve la ecuación resultante.

4.- Cada uno de los valores obtenidos se sustituye en la otra ecuación, se obtienen así los valores correspondientes de la otra incógnita.

Actividades resueltas

- *Vamos a resolver el sistema no lineal* $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases}$

1.- Se despeja una incógnita de una de las ecuaciones, a ser posible de la de primer grado:

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y=7-x \end{cases}$$

2.- Se sustituye la incógnita despejada en la otra ecuación:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y=7-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+(7-x)^2=25 \\ y=7-x \end{cases}$$

3.- Se resuelve la ecuación resultante:

$$\begin{cases} x^2+(7-x)^2=25 \\ y=7-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+49-14x+x^2=25 \\ y=7-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2-14x+24=0 \\ y=7-x \end{cases}$$

$$x=\frac{14\pm\sqrt{(-14)^2-4\cdot 2\cdot 24}}{2\cdot 2}=\frac{14\pm 2}{4} \Rightarrow x_1=4 \wedge x_2=3.$$

4.- Cada uno de los valores obtenidos se sustituye en la otra ecuación, se obtienen así los valores correspondientes de la otra incógnita:

Si $x = 3$, $y = 7 - 3 = 4$

Si $x = 4$, $y = 7 - 4 = 3$

Las soluciones son **(3, 4)** y **(4, 3)**.

5.- *Comprobación*:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^2+4^2=9+16=25 \\ 3+4=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^2+3^2=16+9=25 \\ 4+3=7 \end{cases}$$

Actividades propuestas

33. Resuelve los siguientes sistemas no lineales:

a) $\begin{cases} x\cdot y+2=4x \\ y-x=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y^2-x^2=5 \\ 5x-3y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=7 \\ x\cdot y=12 \end{cases}$

34. Resuelve los siguientes sistemas y comprueba gráficamente las soluciones:

a) $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ x+y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=1 \\ xy=2 \end{cases}$ c) $\left.\begin{matrix} x^2+y^2=81 \\ xy=4 \end{matrix}\right\}$

d) $\begin{cases} x^2+2y^2=17 \\ x+y=5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ xy=6 \end{cases}$ f) $\left.\begin{matrix} x^2+y^2=18 \\ y=x \end{matrix}\right\}$

35. La trayectoria de un proyectil es una parábola de ecuación: $y = -x^2 + 5x$, y la trayectoria de un avión es una recta de ecuación: $y = 3x$. ¿En qué puntos coinciden ambas trayectorias? Representa gráficamente la recta y la parábola para comprobar el resultado.

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

36. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = -2 \\ 2x^2 - 3y^2 = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 3 \\ 5x^2 - 2y^2 = 5 \end{cases}$ *Ayuda*: Utiliza el método de reducción:

c) $\begin{cases} xy = \frac{1}{2} \\ x + y = \frac{3}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - 4y = -3 \\ xy = 1 \end{cases}$ e) $\left.\begin{array}{r} x + y - \frac{y}{x} = 1 \\ x + y = 2 \end{array}\right\}$

5.3. Sistemas de ecuaciones lineales de más de dos incógnitas

La mejor forma de resolver sistemas lineales de más de dos incógnitas es ir sustituyendo el sistema por otro equivalente de forma que cada vez se consiga que sean ceros los coeficientes de más incógnitas. Este procedimiento se denomina ***Método de Gauss***.

Actividades resueltas

Para resolver el sistema: $\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + 4y - 2z = 3 \end{cases}$, dejamos la primera ecuación sin modificar. Queremos que la segunda ecuación tenga un cero como coeficiente de la "*x*", para ello la multiplicamos por 2 y le restamos la primera. Para que la tercera ecuación tenga un cero como coeficiente de la "*x*", la multiplicamos por 2 y le restamos la primera:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + 4y - 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 7y - z = 6 \end{cases}$$

Ahora podemos resolver el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas formado por las dos últimas ecuaciones, o continuar con nuestro procedimiento. Para conseguir que en la tercera ecuación el coeficiente de la "*y*" sea un cero multiplicamos la tercera ecuación por 3 y la segunda por 7 y las restamos:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 7y - z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 0 + 32z = 32 \end{cases}$$

y ahora ya podemos despejar cada una de las incógnitas de forma ordenada:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 0 + z = \frac{32}{32} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + (1) - 3(1) = 0 \\ 3y + 5(1) = 8 \rightarrow y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

37. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y - 3z = -2 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 6 \\ x + 2y + 2z = 4 \\ 3x - 2y - 3z = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 5 \\ x - 2y + 2z = -1 \\ x - 2y - 3z = -6 \end{cases}$

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

3.1. Resolución de problemas mediante ecuaciones de 2º grado

Para resolver problemas por medio de ecuaciones de 2º grado, primero tendremos que pasar a lenguaje algebraico el enunciado del problema y luego resolverlo siguiendo los siguientes pasos:

1.- Comprender el enunciado.

2.- Identificar la incógnita.

3.- Traducir el enunciado al lenguaje algebraico.

4.- Plantear la ecuación y resolverla.

5.- Comprobar la solución obtenida.

Actividades resueltas

Vamos a resolver el siguiente problema:

- *¿Cuál es el número natural cuyo quíntuplo aumentado en 6 unidades es igual a su cuadrado?*

Una vez comprendido el enunciado, identificamos la incógnita, que en este caso, es el número que estamos buscando.

2.- Número buscado = x

3.- Traducimos ahora el problema al lenguaje algebraico:

$$5x + 6 = x^2$$

4.- Resolvemos la ecuación:

$$5x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{2} = 6\,; \qquad x_2 = \frac{5-7}{2} = -1$$

Solución: Como el enunciado dice “número natural” el número buscado es el 6.

5.- *Comprobación*: En efecto $5 \cdot 6 + 6 = 36 = 6^2$.

Actividades propuestas

38. ¿Qué número multiplicado por 4 es 5 unidades menor que su cuadrado?

39. En una clase deciden que todos van a enviar una carta al resto de compañeros. Uno dice: ¡Vamos a escribir 380 cartas! Calcula el número de alumnos que hay en la clase.

40. Calcula tres números consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 365.

41. Una fotografía rectangular mide 14 cm de base y 10 cm de altura. Alrededor de la foto hay un margen de igual anchura para la base que para la altura. Halla el ancho del margen, sabiendo que el área total de la foto y el margen es de 252 cm^2.

42. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Cuál es el número?

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

43. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 20 cm y la base mide 4 cm, calcula los lados del triángulo y su área.

44. Una hoja de papel cuadrada se dobla por la mitad. El rectángulo resultante tiene un área de 8 cm^2. ¿Cuál es perímetro de dicho rectángulo?

45. Un padre dice: "El producto de la edad de mi hijo hace 5 años por el de su edad hace 3 años es mi edad actual, que son 39 años". Calcula la edad del hijo.

46. Halla las dimensiones de rectángulo cuya área es 21 m^2, sabiendo que sus lados se diferencian en 4 metros.

47. En un triángulo rectángulo el cateto mayor mide 3 cm menos que la hipotenusa y 4 cm más que el otro cateto. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?

48. Halla dos números pares consecutivos cuyo producto sea 224.

49. Halla tres números impares consecutivos tales que si al cuadrado del mayor se le restan los cuadrados de los otros dos se obtiene como resultado 15.

3.2. Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

Para resolver problemas por medio de sistemas de ecuaciones, primero tendremos que pasar a lenguaje algebraico el enunciado del problema y luego resolverlo siguiendo los siguientes pasos:

1.- Comprender el enunciado.

2.- Identificar las incógnitas.

3.- Traducir el enunciado al lenguaje algebraico.

4.- Plantear el sistema y resolverlo.

5.- Comprobar la solución obtenida.

Actividades resueltas

Vamos a resolver el siguiente problema:

- *La suma de las edades de un padre y su hijo es 39 y su diferencia 25. ¿Cuál es la edad de cada uno?*

Una vez comprendido el enunciado, identificamos las incógnitas que, en este caso, son la edad del padre y el hijo

2.- Edad del padre = x

Edad del hijo = y

3.- Pasamos el enunciado a lenguaje algebraico:

La suma de sus edades es 39:

$$x + y = 39$$

Y su diferencia 25:

$$x - y = 25$$

4.- Planteamos el sistema y lo resolvemos por el método que nos resulte más sencillo. En este caso, lo hacemos por reducción:

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$\begin{cases} x+y=39 \\ x-y=25 \end{cases} \xrightarrow{sumamos} \begin{cases} x+y=39 \\ 2x+0=64 \end{cases} \Rightarrow x = 64/2 = 32$$

$x + y = 39 \Rightarrow 32 + y = 39 \Rightarrow y = 39 - 32 = 7$.

Solución: El padre tiene 32 años y el hijo tiene 7 años.

5.- *Comprobación:* En efecto, la suma de las edades es 32 + 7 = 39 y la diferencia es 32 – 7 = 25.

Actividades propuestas

50. La suma de las edades de María y Alfonso son 65 años. La edad de Alfonso menos la mitad de la edad de María es igual a 74. ¿Qué edad tienen cada uno?

51. La suma de las edades de Mariló y Javier es 32 años. Dentro de 7 años, la edad de Javier será igual a la edad de Mariló más 20 años. ¿Qué edad tiene cada uno en la actualidad?

52. Encuentra dos números cuya diferencia sea 24 y su suma sea 104.

53. Un hotel tiene 42 habitaciones (individuales y dobles) y 62 camas, ¿cuántas habitaciones tiene de cada tipo?

54. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 10 cm y las longitudes de sus dos catetos suman 14 cm. Calcula el área del triángulo.

55. Nieves le pregunta a Miriam por sus calificaciones en Matemáticas y en Lengua. Miriam le dice "La suma de mis calificaciones es 19 y el producto 90". Nieves le da la enhorabuena. ¿Qué calificaciones obtuvo?

56. De un número de tres cifras se sabe que suman 12, que la suma de sus cuadrados es 62, y que la cifra de las decenas es igual a la de las centenas más 1. ¿Qué número es?

57. Se tienen tres zumos compuestos del siguiente modo:

El primero de 40 dl de naranja, 50 dl de limón y 90 dl de pomelo.

El segundo de 30 dl de naranja, 30 dl de limón y 50 dl de pomelo.

El tercero de 20 dl de naranja, 40 dl de limón y 40 dl de pomelo.

Se pide qué volumen habrá de tomarse de cada uno de los zumos anteriores para formar un nuevo zumo de 34 dl de naranja, 46 dl de limón y 67 dl de pomelo.

58. Se venden tres especies de cereales: trigo, cebada y mijo. Cada kg de trigo se vende por 2 €, el de la cebada por 1 € y el de mijo por 0.5 €. Si se vende 200 kg en total y se obtiene por la venta 150 €, ¿cuántos volúmenes de cada cereal se han vendido?

59. Se desea mezclar harina de 2 €/kg con harina de 1 €/kg para obtener una mezcla de 1,2 €/kg. ¿Cuántos kg deberemos poner de cada precio para obtener 300 kg de mezcla?

60. En una tienda hay dos tipos de juguetes, los de tipo A que utilizan 2 pilas y los de tipo B que utilizan 5 pilas. Si en total en la tienda hay 30 juguetes y 120 pilas, ¿cuántos juguetes hay de cada tipo?

61. Un peatón sale de una ciudad A y se dirige a una ciudad B que está a 15 km de distancia a una velocidad de 4 km/h, y en el mismo momento sale un ciclista de la ciudad B a una velocidad de 16 km/h y se dirige hacia A, ¿cuánto tiempo lleva el peatón caminando en el momento del encuentro? ¿A qué distancia de B se cruzan?

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

CURIOSIDADES. REVISTA

El número de oro está en todas partes

¿Conoces un número irracional cuya parte decimal sea igual a la de su cuadrado?

Para encontrarlo debemos resolver la ecuación: $x^2 = x + n$, donde n sea un número entero. Imaginemos que n sea igual a 1, entonces:

$$x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \begin{cases} 1{,}618033988749\ldots \\ -0{,}618033988749\ldots \end{cases}$$

¡El número de oro!

¿Conoces un número cuya parte decimal sea igual a la de su inverso?

Planteamos de nuevo la ecuación: $1/x = x + n$, donde n sea un número entero. Imaginemos que n sea igual a -1, entonces:

$$1/x = x - 1 \Rightarrow 1 = x^2 - x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

¡Tenemos la misma ecuación de antes! ¡La solución vuelve a ser el número de oro!

¡El número de oro, Φ, está en todas partes! Ya lo habíamos encontrado en pintura, arquitectura, esculturas, y en la propia naturaleza. Ahora lo encontramos en las ecuaciones.

El brócoli es un conocido ejemplo de fractal. Cada uno de sus trocitos es similar al completo, con un cambio de escala. También está relacionado con el número de oro y la sucesión de *Fibonacci*. Si contamos las espirales que se forman son dos número sucesivos de la sucesión de *Fibonacci*, hacia la derecha son 8 y hacia la izquierda son 13. Recuerda la sucesión es: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13….

¿Sabrías calcular $x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}$? Hay infinitas raíces cuadradas encadenadas. Como si a infinito le sumo 1 no varía, una forma de encontrar su valor es volver a sustituir x en la igualdad: $x = \sqrt{1+x}$ y resolver la ecuación:

$$x = \sqrt{1+x} \Rightarrow x^2 = 1 + x \Rightarrow$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{1+4}}{2} = \Phi$$

¿Sabrías calcular $x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$? Es una fracción continua. Hay infinitas fracciones encadenadas. Para calcularla de nuevo sustituimos x: $x = 1 + \frac{1}{x}$ y resolvemos la ecuación: $x^2 = x + 1$ que ya sabemos que su solución positiva es Φ.

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

Obtención de la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado.

$ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$

$\Downarrow$

$ax^2 + bx = -c$

$\Downarrow$ Multiplicamos por $4a$

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

$\Downarrow$ Sumamos b^2

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$

$\Downarrow$ Completamos cuadrados

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

$\Downarrow$ Hallamos la raíz cuadrada

$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$\Downarrow$Despejamos la x

$2ax = -b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

$\Downarrow$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tres ecuaciones de segundo grado interesantes

$x^2 = 2$

Esta ecuación nos aparece al aplicar el Teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo isósceles de lados iguales a 1, o al calcular la diagonal de un cuadrado de lado 1. Su solución es la longitud de la hipotenusa o de la diagonal. Tiene de interesante que se demuestra que dicha solución NO es un número racional, un número que pueda escribirse como cociente de dos números enteros.

$x + 1 = x^2$

También se puede escribir como: $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$ que es una proporción, donde x toma el valor $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618\ldots$ que es el número de oro, otro número irracional

$x^2 = -1$

La tercera ecuación no tiene solución real, ningún número real al elevarlo al cuadrado puede dar un número negativo, pero si ampliamos el campo real con su raíz, $\sqrt{-1} = i$, resulta que ya todas las ecuaciones de segundo grado tienen solución, y a los números $a + b \cdot i$ se les llama **números complejos**.

Emmy Noether fue una matemática alemana de origen judío cuyos trabajos en Álgebra permitieron resolver el problema de la conservación de la energía.

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

Problemas

Algunos problemas de ingenio que se resuelven, (o no) por ecuaciones o sistemas.

Los cocos

Tres marineros y un mono recogen cocos. Antes de repartirlos se duermen. Por la noche un marinero reparte el montón de cocos en tres partes iguales, le sobra uno que se lo da al mono, y se guarda su parte. Un segundo marinero hace la misma operación, le sobra también uno y se guarda su parte. Lo mismo hace el tercer marinero. A la mañana siguiente reparten los cocos y ahora el reparto es exacto. ¿Cuántos cocos había?

La piscina

La piscina del polideportivo municipal se ha tenido que vaciar por un problema de contaminación. Este proceso se ha realizado en tres fases para poder utilizar el agua en la limpieza de las instalaciones, primero se ha sacado la tercera parte, después la mitad del resto y aún quedan 150 m^3 de agua. ¿Qué capacidad tiene la piscina?

Ayuda: No plantees una ecuación. Haz un diagrama.

Las perlas del rajá

Un rajá dejó a sus hijas cierto número de perlas y determinó que se hiciera del siguiente modo: La hija mayor tomaría una perla y un séptimo de lo que quedara. La segunda hija recibiría dos perlas y un séptimo de lo que restante. La tercera joven recibiría tres perlas y un séptimo de lo que quedara. Y así sucesivamente. Hecha la división cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas. ¿Cuántas perlas había? ¿Cuántas hijas tenía el rajá?

La invitación

Juan invita a Marta y a Elena a merendar. Prepara una limonada y se dispone a servirla. Marta la quiere con poco limón y Elena con mucho. Juan ha puesto el zumo de limón y el agua en jarras iguales y con la misma cantidad. Para complacer a sus invitadas toma un vaso de la jarra con limón y lo echa en la del agua, y a continuación toma un vaso del mismo tamaño de la mezcla y lo echa en la del limón. ¿Habrá más limón en la jarra del agua o agua en la jarra del limón?

Ayuda: Este problema es muy antiguo. Parece de ecuaciones pero así es muy difícil. Aunque pensando un poco, resulta muy sencillo.

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

		Ejemplos
Ecuación de segundo grado	Es una ecuación algebraica en la que la mayor potencia de la incógnita es 2. Tiene la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$.	$-4x^2 + 5x - 8/3 = 0$
Resolución de ecuaciones de segundo grado completas	Se usa la fórmula: $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$	$x^2 - 7x + 10 = 0$: $$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2}$$ $x_1 = 5$, $x_2 = 2$
Discriminante	$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9$
Número de soluciones de una ecuación de segundo grado	Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, tiene dos soluciones reales y distintas Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, tiene una solución doble. Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene solución	$x^2 - 3x - 4 = 0$: $\Delta = 25 > 0$, tiene dos soluciones 4 y -1. $x^2 - 4x + 4 = 0$: $\Delta = 0$, tiene una raíz doble: $x = 2$. $x^2 + 3x + 8 = 0$: $\Delta = -23$. No tiene solución real
Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas	Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despejamos la incógnita: $$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}.$$ Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = \mathbf{0}$ y $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 50 = 0$: $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$ $3x^2 - 18x = 0 \Rightarrow 3x(x - 9) = 0 \Rightarrow$ $x_1 = 0$; $x_2 = 9$.
Suma y producto de raíces	$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$; $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$	$x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x_1 = 5$; $x_2 = 2$.
Sistema de ecuaciones lineales	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} 6x + 5y = 8 \\ 4x - 2y = -3 \end{cases}$
Clasificación	**Compatible determinado**: Una única solución, el punto de intersección. Las rectas son **secantes**: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -2x - y = 1 \end{cases}$ **Compatible indeterminado**: Infinitas soluciones, por lo que las rectas son **coincidentes:** $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$ **Incompatible**: No tiene solución, las rectas son **paralelas:** $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 9 \end{cases}$	
Métodos de resolución	**Sustitución:** despejar una incógnita y sustituir en la otra ecuación. **Igualación:** despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones. **Reducción:** sumar las dos ecuaciones, multiplicándolas por números adecuados.	

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Ecuaciones de segundo grado

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado

a) $-x^2 - 7x - 12 = 0$ b) $x(-5 + x) = 3$ c) $3x^2 = 30x$

d) $3(x + 1) - x(5x + 2) = 7$ e) $3(7x - 2) + 3x(x - 4) = 1$ f) $4(x^2 - 4) - 5(3 + 2x) = -7$

g) $(3x + 2)\cdot(4x - 2) = -6x - 2$ h) $x\cdot(x + 5) = 168$ i) $2(3x^2 - 5x + 2) - 5x(6x - 3) = -2$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado con denominadores:

a) $\frac{x^2-3}{2}-\frac{x+2}{4}=5$ b) $\frac{x^2-5}{2}+\frac{2x^2-3x+7}{2}=5$ c) $\frac{2x^2+1}{5}+\frac{x+3}{10}=1$

d) $\frac{2-2x^2}{3}+\frac{4x-3}{2}=\frac{5}{6}$ e) $\frac{x^2-1}{3}-\frac{5x-9}{6}=4x-3$ f) $\frac{2x+3x^2}{7}-\frac{3x-8}{14}=1$

3. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 - 3x - 10 = 0$ b) $x^2 + 3x - 10 = 0$ c) $x^2 + 7x + 10 = 0$

d) $x^2 - 7x + 10 = 0$ e) $x(-1 + x) = 0$ f) $2x^2 = 50$

g) $x^2 - 5x + 6 = 0$ h) $x^2 - x - 6 = 0$ i) $x^2 + x - 6 = 0$

4. Factoriza las ecuaciones del problema anterior. Así, si las soluciones son 2 y 3, escribe:

$5x^2 - 25x + 30 = 0 \Leftrightarrow 5(x - 2)\cdot(x - 3) = 0$. Observa que si el coeficiente de x^2 fuese distinto de 1 los factores tienen que estar multiplicados por dicho coeficiente.

5. Cuando el coeficiente b es par ($b = 2B$), puedes simplificar la fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2B\pm\sqrt{4B^2-4ac}}{2a}=\frac{-2B\pm2\sqrt{B^2-ac}}{2a}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-ac}}{a}$$

Así para resolver $x^2 - 8x + 12 = 0$ basta decir $x=4\pm\sqrt{16-12}=4\pm2$, luego sus soluciones son 6 y 2.

Utiliza esa expresión para resolver:

a) $x^2 - 2x + 8 = 0$ b) $x^2 - 6x - 10 = 0$ c) $x^2 + 4x + 9 = 0$

6. Resuelve mentalmente las ecuaciones siguientes, luego desarrolla las expresiones y utiliza la fórmula general para volver a resolverlas.

a) $(x - 2)\cdot(x - 5) = 0$ b) $(x + 1)\cdot(x - 6) = 0$ c) $(x - 3)\cdot(x - 5) = 0$

d) $(x - 4)\cdot(x + 7) = 0$ e) $(x + 8)\cdot(x - 9) = 0$ f) $(x - 2)\cdot(x + 3) = 0$

7. Determina el número de soluciones reales que tienen las siguientes ecuaciones de segundo grado calculando su discriminante, y luego resuélvelas.

a) $x^2 + 7x - 3 = 0$ b) $5x^2 + 7x - 8 = 0$ c) $2x^2 + 3x + 9 = 0$

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

d) $2x^2 - 2x + 7 = 0$ e) $3x^2 - 2x - 7 = 0$ f) $4x^2 + x - 5 = 0$

8. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que no tengan ninguna solución real. *Ayuda*: Utiliza el discriminante.

9. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan una solución doble.

10. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan dos soluciones reales y distintas.

11. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que no tengan solución real.

12. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $x^5 - 37x^3 + 36x = 0$ b) $x^3 - 2x^2 - 5x = 0$ c) $2x^3 - x^2 - 4x = 0$

d) $x^4 - 5x^2 - 2 = 0$ e) $2x^4 = 32x^2 - 96$ f) $x(x-3)(2x+3)(3x-5) = 0$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones aplicando un cambio de variable:

a) $x^8 + 81 = 82x^4$ b) $x^4 - 24x^2 + 144 = 0$ c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ d) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales:

a) $3x + \frac{2}{x} = 1$ b) $\frac{2}{3x} + \frac{5}{6x} = x$ c) $\frac{2}{x-5} + 3 = \frac{1}{x-2}$ d) $\frac{3x}{2-x} - 4x = 2$

e) $\frac{3}{x+2} = \frac{2(3x+1)}{x-2} + 1$ f) $\frac{3x-1}{x+2} - \frac{5+2x}{2x} = 4$ g) $\frac{5x-3}{x+1} - \frac{5+3x}{x-1} = 2$

h) $\frac{4}{1-x} = \frac{3}{x} + \frac{1}{x-x^2}$ i) $\frac{5x}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4} = \frac{x}{3}$ j) $\frac{1}{3} = \frac{x-4}{6-x}$

15. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $x = -2 + \sqrt{5+4x^2}$ b) $\sqrt{16-x} = x-4$ c) $5 + \sqrt{x^2-3x+2} = 2x$

d) $\sqrt{x} - \sqrt{x-2} = 5$ e) $\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1} + 2 = 0$ f) $\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 3$

g) $5\sqrt{x-2} + 1 = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ h) $\sqrt{x-2} - \frac{1}{\sqrt{x}-2} = 2$ i) $\sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} = 3$

16. Resuelve las ecuaciones siguientes: a) $3^{2x} = \frac{1}{81}$ b) $2^{2x} = \frac{1}{1024}$

Sistemas lineales de ecuaciones

17. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 4y = 5 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + y = 2 \end{cases}$

18. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} -3x + 2y = -1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 4y = 10 \\ -8x + 3y = -13 \end{cases}$

19. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

a) $\begin{cases} 7x-2y=5 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+5y=20 \\ -x-6y=-14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-6y=0 \\ -5x+2y=-9 \end{cases}$

20. Resuelve de forma gráfica los siguientes sistemas

a) $\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y=5 \\ x-7y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-y=1 \\ -7x+5y=3 \end{cases}$

21. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \dfrac{x-2}{5}-\dfrac{3y-1}{2}=-1 \\ \dfrac{3x+1}{2}+\dfrac{3y-1}{4}=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}-\dfrac{5y+7}{6}=-2 \\ 4x+y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{5x+1}{2}+\dfrac{2y-5}{3}=4 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

22. Copia en tu cuaderno y completa los siguientes sistemas incompletos de forma que se cumpla lo que se pide en cada uno:

Compatible indeterminado — Incompatible — Su solución sea $x = 2$ e $y = 1$

a) $\begin{cases} (\ )x+2y=(\ ) \\ 3x-y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -3x+y=1 \\ (\ )x+y=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-3y=(\ ) \\ (\ )x+2y=8 \end{cases}$

Incompatible — Su solución sea $x = -1$ e $y = 1$ — Compatible indeterminado

d) $\begin{cases} 2x-3y=-4 \\ 6x+(\ )y=(\ ) \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4x+(\ )y=-1 \\ (\ )x+y=5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} (\ )x+8y=(\ ) \\ x+2y=-3 \end{cases}$

23. Escribe tres sistemas lineales que sean incompatibles.
24. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles indeterminados.
25. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles determinados.
26. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación y comprueba la solución gráficamente. ¿De qué tipo es cada sistema?

a) $\begin{cases} -2x+6y=4 \\ 7x-3y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=-3 \\ 3x-3y=-9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=4 \\ -x+3y=-5 \end{cases}$

Problemas

27. En una tienda alquilan bicicletas y triciclos. Si tienen 30 vehículos con un total de 80 ruedas, ¿cuántas bicicletas y cuántos triciclos tienen?
28. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 12 le faltan 64 unidades para completar su cuadrado?
29. Descompón 12 en dos factores cuya suma sea 7.
30. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 616. ¿Qué número es?
31. La suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 130. Determina dichos números.
32. Van cargados un asno y un mulo. El asno se quejaba del peso que llevaba encima. El mulo le

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

contestó: Si yo llevara uno de tus sacos, llevaría el doble de carga que tú, pero si tú tomas uno de los míos, los dos llevaremos igual carga. ¿Cuántos sacos lleva cada uno?

33. ¿Qué número multiplicado por 3 es 28 unidades menor que su cuadrado?

34. Calcula tres números consecutivos cuya suma de cuadrados es 110.

35. Dentro de 2 años, la edad de Raquel será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 10 años. ¿Qué edad tiene Raquel?

36. Dos números se diferencian en 3 unidades y la suma de sus cuadrados es 185. ¿Cuáles son dichos números?

37. La suma de dos números es 2 y su producto es –80, ¿de qué números se trata?

38. María quiere formar bandejas de un kilogramo con caramelos y bombones. Si los caramelos le cuestan a 3 euros el kilo y los bombones a 7 euros el kilo, y quiere que el precio de cada bandeja sea de 5 euros, ¿qué cantidad deberá poner de cada producto? Si quiere formar 100 bandejas, ¿qué cantidad de caramelos y de bombones va a necesitar?

39. Determina los catetos de un triángulo rectángulo cuya suma es 17 cm y la hipotenusa de dicho triángulo mide 13 cm.

40. El producto de dos números es 6 y la suma de sus cuadrados 13. Calcula dichos números

41. La suma de dos números es 12. El doble del primero más el triple del segundo es 31. ¿De qué números se trata?

42. En un garaje hay 30 vehículos entre coches y motos. Si en total hay 80 ruedas, ¿cuántos coches y motos hay en el garaje?

43. La edad actual de Luis es el doble de la de Miriam. Dentro de 10 años, sus edades sumarán 50. ¿Cuántos años tienen actualmente Luis y Miriam?

44. En mi clase hay 25 personas. Nos han regalado a cada chica 3 pegatinas y a cada chico 2 chapas. Si en total había 65 regalos. ¿Cuántos chicos y chicas somos en clase?

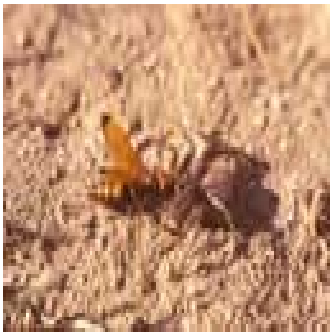
45. Entre mi abuelo y mi hermano tienen 80 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edad tiene cada uno?

46. Tres bocadillos y un refresco cuestan 8 €. Cuatro bocadillos y dos refrescos cuestan 12 €. ¿Cuál es el precio del bocadillo y el refresco?

47. En una granja hay gallinas y ovejas. Si se cuentan las cabezas, son 40. Si se cuentan las patas, son 100. ¿Cuántos gallinas y ovejas hay en la granja?

48. Un rectángulo tiene un perímetro de 180 metros. Si el largo es 10 metros mayor que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

49. En un monedero hay billetes de 5 € y 10 €. Si en total hay 10 billetes y 75 €, ¿cuántas billetes de cada valor hay en el monedero?



50. En una pelea entre arañas y avispas, hay 13 cabezas y 90 patas. Sabiendo que una araña tiene 8 patas y una avispa 6, ¿cuántas moscas y arañas hay en la pelea?

51. Una clase tiene 30 estudiantes, y el número de alumnas es doble al de alumnos, ¿cuántos chicos y chicas hay?

52. Nieves tiene 9 años más que su hermano Daniel, y su madre tiene 50 años. Dentro de 2 años la edad de la madre será doble de la suma de

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

las edades de sus hijos, ¿qué edades tienen?

53. Se mezclan 18 kg de arroz de 1,3 € el kilogramo con 24 kg de arroz de precio desconocido, resultando el precio de la mezcla de 1,7 € el kg. ¿Qué precio tenía el segundo maíz?

54. La altura de un trapecio isósceles es de 3 cm, el perímetro, 28 cm, y los lados inclinados son iguales a la base menor. Calcula el área del trapecio.

55. Dos autobuses salen, uno desde Madrid y el otro desde Cáceres a las 9 de la mañana. Uno va a 80 km/h y el otro a 100 km/h. ¿A qué hora se cruzan? ¿A cuántos km de Madrid estarán?

56. En un concurso se ganan 40 euros por cada respuesta acertada y se pierden 80 por cada fallo. Después de 10 preguntas, Carmela lleva ganados 280 euros. ¿Cuántas preguntas ha acertado?

57. Paco ha comprado 5 zumos y 4 batidos por 5,7 €, luego ha comprado 7 zumos y 5 batidos y le han costado 5,9 €. Calcula los precios de ambas cosas.

58. ¿Qué fracción es igual a 1 cuando se suma 1 al numerador y es igual a 1/2 si se suma 2 al denominador?

59. El cociente de una división es 3 y el resto es 1. Si el divisor disminuye en 1 unidad, el cociente aumenta en 3 y el resto nuevo es 1. Hallar el dividendo y el divisor.

60. Dos amigas fueron a pescar. Al final del día una dijo: "Si tú me das uno de tus peces, entonces yo tendré el doble que tú". La otra le respondió: "Si tú me das uno de tus peces, yo tendré el mismo número de peces que tú". ¿Cuántos peces tenía cada una?

61. Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su área es 35 cm^2 y cuyo perímetro, 24 cm.

62. Un peatón sale de una ciudad "A" a una velocidad de 4 km/h, y se dirige a una ciudad "B" que está a 20 km de la ciudad "A", 30 minutos después sale un ciclista de la ciudad "B" a una velocidad de 20 km/h y se dirige hacia "A", ¿cuánto tiempo lleva el peatón caminando en el momento del encuentro? ¿A qué distancia de "B" se cruzan?

63. Se desea mezclar aceite de 2,7 €/l con otro aceite de 3,6 €/l de modo que la mezcla resulte a 3 €/l. ¿Cuántos litros de cada clase deben mezclarse para obtener 100 litros de la mezcla?

64. Al intercambiar las cifras de un número de dos cifras se obtiene otro que es 45 unidades mayor. Halla el número inicial.

65. La diagonal de un rectángulo mide 25 cm y el perímetro 70 cm. Halla los lados del rectángulo.

66. Una valla rodea un terreno rectangular de 300 m^2. Si la valla mide 70 metros, calcula las dimensiones del terreno.

67. Varios amigos van a hacer un regalo de bodas que cuesta 800 euros, que pagarán a partes iguales. A última hora se apuntan seis amigos más, con lo que cada uno toca a 30 euros menos. ¿Cuántos amigos eran inicialmente? ¿Cuánto pagará al final cada uno?

68. Las diagonales de un rombo se diferencian en 2 cm y su área es de 24 cm^2. Calcula su perímetro.

69. Un tren sale de Barcelona hacia Madrid a una velocidad de 200 km/h. Una hora más tarde sale otro tren de Madrid hacia Barcelona a 220 km/h; la distancia entre las dos ciudades es de 618 km. ¿Al cabo de cuánto tiempo se cruzan los dos trenes? ¿A qué distancia de Barcelona?

70. Un coche sale de una ciudad "A" a una velocidad de 100 km/h y 30 minutos más tarde otro coche sale de "A" en la misma dirección y sentido a una velocidad de 120 km/h, ¿cuánto tiempo tardará el segundo en alcanzar al primero y a qué distancia de "A" se produce el encuentro?

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. La solución de la ecuación $2(x-3)-3(x^2-4)=1$ es:

a) $x = 10/3 \wedge x = -2$ b) $x = 5/3 \wedge x = -1$ c) $x = 1 \wedge x = -2/3$ d) $x = 3/2 \wedge x = -7/6$

2. Las soluciones de la ecuación $80 = x(x-2)$ son:

a) $x = 8 \wedge x = -10$ b) $x = 40 \wedge x = 2$ c) $x = 10 \wedge x = -8$ d) $x = 10 \wedge x = 8$

3. Las soluciones de la ecuación $\frac{3x-1}{2}-\frac{x+5}{6}=\frac{x^2}{3}$ son:

a) $x = 4 \wedge x = -2$ b) $x = 3 \wedge x = -2$ c) $x = 1/5 \wedge x = 2$ d) $x = 2 \wedge x = 2$

4. Las soluciones de la ecuación $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ son:

a) 2, –2, 5, –5 b) 3, –3, 2, –2 c) 1, –1, 4, –4 d) 3, –3, 5, –5

5. Las rectas que forman el sistema $\begin{cases} 7x+21y=14 \\ 2x+6y=4 \end{cases}$ son:

a) Secantes b) Paralelas c) Coincidentes d) Se cruzan

6. La solución del sistema $\begin{cases} 3x-2y=-1 \\ -2x+3y=2 \end{cases}$ es:

a) $x = 2$ e $y = 1$ b) $x = 2$ e $y = 2$ c) $x = 3$ e $y = 2$ d) No tiene solución

7. La solución del sistema $\begin{cases} 3+2x=x-1+y \\ 2x-9y=-43 \end{cases}$ es:

a) $x = 1$ e $y = 5$ b) $x = -2$ e $y = -5$ c) $x = -43/2$ e $y = 0$ d) $x = 3$ e $y = 4$

8. La solución del sistema $\begin{cases} 3x-2y+z=2 \\ -2x+3y+z=7 \\ 2x-3y+2z=2 \end{cases}$ es:

a) $x = 3, y = 2, z = 1$ b) $x = 2, y = 1, z = 3$ c) $x = -1, y = -2, z = -3$ d) $x = 1, y = 2, z = 3$

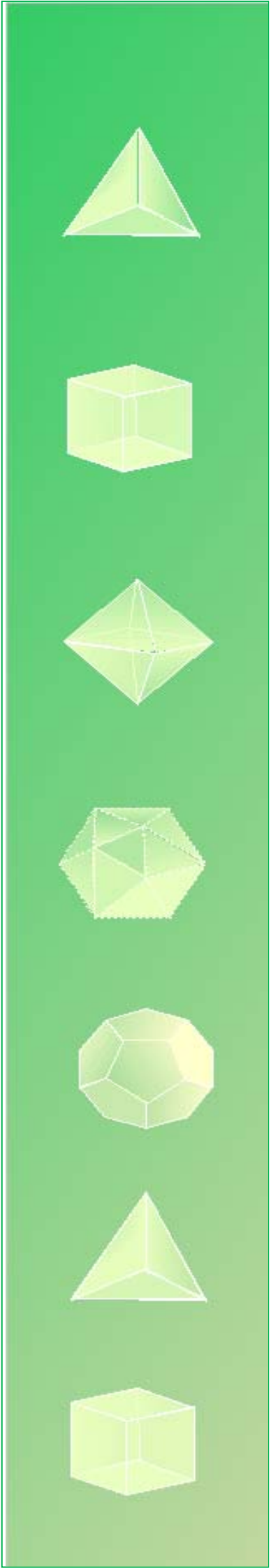
9. En una granja, entre gallinas y vacas hay 120 animales y 280 patas. ¿Cuántos gallinas y vacas hay en la granja?

a) 90 gallinas y 30 vacas b) 100 gallinas y 20 vacas c) 80 gallinas y 40 vacas

10. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 5, le faltan 234 unidades para llegar a su cuadrado?

a) 18 años b) 20 años c) 25 años d) 28 años

Autora: Raquel Hernández
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde



Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas:

4ºB ESO
Capítulo 5: Inecuaciones

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-044034

Fecha y hora de registro: 2014-05-28 18:14:27.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Ana Lorente

Revisora: María Molero

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

1. INTERVALOS

1.1. TIPOS DE INTERVALOS

1.2. SEMIRRECTAS REALES

2. INECUACIONES

2.1. INECUACIONES EQUIVALENTES:

3. INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

3.1. INECUACIONES DE PRIMER GRADO

3.2. INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

3.3. SISTEMAS DE INECUACIONES

3.4. INECUACIONES EN VALOR ABSOLUTO

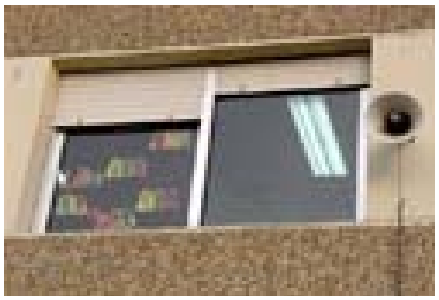
4. INECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

4.1. INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

4.2. SISTEMAS DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

Resumen

En muchas ocasiones vas a encontrarte con inecuaciones. Si trabajas con intervalos dirás $a < x < b$, por ejemplo. En otras ocasiones tu problema será que algo debe ser menor que una cierta cantidad. Imagina que queremos construir una ventana en la pared de una habitación de 4 metros de larga y 2,3 metros de alta. Es imposible que la ventana tenga unas dimensiones mayores que las de la pared. Para complicarlo un poco, imagina ahora que la longitud total de los perfiles con los que vamos a construir la ventana es de 10 metros. Si la ventana es rectangular y llamamos x a la longitud de la base e y a la de la altura, por ahora sabemos que $x \leq 4$, $y \leq 2{,}3$, $2x + 2y \leq 10$. Por ahora hay muchas soluciones que resuelven el problema. Pero el arquitecto desea que la ventana tenga la mayor luz posible. Tú ya sabes que el área máxima la consigues con un cuadrado, pero… esta solución no te sirve porque el lado debería medir 2,5 metros y nos saldríamos de la pared. Debemos jugar con esas desigualdades para dar una solución al problema.



Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. INTERVALOS

Recuerda que:

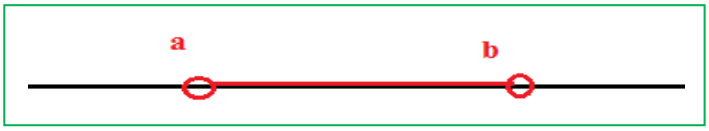
Un intervalo de números reales es el conjunto de números correspondientes a una parte de la recta numérica, en consecuencia, un intervalo es un subconjunto del conjunto de los números reales.

1.1. Tipos de intervalos

Intervalo abierto: es aquel en el que los extremos no forman parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos forman parte del intervalo, salvo los propios extremos.

En otras palabras $I = (a, b) = \{x \in \Re \mid a < x < b\}$, observa que se trata de desigualdades estrictas.

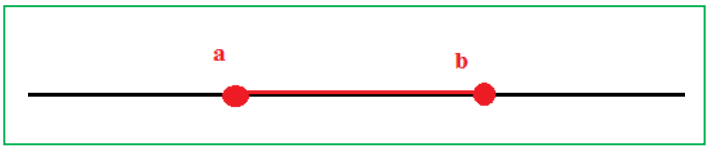
Gráficamente, lo representamos en la recta real del modo siguiente:



Intervalo cerrado: es aquel en el que los extremos si forman parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos, incluidos éstos, forman parte del intervalo.

En otras palabras $I = [a, b] = \{x \in \Re \mid a \le x \le b\}$, observa que ahora no se trata de desigualdades estrictas.

Gráficamente:

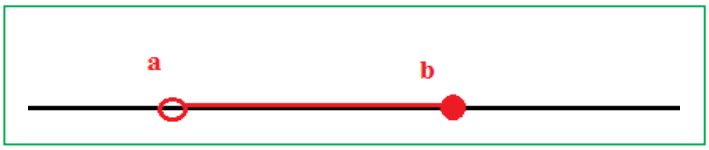


Intervalo semiabierto: es aquel en el que solo uno de los extremos forma parte del mismo, es decir, todos los puntos de la recta comprendidos entre los extremos, incluido uno de éstos, forman parte del intervalo.

Intervalo semiabierto por la izquierda, el extremo inferior no forma parte del intervalo, pero el superior si, en otras palabras:

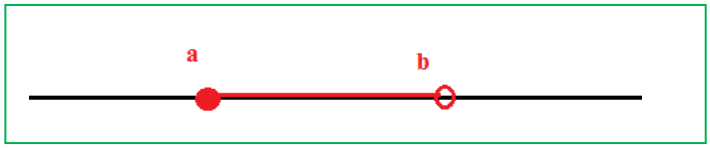
$$I = (a, b] = \{x \in \Re \mid a < x \le b\},$$

observa que el extremo que queda fuera del intervalo va asociado a una desigualdad estricta.



Intervalo semiabierto por la derecha, el extremo superior no forma parte del intervalo, pero el inferior si, en otras palabras $I = [a, b) = \{x \in \Re \mid a \le x < b\}$, observa que el extremo que queda fuera del intervalo va asociado a una desigualdad estricta.

Gráficamente:



1.2. Semirrectas reales

Semirrecta de los números positivos $S = (0 , \infty)$, es decir, desde cero hasta infinito.

Semirrecta de los números negativos $S = (-\infty, 0)$, es decir, desde el menos infinito, el infinito negativo, hasta cero.

Con lo que toda la recta de los números reales es $\Re = (-\infty, \infty)$.

A una semirrecta se la puede considerar como un intervalo infinito.

Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

1. Escribe los siguientes intervalos mediante conjuntos y represéntalos en la recta real:

a) $[1, 7)$ b) $(-3, 5)$ c) $(2, 8]$ d) $(-\infty, 6)$

2. Representa en la recta real y escribe en forma de intervalo:

a) $2 < x < 5$ b) $4 < x$ c) $3 \leq x < 6$ d) $x \geq 7$

2. INECUACIONES

Una desigualdad es una expresión numérica o algebraica unida por uno de los cuatro signos de desigualdad: $<$, $>$, $\leq$, $\geq$.

Por ejemplo:

- $-2 < 5$, $4 \geq x + 2$, $x^2 - 5 \geq x$, $x + y \geq 2$.

Una **inecuación** es una desigualdad algebraica en la que aparecen una o más incógnitas.

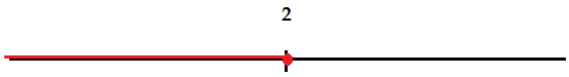
El **grado** de una inecuación es el mayor de los grados al que están elevadas sus incógnitas.

Así,

- $4 \geq x + 2$ y $x + y \geq 2$ son inecuaciones de primer grado, mientras que $x^2 - 5 \geq x$ es de segundo grado.

Resolver una inecuación consiste en encontrar los valores que la verifican. Éstos se denominan **soluciones** de la misma.

Por ejemplo:

- $3 \geq x + 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2] \Leftrightarrow$ 

2.1. Inecuaciones equivalentes:

Dos inecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución.

A veces, para resolver una inecuación, resulta conveniente encontrar otra equivalente más sencilla. Para ello, se pueden realizar las siguientes transformaciones:

- Sumar o restar la misma expresión a los dos miembros de la inecuación.

$$3x + 2 < 5 \Leftrightarrow 3x + 2 - 2 < 5 - 2 \Leftrightarrow 3x < 3$$

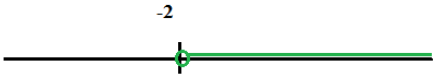
- Multiplicar o dividir ambos miembros por un número positivo.

$$3x < 3 \Leftrightarrow 3x : 3 < 3 : 3 \Leftrightarrow x < 1$$

- Multiplicar o dividir ambos miembros por un número negativo y cambiar la orientación del signo de la desigualdad.

Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$-x < 2 \Leftrightarrow (-x)\cdot(-1) > 2\cdot(-1) \Leftrightarrow x > -2 \Leftrightarrow (-2, +\infty) \Leftrightarrow$



Actividades propuestas

3. Dada la siguiente inecuación $2 + 3x < x + 1$, determina cuáles de los siguientes valores son solución de la misma:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -4, 6, -7, 12, -15$$

4. Realiza las transformaciones indicadas de modo que se obtengan ecuaciones equivalentes:

a) Sumar 3: $x - 1 > 4$
b) Restar 5: $x - 3 > 7$
c) Multiplicar por 5: $-8x \geq 9$
d) Multiplicar por -5: $-3x \geq 7$
e) Dividir entre 2: $4x < 10$
f) Dividir entre -2: $4x \geq 10$

5. Escribe una inecuación que sea cierta para $x = 3$ y falsa para $x = 3{,}5$.

3. INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

3.1. Inecuaciones de primer grado

Una inecuación de primer grado con una incógnita puede escribirse de la forma:

$$ax > b,\ ax \geq b,\ ax < b \quad \text{ó} \quad ax \leq b.$$

Para resolver la inecuación en la mayoría de los casos conviene seguir el siguiente procedimiento:

1º) **Quitar denominadores**, si los hay. Para ello, se multiplica los dos miembros de la ecuación por el m.c.m. de los denominadores.

2º) **Quitar los paréntesis**, si los hay.

3º) **Transponer** los términos con x a un miembro y los números al otro.

4º) **Reducir** términos semejantes.

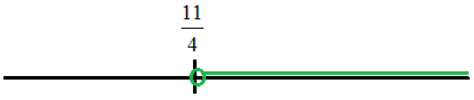
5º) **Despejar** la x.

Ejemplo:

- $$\frac{x-3}{3} - \frac{(x-7)}{6} > \frac{4-x}{2} \Leftrightarrow \frac{2(x-3)-(x-7)}{6} > \frac{3(4-x)}{6} \Leftrightarrow 2(x-3)-(x-7) > 3(4-x)$$

$$\Leftrightarrow 2x-6-x+7 > 12-3x \Leftrightarrow 2x-x+3x > 6-7+12 \Leftrightarrow 4x > 11 \Leftrightarrow x > \frac{11}{4}$$

$$x \in \left(\frac{11}{4}, +\infty\right)$$



Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

6. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $2 + 3x < x + 1$ b) $5 + 2x \leq 7x + 4$ c) $6 + 5x > 6x + 4$ d) $4 + 8x \geq 2x + 9$

7. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $3(2 + 3x) < -(x + 1)$ b) $5(1 + 2x) \leq 2(7x + 4)$ c) $2(6 + 5x) + 3(x - 1) > 2(6x + 4)$

8. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $3 + 4x < x/2 + 2$ b) $4 + 4x/3 \leq 7x/2 + 5$ c) $(5 + 7x)/3 > 8x + 2$ d) $(4 + 8x)5 + 3 \geq (2x + 9)/7$

9. Escribe una inecuación cuya solución sea el siguiente intervalo:

a) $[1, \infty)$ b) $(-\infty, 5)$ c) $(2, \infty]$ d) $(-\infty, 6)$

10. Calcula los valores de x para que sea posible calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{3x-5}$ b) $\sqrt{-x-12}$ c) $\sqrt{3-5x}$ d) $\sqrt{-3x+12}$

3.2. Inecuaciones de segundo grado

Una inecuación de segundo grado con una incógnita puede escribirse de la forma:

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

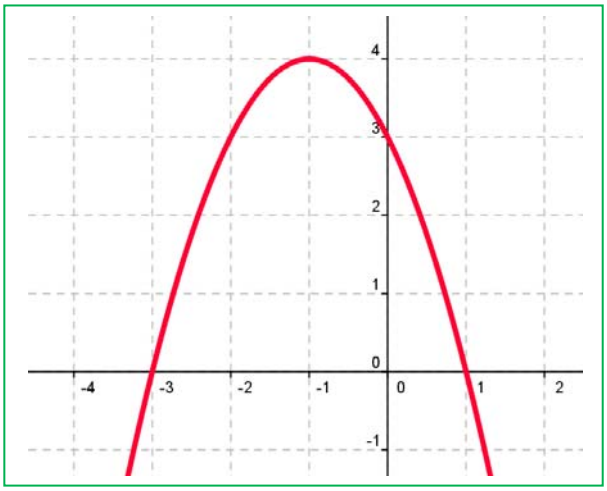
empleando cualquiera de los cuatro signos de desigualdad.

Para resolverla, calculamos las soluciones de la ecuación asociada, las representamos sobre la recta real, quedando por tanto la recta dividida en tres, dos o un intervalo, dependiendo de que la ecuación tenga dos, una o ninguna solución.

En cada uno de ellos, el signo del polinomio se mantiene constante, por lo que bastará con determinar el signo que tiene dicho polinomio para un valor cualquiera de cada uno de los intervalos. Para saber si las soluciones de la ecuación verifican la inecuación, bastará con sustituirla en la misma y comprobarlo.

Ejemplo:

- Representa gráficamente la parábola $y = x^2 + 4x + 6$ e indica en qué intervalos es $x^2 + 4x + 6 > 0$.



Observa en la gráfica que la parábola toma valores positivos entre -3 y 1. La solución de la inecuación es:

$$x \in (-3, 1).$$

El punto -3 no es solución, ni tampoco el punto 1, pues el problema tiene una desigualdad estricta, >. Si tuviera la desigualdad $\geq$, $x^2 + 4x + 6 \geq 0$ la solución sería:

$$x \in [-3, 1\}.$$

Si fuera $x^2 + 4x + 6 < 0$, la solución sería: $x \in (-\infty,-3) \cup (1, +\infty)$.

Si fuera $x^2 + 4x + 6 \leq 0$, la solución sería: $x \in (-\infty,-3] \cup [1, +\infty)$.

Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

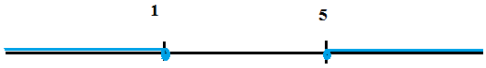
Ejemplo:

- $x^2 - 6x + 5 \geq 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$ sus raíces son $x = 1$ y $x = 5$.

	$(-\infty,1)$	1	$(1,5)$	5	$(5,+\infty)$
Signo de $x^2 - 6x + 5$	+		−		+
$x^2 - 6x + 5 \geq 0$	si		no		si

Por tanto, la solución es $x \in (-\infty, 1] \cup [5, \infty)$



Actividades propuestas

11. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 1 \geq 0$ b) $x^2 - 4 \leq 0$ c) $x^2 - 9 > 0$ d) $x^2 + 4 \geq 0$
e) $2x^2 - 50 < 0$ f) $3x^2 + 12 \leq 0$ g) $5x^2 - 45 > 0$ h) $x^2 + 1 \geq 0$

12. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + x \leq 0$ b) $x^2 - 5x > 0$ c) $x^2 \leq 8x$
d) $x^2 \leq 3x$ e) $2x^2 - 3x > 0$ f) $5x^2 - 10x < 0$

13. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $3x^2 - 5x \geq 0$
b) $3x^2 - 27 > 0$
c) $x^2 \leq 0$
d) $2x^2 > 4x$
e) $2x^2 - 8 > 0$
f) $5x^2 + 5x \geq 0$
g) $5x^2 - 5 \leq 0$
h) $x^2 - x > 0$

14. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 2x - 3 \leq 0$
b) $-x^2 - 2x + 8 \geq 0$
c) $x^2 + 9x + 14 > 0$
d) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$
e) $-x^2 - 4x - 5 < 0$
f) $x^2 + 8x + 16 > 0$
g) $x^2 + x + 3 \geq 0$
h) $2x^2 - 3x - 5 \leq 0$

Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

15. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + x - 6 > 0$
b) $x^2 - x - 12 \leq 0$
c) $x^2 - x - 20 < 0$
d) $x^2 + 5x - 14 \geq 0$
e) $-2x^2 + 3x + 2 > 0$
f) $3x^2 + 2x - 1 \leq 0$
g) $5x^2 - 7x - 6 \geq 0$
h) $2x^2 + x - 15 < 0$

16. Calcula los valores de *x* para que sea posible obtener las siguientes raíces:

a) $\sqrt{x^2 - 1}$ b) $\sqrt{-x^2 + 4}$ c) $\sqrt{x^2 + 5x + 6}$ d) $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$

17. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $(2x + 5)(2x - 5) \leq 11$ b) $(2x - 5)(4x - 3) - (x - 10)(x - 2) \geq 50$ c) $\dfrac{3x-2}{x} \leq \dfrac{5-2x}{x+3}$

3.3. Sistemas de inecuaciones

Un sistema de inecuaciones de primer grado con una incógnita es aquel en el que la única variable que interviene en todas las ecuaciones está elevada a un exponente igual a la unidad.

Sistemas de dos ecuaciones, tienen por expresión general:

$$\begin{cases} a_1 x < b_1 \\ a_2 x < b_2 \end{cases}$$, con cualesquiera de los signos <, >, $\leq$ ó $\geq$.

Para resolverlos, independientemente del número de inecuaciones que compongan el sistema, se resuelve cada inecuación por separado, y al final se determina la solución como la intersección de todas ellas, es decir, el intervalo que verifican todas las inecuaciones.

Ejemplo:

$\begin{cases} 2x > 4 \\ x + 5 \geq 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \leq 5 \end{cases}$, los intervalos solución son $\begin{cases} (2,+\infty) \\ (-\infty,5] \end{cases} \Rightarrow (2,+\infty) \cap (-\infty,5] = (2,5]$

Luego la solución común a ambas está en la intersección de ambos, es decir, en $(2,5]$.

Gráficamente puede verse:

Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

18. Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita:

a) $\begin{cases} 4x-3<1 \\ x+6>2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-6\le 0 \\ x-4>-5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+1\ge x+9 \\ x+5\le 2-3x \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-3\le 3x+7 \\ \frac{2x}{5}-\frac{x}{4}\ge\frac{2}{3} \end{cases}$

19. Indica un número positivo que al sumarle 5 sea menor que 7.

20. Expresa mediante una inecuación el área de un cuadrado sabiendo que su perímetro es mayor que el de un rectángulo de lados 3 y 7 cm.

21. Determina las posibles edades de Pepita y de su hija Charo sabiendo que difieren en más de 20 años y que dentro de 2 años, la cuarta parte de la edad de la madre es menor que la edad de la hija.

3.4. Inecuaciones en valor absoluto

Una inecuación en valor absoluto es aquella en la que parte de la inecuación, o toda ella, viene afectada por el valor absoluto de la misma.

La expresión general es de la forma $|ax+b|\le c$, empleando cualquiera de los cuatro signos de desigualdad.

Para resolverla, aplicamos la definición de valor absoluto de una cantidad y pasamos a un sistema de dos ecuaciones cuya solución es la solución de la inecuación.

$$|ax+b|\le c \text{ por definición } \begin{cases} ax+b\le c \\ -ax-b\le c \end{cases}$$

Ejemplo:

$$|2x-4|\le 12 \Rightarrow \begin{cases} 2x-4\le 12 \\ -2x+4\le 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 8 \\ x\ge -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-\infty,8] \\ [-4,+\infty) \end{cases} \Rightarrow [-4,8] \Rightarrow$$

$$|2x-6|>10 \Rightarrow \begin{cases} 2x-6>10 \\ -2x+6>10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>8 \\ x<-2 \end{cases}.$$

No existe ningún x que a la vez sea menor que -2 y mayor que 8, pero la solución son los valores que o bien pertenecen a un intervalo o bien al otro: $x\in(-\infty,-2)\cup(8,+\infty)$.

Comprueba que, por ejemplo, $x = 10$ verifica que $2x-6 = 20-6 = 14 > 10$, y que $x = -3$, también ya que $2x-6 = -6-6 = -12$ cuyo valor absoluto es mayor que 10.

Actividades propuestas

22. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $|x+3|<2$ b) $|2x+5|>1$ c) $|x-6|\le 2$ d) $|x-2|\ge 2$

Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4. INECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

4.1. Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Es toda inecuación del tipo: $ax + by > c$, con cualesquiera de los signos <, >, $\leq$ o $\geq$. Para resolverlas:

1º) **Representamos gráficamente** la función lineal asociada $ax + by = c$.

2º) La recta divide al plano en **dos semiplanos**. Utilizando un punto obtenemos cual es el semiplano solución.

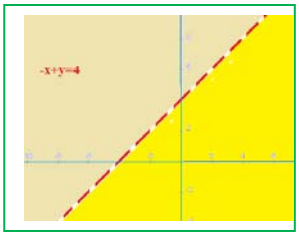
3º) La **inclusión o no** en dicha solución de la frontera, depende de si la desigualdad es estricta o no, respectivamente.

Ejemplo:

- $2x + y \geq 2$.

Se dibuja la recta $2x + y = 2$. El punto (0, 0) no verifica la desigualdad, luego el semiplano solución es el otro.
El semiplano marcado en amarillo es la solución del sistema, incluyendo la recta que se marca de forma continua, pues incluye todos los puntos que verifican la inecuación.

Ejemplo:



- $-x + y < 4$.

Dibujamos la recta $-x + y = 4$. El punto (0, 0) verifica la desigualdad.
El semiplano marcado en amarillo es la solución del sistema, excluyendo la recta que se marca de forma discontinua, pues incluye todos los puntos que verifican la inecuación y los de la recta no lo hacen.

Actividades propuestas

23. Representa los siguientes semiplanos: a) $x + y < 5$ b) $3x + 2y > 0$ c) $2x + y \leq 7$ d) $x - 3y \geq 5$

4.2. Sistemas de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Es un conjunto de inecuaciones de primer grado, todas con las mismas dos incógnitas.

El conjunto solución está formado por las soluciones que verifican a la vez todas las inecuaciones. Al conjunto solución se le llama **región factible**.

Ejemplo:

- $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - y \geq -4 \end{cases}$. La superficie marcada en amarillo es la solución del sistema, incluyendo las semirrectas roja y gris, ya que ambas desigualdades son no estrictas. Es lo que se denomina *región factible*.

Actividades propuestas

24. Representa la región factible de cada uno de los siguientes sistemas de inecuaciones:

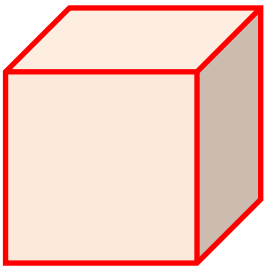
a) $\begin{cases} x - y < 1 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ y \leq 2 \end{cases}$

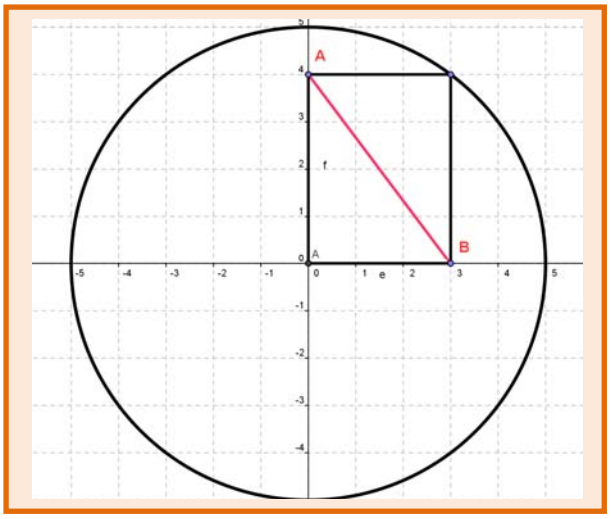
Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

CURIOSIDADES. REVISTA

¡Piensa!

Si un cubo pesa medio kilo más la mitad de su propio peso, ¿cuánto pesa?





Tenemos una circunferencia de radio 5 cm. Apoyamos en ella un rectángulo como el de la figura. A toda velocidad, calcula la diagonal *AB* del rectángulo.

Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Estos chistes son de la Exposición "*Ríete con las mates*" del grupo de innovación educativa *Pensamiento Matemático* de la Universidad Politécnica de Madrid.

Programación lineal

La **programación lineal** se basa en sistemas de inecuaciones y se utiliza en microeconomía, en administración de empresas para minimizar los gastos y maximizar los beneficios, en asignación de recursos, en planificación de campañas de publicidad, para solucionar problemas de transporte…

Razonamiento engañoso

Todo número es mayor que 4, porque para cualquier valor de x, $(x-4)^2 \geq 0 \Rightarrow$

$(x-4)\cdot(x-4) \geq 0 \Rightarrow$

$x\cdot(x-4) - 4\cdot(x-4) \geq 0 \Rightarrow$

$x\cdot(x-4) \geq 4\cdot(x-4) \Rightarrow$

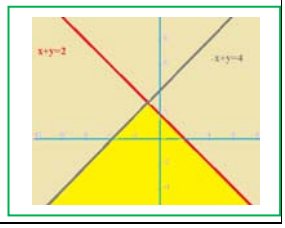
$x \geq 4$.

¿Dónde hemos engañado en este razonamiento?

Observa que hemos dividido la desigualdad por $(x-4)$ que para unos valores de x es positiva y no cambia el sentido de la desigualdad, pero para otros es negativa y sí cambia.

Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

		Ejemplos
Inecuación	Desigualdad algebraica en la que aparecen una o más incógnitas	$4 \geq x + 2$
Inecuaciones equivalentes	Si tienen la misma solución	$4 \geq x + 2 \Leftrightarrow 2 \geq x$
Propiedades de las desigualdades	• Sumar o restar la misma expresión a los dos miembros de la desigualdad: $a < b, \forall c \Rightarrow a + c < b + c$ • Multiplicar o dividir ambos miembros por un número positivo: $a < b, \forall c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ • Multiplicar o dividir ambos miembros por un número negativo y cambiar la orientación del signo de la desigualdad: $a < b, \forall c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$	• $3x + 2 < 5 \Leftrightarrow$ $3x + 2 - 2 < 5 - 2 \Leftrightarrow 3x < 3$ • $3x < 3$ $\Leftrightarrow 3x : 3 < 3 : 3 \Leftrightarrow x < 1$ • $-x < 2 \Leftrightarrow$ $(-x) \cdot (-1) > 2 \cdot (-1) \Leftrightarrow x > -2$ • $3 - x < 2 \Leftrightarrow$ $-x < -1 \Leftrightarrow x > 1$
Inecuación de primer grado con una incógnita	$ax > b,\ ax \geq b,\ ax < b,\ ax \leq b$	$x < 1$
Inecuación de segundo grado con una incógnita	$ax^2 + bx + c > 0$	$x^2 - 1 \geq 0$ $\Re = (-\infty,-1] \cup [-1,1] \cup [1,\infty)$ Solución: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Sistema de inecuaciones de primer grado con una incógnita	$\begin{cases} a_1 x < b_1 \\ a_2 x < b_2 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 4 \\ x - 3 \geq 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x \leq -3 \end{cases}$. No hay solución	
Inecuación en valor absoluto	$\lvert ax + b \rvert \leq c$ por definición $\begin{cases} ax + b \leq c \\ -ax - b \leq c \end{cases}$	$\lvert x - 3 \rvert \leq 2 \Leftrightarrow$ $x - 3 \leq 2$ y $-(x - 3) \leq 2 \Leftrightarrow$ $x \leq 5$ y $x \geq 1 \Leftrightarrow [1, 5]$
Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas	$ax + by > c$ Representamos gráficamente dos semiplanos que separa la recta y decidimos.	$-x + y < 4$
Sistemas de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas	Representamos las regiones angulares separadas por las dos rectas y decidimos cuál o cuáles son solución. $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - y \geq -4 \end{cases}$	

Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. Representa en la recta real y escribe en forma de intervalo:

a) $-\infty \le x \le \frac{3}{2}$

b) $-11 < x < 11$

c) $-2 < x \le \frac{1}{3}$

2. Escribe los siguientes intervalos mediante conjuntos y represéntalos en la recta real:

a) [2, 6)

b) (–7, 1)

c) (0, 9]

3. Dada la siguiente inecuación $5+3x > 2x+1$, determina si los siguientes valores son solución de la misma:

0, 1, –1, 2, –2, 3, –4, 6, –7, 12, –15

4. Realiza las transformaciones indicadas de modo que se obtengan ecuaciones equivalentes:

i. Sumar 4: $x - 2 > 5$

ii. Restar 6: $x - 4 > 8$

iii. Multiplicar por 6: $5x \ge 10$

iv. Multiplicar por –4: $-2x \ge 8$

v. Dividir entre 2: $6x < 12$

vi. Dividir entre –2: $20x \ge 60$

5. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $2x-3 \le -5$

b) $x-2 \le 3x-5$

c) $12-x \le -6$

d) $-5x-3 \le -2x+9$

e) $2(3x-3) > 6$

f) $-3(3-2x) < -2(3+x)$

g) $2(x+3)+3(x-1) \le 2(x+2)$

6. Resuelve:

a) $\frac{x}{2}-6 < 4$

b) $\frac{2x}{3}-3 \le -x$

Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

c) $2(3x-2)>3-x$

d) $\frac{2(x+2)}{3}<2x$

e) $\frac{x-4}{4}+2>\frac{x+4}{8}$

f) $\frac{x}{2}-4<x-\frac{x+1}{7}$

7. Escribe una inecuación cuya solución sea el siguiente intervalo:

a) $(-\infty,-3]$

b) $[4,+\infty)$

c) $(-\infty,5)$

d) $(-2,+\infty)$

8. Calcula los valores de x para que sea posible calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{2x-6}$

b) $\sqrt{-x+5}$

c) $\sqrt{10-5x}$

d) $\sqrt{-6x-30}$

9. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $3x^2-75<0$

b) $-x^2+16\leq 0$

c) $-x^2+25\geq 0$

d) $5x^2-80\geq 0$

e) $4x^2-1>0$

f) $25x^2-4<0$

g) $9x^2-16<0$

h) $36x^2+16\leq 0$

10. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $-4x^2+5x\leq 0$

b) $3x^2+7x\geq 0$

c) $2x^2<8x$

d) $-3x^2-6x\geq 0$

e) $-x^2+3x<0$

f) $-5x^2-10x\geq 0$

Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

11. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado :

a) $3x^2 \leq 0$

b) $8x^2 > 0$

c) $-5x^2 < 0$

d) $9x^2 \geq 0$

12. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 1 \leq 0$

b) $-x^2 - 4x \leq 0$

c) $x^2 + 1 \geq 0$

d) $-3x^2 > 30$

e) $-x^2 - 4 \leq 0$

f) $-3x^2 - 12x \geq 0$

g) $-5x^2 < 0$

h) $x^2 + 9 \geq 0$

13. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 2x > 0$

b) $3x^2 - 3 \leq 0$

c) $5x^2 - 20 \geq 0$

d) $x^2 + 4x > 0$

e) $2x(x - 3) + 1 \geq x - 2$

f) $(x - 2)(x + 3) - x + 5 \leq 2x - 1$

g) $x^2 + 5x + 2 < 2x + 12$

h) $2 - x(x + 3) + 2x \geq 2(x+1)$

14. Calcula los valores de x para que sea posible obtener las siguientes raíces:

a) $\sqrt{2x^2+x-3}$

b) $\sqrt{x^2+2x+1}$

c) $\sqrt{-1+2x-x^2}$

d) $\sqrt{x^2+3x+5}$

e) $\sqrt{-x^2+12x+36}$

f) $\sqrt{x^2+6x-27}$

g) $\sqrt{1-4x^2}$

Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

15. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $2(x-1)^2 > 2$

b) $3(x+1)^2 \leq -12$

c) $-x^2 < 2$

d) $4(x-2)^2 > 1$

e) $-5(x+4)^2 \leq 0$

f) $9(x+1)^2 \leq 81$

16. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x(2x-3) - 3(5-x) > 83$

b) $(2x+5)(2x-5) \leq 11$

c) $(7+x)^2 + (7-x)^2 > 130$

d) $(2x-3)(3x-4) - (x-13)(x-4) \geq 40$

e) $(3x-4)(4x-3) - (2x-7)(3x-2) < 214$

f) $8(2-x)^2 > 2(8-x)^2$

g) $\frac{x^2-6}{2} - \frac{x^2+4}{4} \geq 5$

h) $\frac{5x-3}{x} \leq \frac{7-x}{x+2}$

17. Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita:

a) $\begin{cases} 2x-3>0 \\ 5x+1\leq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-4<4x+1 \\ -2x+3<4x-5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-3>x-2 \\ 3x-7<x-1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{x}{5}<8 \\ \frac{x}{2}-\frac{4x}{9}<5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{x-1}{3}-\frac{x+3}{2}\leq x \\ \frac{4x-2}{4}-\frac{x-1}{3}\geq x \end{cases}$

Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

18. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $|2x+1| \le 5$ b) $|-x+1| \ge 2$ c) $|-x+9| \le 10$ d) $|2x-1| > 4$

e) $|-4x+12| < -6$ f) $\left|\frac{x+1}{2}\right| \le 10$ g) $|-4x+8| < 3$

19. Representa gráficamente la parábola $y = x^2 - 5x + 6$ e indica en qué intervalos es $x^2 - 5x + 6 > 0$, dónde $x^2 - 5x + 6 < 0$, dónde $x^2 - 5x + 6 \ge 0$, y dónde $x^2 - 5x + 6 \le 0$.

20. Representa los siguientes semiplanos:

a) $x < 0$ b) $y \ge 0$ c) $x + y < 0$ d) $x - y \le 1$

e) $2x - y < 3$ f) $-x + y \ge -2$ g) $3x - y > 4$

21. Representa la región factible de cada uno de los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x - y \ge 3 \\ 5x + y \le 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y \ge -3 \\ 5x + y \le 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y \ge 0 \\ 2x + y > 2 \end{cases}$

22. ¿Cuáles son los números cuyo triple es mayor o igual que su doble mas 30?

23. Averigua cual es el menor número entero múltiplo de 3 que verifica la inecuación:

$$x + 2 < -3x + 10.$$

24. Un coche se desplaza por una carretera a una velocidad comprendida entre 70 Km/h y 110 Km/h. ¿Entre qué valores oscila la distancia del coche al punto de partida al cabo de 4 horas?

25. La tarifa de telefonía de la empresa A es 25 euros fijos mensuales más 10 céntimos de euro por minuto de conversación, la de la empresa B es 20 euros fijos más 20 céntimos por minuto de conversación. ¿A partir de cuantos minutos empieza a ser más rentable la tarifa de la empresa A?

26. Una fábrica paga a sus comerciales 20 € por artículo vendido más una cantidad fija de 600 €. Otra fábrica de la competencia paga 40 € por artículo y 400 € fijos. ¿Cuántos artículos debe vender un comercial de la competencia para ganar más dinero que el primero?

27. A un vendedor de aspiradoras le ofrecen 1000 euros de sueldo fijo más 20 euros por aspiradora vendida. A otro le ofrecen 800 euros de fijo más 25 euros por aspiradora vendida. Explica razonadamente qué sueldo es mejor a partir de qué cantidad de aspiradoras vendidas.

28. El área de un cuadrado es menor o igual que 64 cm^2. Determina entre qué valores se halla la medida del lado.

29. El perímetro de un cuadrado es menor que 60 metros. Determina entre qué valores se halla la medida del lado.

30. Un panadero fabrica barras y hogazas. La barra de pan lleva 200 gramos de harina y 5 gramos de sal, mientras que la hogaza lleva 500 gramos de harina y 10 gramos de sal. Si dispone de 200 kg de harina y 2 kg de sal, determina cuántos panes de cada tipo pueden hacerse.

Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

AUTOEVALUACIÓN

1. La desigualdad $2 < x < 7$ se verifica para los valores:

a) 2, 3 y 6 b) 3, 4'7 y 6 c) 3, 5'2 y 7 d) 4, 5 y 8

2. Tiene como solución $x = 2$ la inecuación siguiente:

a) $x < 2$ b) $x > 2$ c) $x \leq 2$ d) $x + 3 < 5$

3. La solución de la inecuación $3{,}4 + 5{,}2x - 8{,}1x < 9{,}4 + 7{,}3x$ es:

a) $x < -10/17$ b) $x > +6/10{,}2$ c) $x > -10/1{,}7$ d) $x < +6/10{,}2$

4. La ecuación $x^2 \leq 4$ tiene de soluciones:

a) $x \in (-2, 2)$ b) $x \in [-2, 2]$ c) $x \in (-\infty,-2) \cup (2, +\infty)$ d) $x \in (-\infty,-2] \cup [2, +\infty)$

5. La suma de las edades de dos personas es mayor de 40 años y su diferencia menor o igual que 8 años. ¿Cuál de los siguientes sistemas de inecuaciones nos permite calcular sus edades?

a) $\begin{cases} x + y > 40 \\ y - x \leq 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y \geq 40 \\ y - x < 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y > 40 \\ x - y < 8 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x + y < 40 \\ x - y \leq 8 \end{cases}$

6. El perímetro de un rectángulo es menor que 14 cm. Si la base es mayor que el doble de la altura menos 3 cm, algún valor que verifica es sistema es:

a) base = 4 cm, altura = 1 cm b) base = 2 cm, altura = 3 cm c) base = 6, altura = 4cm

d) base = 9 cm, altura = 2 cm

7. La solución de la inecuación $|-x + 7| \leq 8$ es:

a) $[-1, 1]$ b) $(-\infty, -1]$ c) $(-1, 1)$ d) $[1, \infty)$

8. Las soluciones posibles de $\sqrt{5x - 9}$ son:

a) $x < 9/5$ b) $x > 9/5$ c) $x \leq 9/5$ d) $x \geq 9/5$

9. La solución de la inecuación $\dfrac{2x - 3}{x - 2} < 1$ es:

a) $(1, 2)$ b) $(-\infty, 1)$ c) $x < 1 \cup x > 2$ d) $(-1, 2)$

10. Una inecuación cuya solución sea el intervalo $(-\infty, 5)$ es:

a) $5x - 3x + 2 < 9x + 2$ b) $8x - 3x + 7 < 9x + 2$ c) $5x - 3x + 2 < 7x + 27$
d) $5x - 3x + 2 > 7x + 27$

Autora: Ana Lorente
Revisora: María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas:

4ºB ESO
Capítulo 6: Porcentajes

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-039138

Fecha y hora de registro: 2014-04-07 18:23:40.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Nieves Zuasti

Revisores: Javier Rodrigo y María Molero

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

1. PROPORCIONALIDAD DIRECTA

1.1. MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

1.2. PROPORCIONALIDAD SIMPLE DIRECTA

1.3. PORCENTAJES

1.4. INCREMENTO PORCENTUAL. DESCUENTO PORCENTUAL. PORCENTAJES ENCADENADOS

1.5. ESCALAS

2. PROPORCIONALIDAD INVERSA

2.1. MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

2.2. PROPORCIONALIDAD SIMPLE INVERSA

2.3. PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

3. REPARTOS PROPORCIONALES

3.1. REPARTO PROPORCIONAL DIRECTO

3.2. REPARTO PROPORCIONAL INVERSO

3.3. MEZCLAS Y ALEACIONES

4. INTERÉS

4.1. CÁLCULO DE INTERÉS SIMPLE

4.2. INTERÉS COMPUESTO

Resumen

En la vida cotidiana es interesante saber manejar la proporcionalidad, por ejemplo para calcular el descuento de unas rebajas, o el interés que se debe pagar por un préstamo. En multitud de ocasiones debemos efectuar repartos proporcionales, directos o inversos: premios de lotería, herencias, mezclas, aleaciones…

El tanto por ciento y el interés es un concepto que aparece constantemente en los medios de comunicación y en nuestra propia economía. En este capítulo haremos una primera aproximación a la denominada "*economía financiera*".

La proporcionalidad es una realidad con la que convivimos a nuestro alrededor. Para comprenderla y utilizarla correctamente, necesitamos conocer sus reglas. Reconoceremos la proporcionalidad directa o inversa, simple y compuesta, y realizaremos ejercicios y problemas de aplicación.

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

INTRODUCCIÓN

A Esther le gusta ir en bicicleta a la escuela y ha comprobado que en hacer ese recorrido tarda andando cuatro veces más. Tenemos aquí tres magnitudes: tiempo, distancia y velocidad.

Recuerda que:

Una **magnitud** es una propiedad física que se puede medir.

A más velocidad se recorre más distancia.

Son **magnitudes directamente proporcionales**.

A más velocidad se tarda menos tiempo.

Son **magnitudes inversamente proporcionales**.

Pero, cuidado, no todas las magnitudes son proporcionales. Esto es una confusión muy frecuente. Porque al crecer una magnitud, la otra también crezca, aún no se puede asegurar que sean directamente proporcionales. Por ejemplo, Esther recuerda que hace unos años tardaba más en recorrer el mismo camino, pero la edad no es directamente proporcional al tiempo que se tarda. Vamos a estudiarlo con detalle para aprender a reconocerlo bien.

1. PROPORCIONALIDAD DIRECTA

1.1. Magnitudes directamente proporcionales

Recuerda que:

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Ejemplo:

- Si tres bolsas contienen 15 caramelos, siete bolsas (iguales a las primeras) contendrán 35 caramelos, porque:

$$3 \cdot \mathbf{5} = 15 \qquad 7 \cdot \mathbf{5} = 35$$

La **razón de proporcionalidad directa *k*** es el cociente de cualquiera de los valores de una variable y los correspondientes de la otra:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = k$$

Ejemplo:

- En el ejemplo anterior la razón de proporcionalidad es 5, porque: $\frac{15}{3} = \frac{35}{7} = 5$

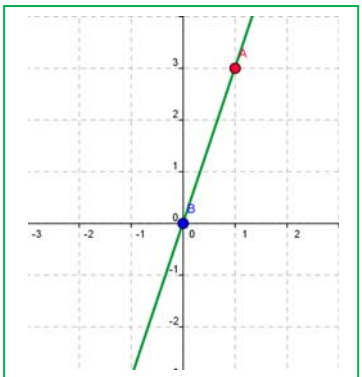
Ejemplo:

- Copia en tu cuaderno la siguiente tabla, calcula la razón de proporcionalidad y completa los huecos que faltan sabiendo que es una tabla de proporcionalidad directa:

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Magnitud A	18	1,5	60	2,7	0,21
Magnitud B	6	0,5	20	0,9	0,07

La razón de proporcionalidad es ***k*** = $\frac{18}{6} = 3$. Por tanto todos los valores de la magnitud B son tres veces menores que los de la magnitud A: $\frac{18}{6} = \frac{1,5}{0,5} = \frac{60}{20} = \frac{2,7}{0,9} = \frac{0,21}{0,07} = 3$.



Recta y = 3x

Observa que:

Si se representan gráficamente los puntos de una proporcionalidad directa, todos ellos están sobre una **recta** que pasa por el origen de coordenadas. La razón de proporcionalidad es la **pendiente** de la recta. La función lineal *y* = *kx* se denomina también **función de proporcionalidad directa**.

Ejemplo:

- Ecuación de la recta del ejemplo anterior

La ecuación de la recta es *y* = 3*x*. Comprobamos que todos los puntos la verifican:

18 = 3·6; 1,5 = 3·0,5; 60 = 3·20; 2,7 = 3·0,9; 0,21 = 3·0,07.

Reducción a la unidad

Si debemos usar la misma ecuación de la recta en distintas ocasiones el problema puede simplificarse con la **reducción a la unidad**. Si *x* = 1 entonces *y* = ***k***.

Ejemplo:

- Para celebrar su cumpleaños José ha comprado 3 botellas de refresco que le han costado 4,5 €. Piensa que no van a ser suficientes y decide comprar 2 más. Calcula el precio de las 2 botellas utilizando la reducción a la unidad.

  $y = \frac{4,5}{3}x \Rightarrow y = \frac{4,5}{3}\cdot 1 \Rightarrow$ k = 1,5 $\Rightarrow$ *y* = 1,5*x*. Ahora podemos calcular el precio de cualquier número de botellas. En nuestro caso *x* = 2, luego *y* = 1,5·2 = 3 €.

Actividades propuestas

1. Copia en tu cuaderno y completa la tabla de proporción directa. Calcula la razón de proporcionalidad. Representa gráficamente los puntos. Determina la ecuación de la recta.

Litros	12	7,82		1		50
Euros	36		9,27		10	

2. Calcula los términos que faltan para completar las proporciones:

a) $\frac{24}{100} = \frac{30}{x}$ b) $\frac{x}{80} = \frac{46}{12}$ c) $\frac{3'6}{12'8} = \frac{x}{60}$

3. Si el AVE tarda una hora y treinta y cinco minutos en llegar desde Madrid a Valencia, que distan 350 kilómetros, ¿cuánto tardará en recorrer 420 km?

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

1.2. Proporcionalidad simple directa

Acabamos de ver que la proporcionalidad simple directa consiste en encontrar la ecuación de una recta que pasa por el origen: $y = kx$.

Ejemplo:

- Veinte cajas pesan 400 kg, ¿cuántos kg pesan 7 cajas?

Buscamos la ecuación de la recta: $y = kx \Rightarrow 400 = k20 \Rightarrow k = 400/20 = 20 \Rightarrow y = 20x$ Ecuación de la recta

Si $x = 7$ entonces $y = 20 \cdot 7 = 140$ kg.

Actividades propuestas

4. En una receta nos dicen que para hacer una mermelada de frutas del bosque necesitamos un kilogramo de azúcar por cada dos kilogramos de fruta. Queremos hacer 7 kilogramos de mermelada, ¿cuántos kilogramos de azúcar y cuántos de fruta debemos poner?

5. La altura de una torre es proporcional a su sombra (a una misma hora). Una torre que mide 12 m tiene una sombra de 25 m. ¿Qué altura tendrá otra torre cuya sombra mida 43 m?

6. Una fuente llena una garrafa de 12 litros en 8 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en llenar un bidón de 135 litros?

7. Hemos gastado 12 litros de gasolina para recorrer 100 km. ¿Cuántos litros necesitaremos para una distancia de 1374 km?

8. Mi coche ha gasta 67 litros de gasolina en recorrer 1250 km, ¿cuántos litros gastará en un viaje de 5823 km?

9. Un libro de 300 páginas pesa 127 g. ¿Cuánto pesará un libro de la misma colección de 420 páginas?

10. Dos pantalones nos costaron 28 €, ¿cuánto pagaremos por 7 pantalones?

1.3. Porcentajes

El porcentaje o tanto por ciento es la razón de proporcionalidad de mayor uso en la vida cotidiana.

El **tanto por ciento** es una razón con denominador 100.

Ejemplo:

- 37 % = $\frac{37}{100}$. La ecuación de la recta es: $y = \frac{37}{100}x$.

Los porcentajes son proporciones directas.

Ejemplo:

- La población de Zarzalejo era en 2013 de 7380 habitantes. En 2014 se ha incrementado en un 5 %. ¿Cuál es su población a final de 2014?

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$y = \frac{7380}{100}x$, por lo que el 5 % de 7392 es $y = \frac{7380}{100} \cdot 5 = 369$ habitantes. La población se ha incrementado en 369 habitantes, luego al final de 2014 la población será de: 7380 + 369 = 7749 habitantes.

Actividades propuestas

11. Expresa en tanto por ciento las siguientes proporciones:

a) $\frac{27}{100}$ b) "1 de cada 2" c) $\frac{52}{90}$

12. Si sabemos que los alumnos rubios de una clase son el 16 % y hay 4 alumnos rubios, ¿cuántos alumnos hay en total?

13. Un depósito de 2000 litros de capacidad contiene en este momento 1036 litros. ¿Qué tanto por ciento representa?

14. La proporción de los alumnos de una clase de 4º de ESO que han aprobado Matemáticas fue del 70 %. Sabiendo que en la clase hay 30 alumnos, ¿cuántos han suspendido?

1.4. Incremento porcentual. Descuento porcentual. Porcentajes encadenados

Incremento porcentual

Ejemplo:

- El ejemplo anterior puede resolverse mediante **incremento porcentual**: 100 + 5 = 105 %

$y = \frac{7380}{100}x$, por lo que el 105 % de 7392 es $y = \frac{7380}{100} \cdot 105 = 7749$ habitantes.

Descuento porcentual

- En las rebajas a todos los artículos a la venta les aplican un 30 % de descuento. Calcula el precio de los que aparecen en la tabla:

Precio sin descuento	75 €	159 €	96 €	53 €
Precio en rebajas	52,50 €	111,3 €	67,2 €	37,1 €

Ya que nos descuentan el 30 %, pagaremos el 70 %. Por tanto: $k = \frac{70}{100} = 0{,}7$ es la razón directa de proporcionalidad que aplicaremos a los precios sin descuento para calcular el precio rebajado. Por tanto: $y = 0{,}7\,x$.

Porcentajes encadenados

Muchas veces hay que calcular varios incrementos porcentuales y descuentos porcentuales. Podemos **encadenarlos**. En estos casos lo más sencillo es calcular, para cada caso, el tanto por uno, e irlos multiplicando.

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- En unas rebajas se aplica un descuento del 30 %, y el IVA del 21 %. ¿Cuánto nos costará un artículo que sin rebajar y sin aplicarle el IVA costaba 159 euros? ¿Cuál es el verdadero descuento?

En un descuento del 30 % debemos pagar un 70 % ((100 – 30) %), por lo que el tanto por uno es de 0,7. Por el incremento del precio por el IVA del 21 % ((100 + 21) %) el tanto por uno es de 1,21. Encadenando el descuento con el incremento tendremos un índice o tanto por uno de 0,7 · 1,21 = 0,847, que aplicamos al precio del artículo, 159 €, 0,847 · 159 = 134,673 € ≈ 134,67 €. Por tanto nos han descontado 24,33 euros.

Si estamos pagando el 84,7 % el verdadero descuento es el 15,3 %.

Ejemplo:

- Calcula el precio inicial de un televisor, que después de subirlo un 20 % y rebajarlo un 20 % nos ha costado 432 €. ¿Cuál ha sido el porcentaje de variación?

Al subir el precio un 20 % estamos pagando el 120 % y el tanto por uno es 1,2. En el descuento del 20 % estamos pagando el 80 % y el tanto por uno es 0,8. En total con las dos variaciones sucesivas el tanto por uno es de 0,8 ·1,2 = 0,96, y el precio inicial es 432 : 0,96 = 450 €. Precio inicial = 450 €.

El tanto por uno 0,96 es menor que 1 por lo tanto ha habido un descuento porque hemos pagado el 96 % del valor inicial y este descuento ha sido del 4 %.

Actividades propuestas

15. Una fábrica ha pasado de tener 130 obreros a tener 90. Expresa la disminución en porcentaje.

16. Calcula el precio final de un lavavajillas que costaba 520 € más un 21 % de IVA, al que se le ha aplicado un descuento sobre el coste total del 18 %.

17. Copia en tu cuaderno y completa:

a) De una factura de 1340 € he pagado 1200 €. Me han aplicado un …… % de descuento
b) Me han descontado el 9 % de una factura de ……. € y he pagado 280 €.
c) Por pagar al contado un mueble me han descontado el 20 % y me he ahorrado 100 €. ¿Cuál era el precio del mueble sin descuento?

18. El precio inicial de un electrodoméstico era 500 euros. Primero subió un 10 % y después bajó un 30 %. ¿Cuál es su precio actual? ¿Cuál es el porcentaje de incremento o descuento?

19. Una persona ha comprado acciones de bolsa en el mes de enero por un valor de 10 000 €. De enero a febrero estas acciones han aumentado un 8 %, pero en el mes de febrero han disminuido un 16 % ¿Cuál es su valor a finales de febrero? ¿En qué porcentaje han aumentado o disminuido?

20. El precio inicial de una enciclopedia era de 300 € y a lo largo del tiempo ha sufrido variaciones. Subió un 10 %, luego un 25 % y después bajó un 30 %. ¿Cuál es su precio actual? Calcula la variación porcentual.

21. En una tienda de venta por Internet se anuncian rebajas del 25 %, pero luego cargan en la factura un

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

20 % de gastos de envío. ¿Cuál es el porcentaje de incremento o descuento? ¿Cuánto tendremos que pagar por un artículo que costaba 30 euros? ¿Cuánto costaba un artículo por el que hemos pagado 36 euros?

1.7. Escalas

En planos y mapas encontramos anotadas en su parte inferior la escala a la que están dibujados.

Principales calzadas romanas

La **escala** es la proporción entre las medidas del dibujo y las medidas en la realidad.

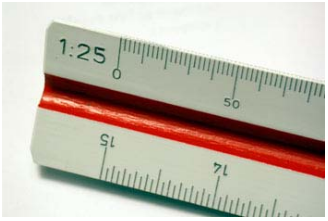
Ejemplo:

- Se expresa de la forma 1 : 2000 que significa que 1 cm del plano corresponde a 2000 cm = 20 m en la realidad.

Por tanto si "*y*" son las medidas en la realidad, y "*x*" lo son en el plano, esta escala se puede escribir con la ecuación de la recta:

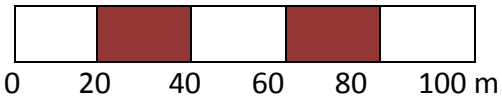
$$y = 2000x.$$

Las escalas también se representan en forma gráfica, mediante una barra dividida en segmentos de 1 cm de longitud



Escalímetro

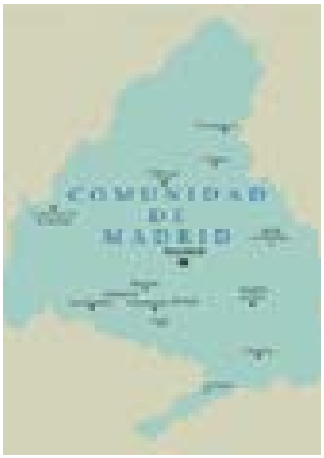
Ejemplo:



Esta escala identifica cada centímetro del mapa con 20 m en la realidad es decir 1 : 2000, $y = 2000x$.

Al estudiar la semejanza volveremos a insistir en las escalas.

Un instrumento sencillo para realizar trabajos a escala es el ***pantógrafo*** que facilita copiar una imagen o reproducirla a escala.



El pantógrafo es un paralelogramo articulado que, al variar la distancia entre los puntos de articulación, permite obtener diferentes tamaños de dibujo sobre un modelo dado.

Actividades propuestas

22. La distancia real entre dos pueblos es 28,6 km. Si en el mapa están a 7 cm de distancia. ¿A qué escala está dibujado?

23. ¿Qué altura tiene un edificio si su maqueta construida a escala 1 : 200 presenta una altura de 8 cm?

24. Dibuja la escala gráfica correspondiente a la escala 1 : 60000.

25. Las dimensiones de una superficie rectangular en el plano son 7 cm y 23 cm. Si está dibujado a escala 1 : 50, calcula sus medidas reales.

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. PROPORCIONALIDAD INVERSA

2.1. Magnitudes inversamente proporcionales

Recuerda que:

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir la primera por un número, la segunda queda dividida o multiplicada por el mismo número.

Ejemplo:

- Cuando un automóvil va a 90 km/h, tarda cuatro horas en llegar a su destino. Si fuera a 120 km/h tardaría 3 horas en hacer el mismo recorrido.

$$90 \cdot 4 = 120 \cdot 3$$

La velocidad y el tiempo son magnitudes inversamente proporcionales.

La **razón de proporcionalidad inversa** *k´* es el producto de cada par de magnitudes: ***k' = a · b = a´· b´***

Ejemplo:

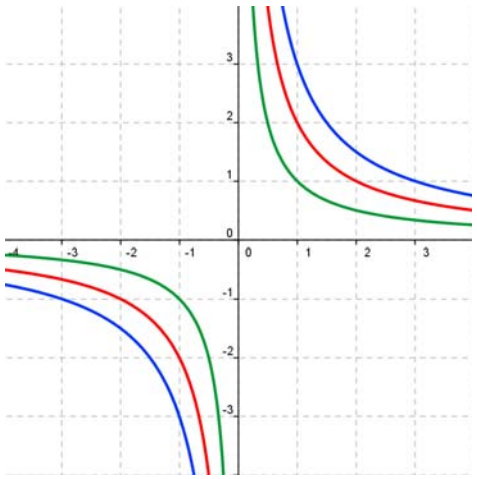
- Copia la tabla en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad inversa y completa la tabla de proporcionalidad inversa:

a	18	150	1,5	3600	100
b	50	6	600	0,25	9

k´ = 18 · 50 = 900. Comprueba que todas las columnas dan este resultado.

Observa que:

Si se representan gráficamente los puntos de una proporcionalidad inversa, todos ellos están sobre la gráfica de una **hipérbola** de ecuación $y = \frac{k'}{x}$. La razón de proporcionalidad inversa es la **constante k'**. A esta hipérbola $y = \frac{k'}{x}$ también se la denomina **función de proporcionalidad inversa**.



Hipérbolas: y = 3/x; y = 2/x; y = 1/x

Ejemplo:

- Ecuación de la hipérbola del ejemplo anterior

La hipérbola es $y = \frac{900}{x}$. Comprobamos que todos los puntos verifican la ecuación de dicha hipérbola:

$$y = \frac{900}{18} = 50; \quad y = \frac{900}{150} = 6; \quad y = \frac{900}{1{,}5} = 600; \quad y = \frac{900}{3600} = 0{,}25; \quad y = \frac{900}{100} = 9.$$

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

26. Para embaldosar un recinto, 7 obreros han dedicado 80 horas de trabajo. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla y determina la constante de proporcionalidad. Escribe la ecuación de la hipérbola.

Número de obreros	1	5	7	12			60
Horas de trabajo			80		28	10	

2.2. Proporcionalidad simple inversa

Para calcular el cuarto término entre dos magnitudes inversamente proporcionales calculamos la constante de proporcionalidad y escribimos la ecuación de la hipérbola

Ejemplo:

- Cuatro personas realizan un trabajo en 18 días, ¿cuántas personas necesitaremos para realizar el mismo trabajo en 8 días?

$$k' = 4 \cdot 18 = 8 \cdot y \Rightarrow y = \frac{18}{8} \cdot 4 = 9 \text{ personas.}$$

Actividades propuestas

27. Al cortar una cantidad de madera hemos conseguido 5 paneles de 1,25 m de largo. ¿Cuántos paneles conseguiremos si ahora tienen 3 m de largo?

28. En un huerto ecológico se utilizan 5000 kg de un tipo de abono de origen animal que se sabe que tiene un 12 % de nitratos. Se cambia el tipo de abono, que ahora tiene un 15 % de nitratos, ¿cuántos kilogramos se necesitarán del nuevo abono para que las plantas reciban la misma cantidad de nitratos?

29. Ese mismo huerto necesita 200 cajas para envasar sus berenjenas en cajas de un kilogramo. ¿Cuántas cajas necesitaría para envasarlas en cajas de 1,7 kilogramo? ¿Y para envasarlas en cajas de 2,3 kilogramos?

30. Para envasar cierta cantidad de leche se necesitan 8 recipientes de 100 litros de capacidad cada uno. Queremos envasar la misma cantidad de leche empleando 20 recipientes. ¿Cuál deberá ser la capacidad de esos recipientes?

31. Copia en tu cuaderno la tabla siguiente, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad inversa. Escribe la ecuación de la hipérbola.

Magnitud A	40	0,07		8	
Magnitud B	0,25		5		6,4

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.3. Proporcionalidad compuesta

Una proporción en la que intervienen más de dos magnitudes ligadas entre sí por relaciones de proporcionalidad directa o inversa se denomina **proporción compuesta**.

Para resolverlo, lo reduciremos a un problema simple de proporcionalidad directa o inversa.

Ejemplo:

- En el instituto 30 alumnos de 4º A de ESO han ido a esquiar y han pagado 2700 € por 4 noches de hotel; 25 alumnos de 4º B de ESO han ganado en la lotería 3375 € y deciden ir al mismo hotel. ¿Cuántas noches de alojamiento pueden pagar?

Tenemos tres magnitudes: el número de alumnos, la cantidad en € que pagan por el hotel y el número de noches de hotel. Observa que a más alumnos se paga más dinero, luego estas magnitudes son directamente proporcionales. A más noches de hotel se paga más dinero, luego estas otras dos magnitudes son también directamente proporcionales. Pero para una cantidad de dinero fija, a más alumnos pueden ir menos noches, luego el número de alumnos es inversamente proporcional al número de noches de hotel.

El mejor método es reducirlo a un problema de proporcionalidad simple, para ello obtenemos el precio del viaje por alumno.

Cada alumno de 4º A ha pagado 2700 : 30 = 90 € por 4 noches de hotel. Luego ha pagado por una noche 90/4 = 22,5 €. La ecuación de proporcionalidad directa es: $y = 22{,}5x$, donde "y" es lo que paga cada alumno y "x" el número de noches.

Cada alumno de 4º B cuenta con 3375 : 25 = 135 € para pasar x noches de hotel, por lo que 135 = 22,5x, luego pueden estar 6 noches.

Actividades propuestas

32. Seis personas realizan un viaje de 12 días y pagan en total 40800 €. ¿Cuánto pagarán 15 personas si su viaje dura 4 días?

33. Si 16 bombillas originan un gasto de 4500 €, estando encendidas durante 30 días, 5 horas diarias, ¿qué gasto originarían 38 bombillas en 45 días, encendidas durante 8 horas diarias?

34. Para alimentar 6 vacas durante 17 días se necesitan 240 kilos de alimento. ¿Cuántos kilos de alimento se necesitan para mantener 29 vacas durante 53 días?

35. Si 12 hombres construyen 40 m de tapia en 4 días trabajando 8 horas diarias, ¿cuántas horas diarias deben trabajar 20 hombres para construir 180 m en 15 días?

36. Con una cantidad de pienso podemos dar de comer a 24 animales durante 50 días con una ración de 1 kg para cada uno. ¿Cuántos días podremos alimentar a 100 animales si la ración es de 800 g?

37. Para llenar un depósito se abren 5 grifos que lanzan 8 litros por minuto y tardan 10 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán 7 grifos similares que lanzan 10 litros por minuto?

38. Si 4 máquinas fabrican 2400 piezas funcionando 8 horas diarias. ¿Cuántas máquinas se deben poner a funcionar para conseguir 7000 piezas durante 10 horas diarias?

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. REPARTOS PROPORCIONALES

Cuando se realiza un reparto en partes desiguales se debe establecer previamente si se trata de un reparto proporcional directo o inverso.

3.1. Reparto proporcional directo

En un reparto proporcional directo le corresponderá más a quien tiene más partes.

Actividad resuelta

- Tres amigos deben repartirse los 400 € que han ganado en una competición de acuerdo a los puntos que cada uno ha obtenido. El primero obtuvo 10 puntos, el segundo 7 y el tercero 3 puntos.

  El reparto directamente proporcional se inicia sumando los puntos: 10 + 7 + 3 = 20 puntos.

  Calculamos el premio por punto: 400 : 20 = 20 €.

  El primero obtendrá 20 · 10 = 200 €.

  El segundo: 20 · 7 = 140 €.

  El tercero: 20 · 3 = 60 €.

  La suma de las tres cantidades es 200 + 140 + 60 = 400 €, la cantidad total a repartir.

Como se trata de una proporción, se debe establecer la siguiente regla:

Sea N (en el ejemplo anterior 400) la cantidad a repartir entre cuatro personas, a las que les corresponderá A, B, C, D de manera que N = A + B + C + D. Estas cantidades son proporcionales a su participación en el reparto: *a, b, c, d*.

$a + b + c + d = n$ es el número total de partes en las que ha de distribuirse N.

N : $n = k$ que es la cantidad que corresponde a cada parte. En el ejemplo anterior: $k = 400 : 20 = 20$.

El reparto finaliza multiplicando k por a, b, c y d, obteniéndose así las cantidades correspondientes A, B, C y D.

Es decir, ahora la ecuación de la recta es: $y = \frac{A+B+C+D}{a+b+c+d}x = \frac{N}{n}x$

Actividades propuestas

39. Cinco personas comparten lotería, con 10, 6, 12, 7 y 5 participaciones respectivamente. Si han obtenido un premio de 18000 € ¿Cuánto corresponde a cada uno?

40. Tres socios han invertido 20000 €, 34000 € y 51000 € este año en su empresa. Si los beneficios a repartir a final de año ascienden a 31500€, ¿cuánto corresponde a cada uno?

41. La Unión Europea ha concedido una subvención de 48.000.000 € para tres estados de 1.500, 900 y 600 millones de habitantes, ¿cómo debe repartirse el dinero, sabiendo que es directamente proporcional al número de habitantes?

42. Se reparte una cantidad de dinero, entre tres personas, directamente proporcional a 2, 5 y 8. Sabiendo que a la segunda le corresponde 675 €. Hallar lo que le corresponde a la primera y tercera.

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

43. Una abuela reparte 100 € entre sus tres nietos de 12, 14 y 16 años de edad; proporcionalmente a sus edades. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

3.2. Reparto proporcional inverso

En un reparto proporcional inverso recibe más quien menos partes tiene.

Sea N la cantidad a repartir y *a*, *b* y *c* las partes. Al ser una proporción inversa, el reparto se realiza a sus inversos 1/*a*, 1/*b*, 1/*c*.

Para calcular las partes totales, reducimos las fracciones a común denominador, para tener un patrón común, y tomamos los numeradores que son las partes que corresponden a cada uno.

Actividad resuelta

- Repartir 4000 € de forma inversamente proporcional a 12 y 20.

Calculamos el total de las partes: 1/12 + 1/20 = **5**/60 + **3**/60 = **8**/60.

4000 : 8 = 500 € cada parte.

500 · 5 = 2500 €.

500 · 3 = 1500 €.

En efecto, 2500 + 1500 = 4000.

Actividades propuestas

44. En un concurso se acumula puntuación de forma inversamente proporcional al número de errores. Los cuatro finalistas, con 10, 5, 2 y 1 error, deben repartirse los 2500 puntos. ¿Cuántos puntos recibirá cada uno?

45. En el testamento, el abuelo establece que quiere repartir entre sus nietos 4500 €, de manera proporcional a sus edades, 12, 15 y 18 años, cuidando que la mayor cantidad sea para los nietos menores, ¿cuánto recibirá cada uno?

46. Se reparte dinero inversamente proporcional a 5, 10 y 15; al menor le corresponden 3000 €. ¿Cuánto corresponde a los otros dos?

47. Tres hermanos ayudan al mantenimiento familiar entregando anualmente 6000 €. Si sus edades son de 18, 20 y 25 años y las aportaciones son inversamente proporcionales a la edad, ¿cuánto aporta cada uno?

48. Un padre va con sus dos hijos a una feria y en la tómbola gana 50 € que los reparte de forma inversamente proporcional a sus edades, que son 15 y 10 años. ¿Cuántos euros debe dar a cada uno?

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.3. Mezcla y aleaciones

Las **mezclas** que vamos a estudiar son el resultado final de combinar distintas cantidades de productos, de distintos precios.

Actividad resuelta

- Calcula el precio final del litro de aceite si mezclamos 13 litros a 3,5 € el litro, 6 litros a 3,02 €/l y 1 litro a 3,9 €/l.
  Calculamos el coste total de los distintos aceites:
  $$13 \cdot 3{,}5 + 6 \cdot 3{,}02 + 1 \cdot 3{,}9 = 67{,}52 \text{ €}.$$
  Y el número total de litros: 13 + 6 + 1 = 20 l.
  El precio del litro de mezcla valdrá 67,52 : 20 = 3,376 €/l.

Actividades propuestas

49. Calcula el precio del kilo de mezcla de dos tipos de café: 3,5 kg a 4,8 €/kg y 5,20 kg a 6 €/kg.

50. ¿Cuántos litros de zumo de pomelo de 2,40 €/l deben mezclarse con 4 litros de zumo de naranja a 1,80 €/l para obtener una mezcla a 2,13 €/l?

Granos de café

Una **aleación** es una mezcla de metales para conseguir un determinado producto final con mejores propiedades o aspecto.

Las aleaciones se realizan en joyería mezclando metales preciosos, oro, plata, platino, con cobre o rodio. Según la proporción de metal precioso, se dice que una joya tiene más o menos **ley.**

La **ley** de una aleación es la relación entre el peso del metal más valioso y el peso total.

Ejemplo:

- Una joya de plata de 50 g de peso contiene 36 g de plata pura. ¿Cuál es su ley?

$$\textbf{Ley} = \frac{peso\ metal\ puro}{peso\ total} = \frac{36}{50} = 0{,}72$$

Otra forma de medir el grado de pureza de una joya es el **quilate**.

Un quilate de un metal precioso es 1/24 de la masa total de la aleación.

Para que una joya sea de oro puro ha de tener 24 quilates.

Ejemplo:

Una joya de oro de 18 quilates pesa 62 g. ¿Qué cantidad de su peso es de oro puro?

$$\text{Peso en oro} = \frac{62 \cdot 18}{24} = 46{,}5 \text{ g.}$$

El término ***quilate*** viene de la palabra griega *"keration" (algarroba).* Esta planta, de semillas muy uniformes, se utilizaba para pesar joyas y gemas en la antigüedad.

Actividades propuestas

51. Calcula la ley de una joya sabiendo que pesa 87 g y contiene 69 g de oro puro.

¿Cuántos quilates tiene, aproximadamente, la joya anterior?

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4. INTERÉS

4.1. Cálculo de interés simple

El **interés** es el beneficio que se obtiene al depositar un capital en una entidad financiera a un determinado tanto por ciento durante un tiempo.

En el **interés simple**, al capital *C* depositado se le aplica un tanto por ciento o rédito *r* anualmente.

El cálculo del interés obtenido al cabo de varios años se realiza mediante la fórmula:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Si el tiempo que se deposita el capital son meses o días, el interés se calcula dividiendo la expresión anterior entre 12 meses o 360 días (año comercial).

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200} \quad \text{tiempo en meses} \qquad I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36000} \quad \text{tiempo en días}$$

Actividades resueltas

- Depositamos 4000 € al 2 % anual. ¿Cuánto dinero tendremos al cabo de 30 meses?

Calculamos el interés simple:

$$I = \frac{4000 \cdot 2 \cdot 30}{1200} = 200 \text{ €}$$

Sumamos capital e intereses:

$$4000 + 200 = 4200 \text{ €}$$

Actividades propuestas

52. Calcula el interés simple que producen 10.000 € al 3 % durante 750 días.

53. ¿Qué capital hay que depositar al 1,80 % durante 6 años para obtener un interés simple de 777,6 €?

4.2. Interés compuesto

Desde otro punto de vista, el interés es el porcentaje que se aplica a un préstamo a lo largo de un tiempo, incrementando su cuantía a la hora de devolverlo.

Este tipo de interés no se calcula como el interés simple sino que se establece lo que se llama "*capitalización*".

El **interés compuesto** se aplica tanto para calcular el capital final de una inversión, como la cantidad a devolver para amortizar un préstamo.

Normalmente los préstamos se devuelven mediante cuotas mensuales que se han calculado a partir de los intereses generados por el préstamo al tipo de interés convenido.

La capitalización compuesta plantea que, a medida que se van generando intereses, pasen a formar parte del capital inicial, y ese nuevo capital producirá intereses en los períodos sucesivos.

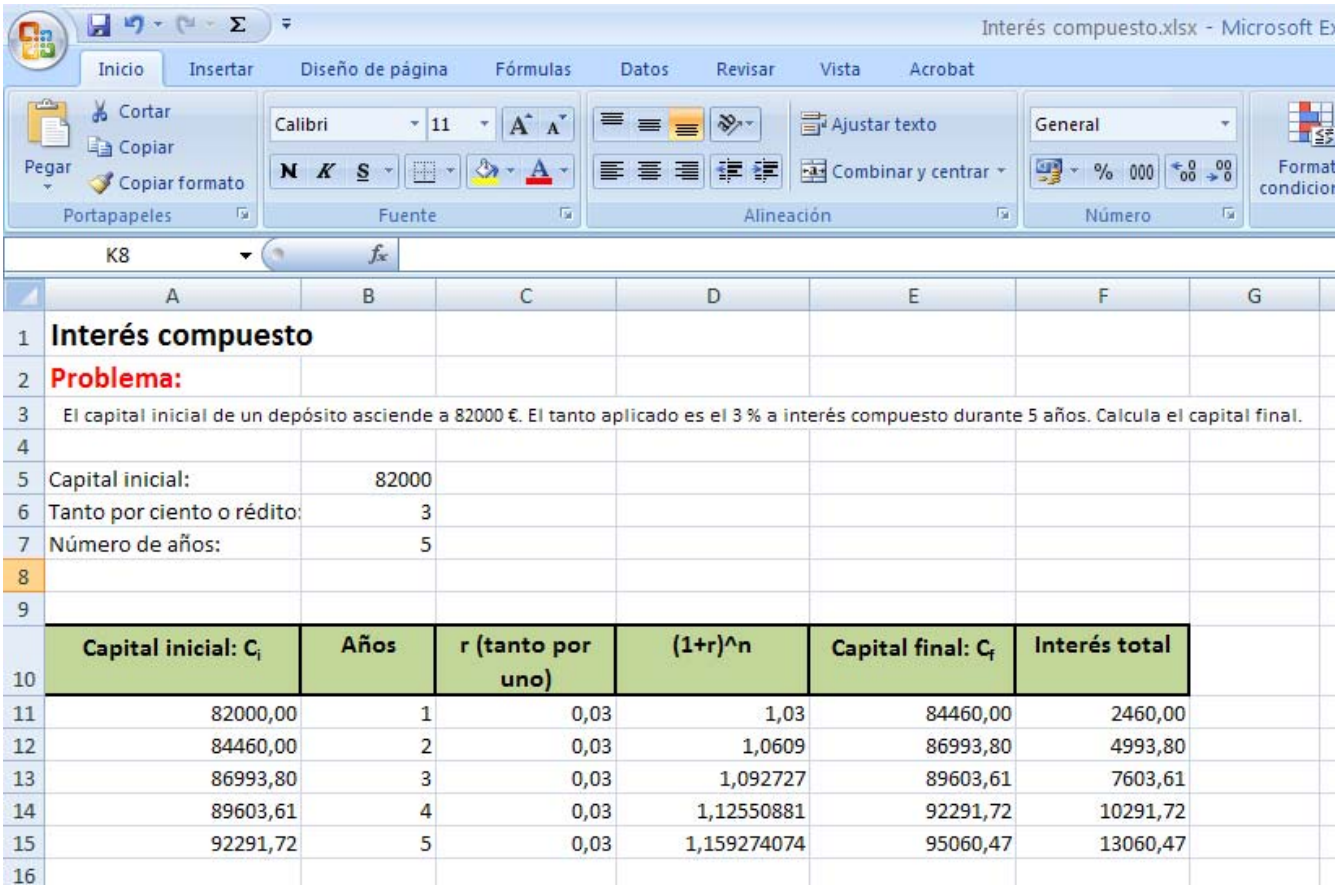
Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Si se trata de un depósito bancario, el capital final se calculará siguiendo el siguiente procedimiento:

C_i (capital inicial)	1 año	*i* (tanto por uno)	$C_f = C_i \cdot (1 + i)$
$C_i \cdot (1 + i)$	2 años	$C_i \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)$	$C_f = C_i \cdot (1 + i)^2$
$C_i \cdot (1 + i)^2$	3 años	$C_i \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i)$	$C_f = C_i \cdot (1 + i)^3$
.....	.....	.....	.....
	n años		$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n$

Al cabo de *n* años, el capital final será $\mathbf{C_f = C_i \cdot (1 + i)^n}$.

Para hacer los cálculos puedes utilizar una "Hoja de cálculo". Basta que en la hoja de cálculo adjunta modifiques los datos de las casillas B5 donde está el "Capital inicial", casilla B6 donde está el "Tanto por uno" y de la casilla B7 donde aparece el número de "Años", y arrastres en la columna B hasta que el número final de años coincida con dicha casilla.



	A	B	C	D	E	F	G
1	**Interés compuesto**						
2	**Problema:**						
3	El capital inicial de un depósito asciende a 82000 €. El tanto aplicado es el 3 % a interés compuesto durante 5 años. Calcula el capital final.						
4							
5	Capital inicial:	82000					
6	Tanto por ciento o rédito:	3					
7	Número de años:	5					
8							
9							
10	**Capital inicial: C_i**	**Años**	**r (tanto por uno)**	**(1+r)^n**	**Capital final: C_f**	**Interés total**	
11	82000,00	1	0,03	1,03	84460,00	2460,00	
12	84460,00	2	0,03	1,0609	86993,80	4993,80	
13	86993,80	3	0,03	1,092727	89603,61	7603,61	
14	89603,61	4	0,03	1,12550881	92291,72	10291,72	
15	92291,72	5	0,03	1,159274074	95060,47	13060,47	
16							

Actividades resueltas

- El capital inicial de un depósito asciende a 82000 €. El tanto por ciento aplicado es el 3 % a interés compuesto durante 5 años. Calcula el capital final.

$$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n = 82000 \cdot (1 + 0{,}03)^5 = 82000 \cdot 1{,}159... = 95060 \text{ €}$$

Actividades propuestas

54. Al 5 % de interés compuesto durante 12 años, ¿cuál será el capital final que obtendremos al depositar 39500 €?

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

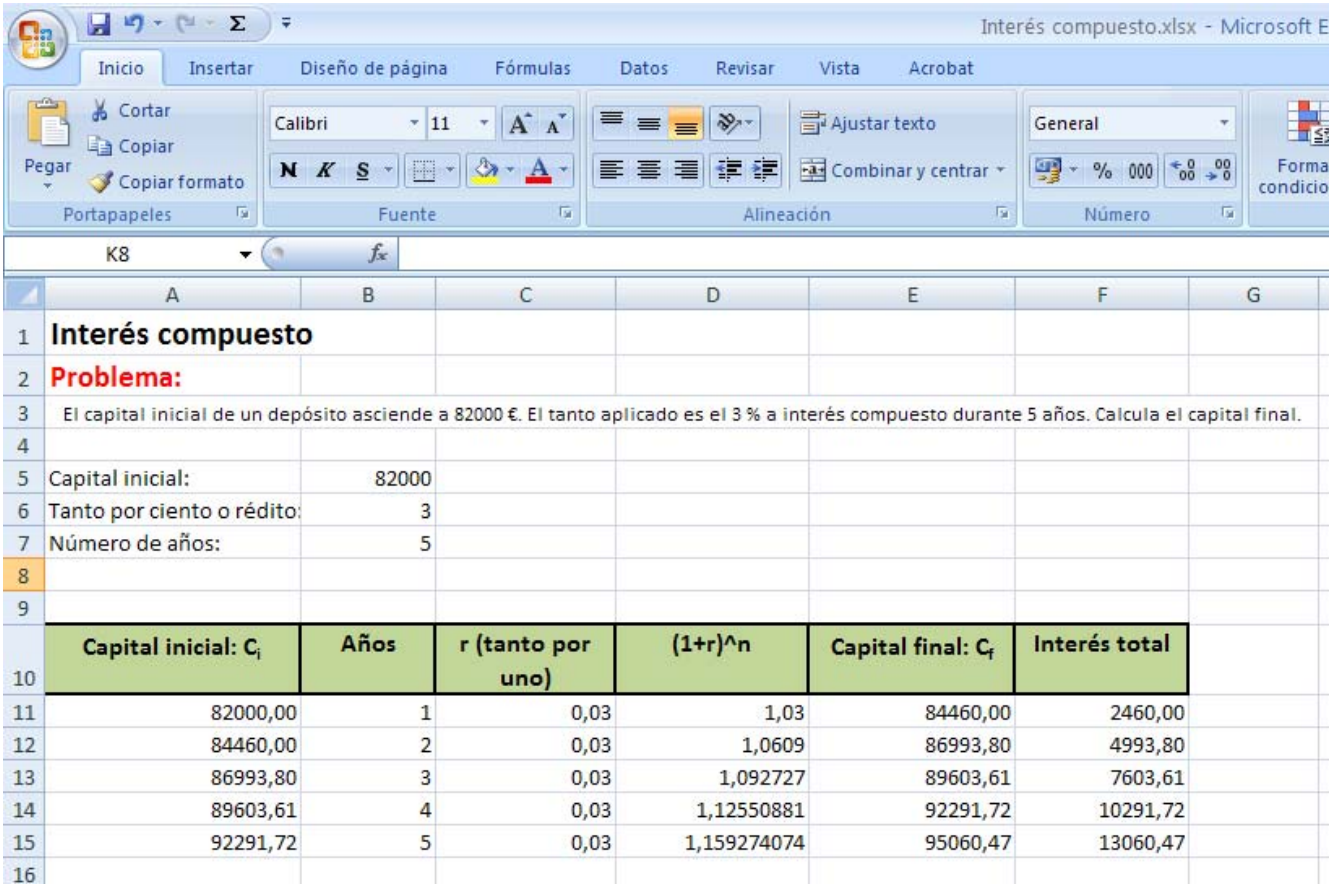
Confecciona tu propia hoja de cálculo

Vamos a resolver el problema "El capital inicial de un depósito asciende a 82000 €. El tanto aplicado es el 3 % a interés compuesto durante 5 años. Calcula el capital final" confeccionando una hoja de cálculo.

Abre Excel o cualquier otra hoja de cálculo. Verás que las hojas están formadas por cuadrículas, con letras en la horizontal y números en la vertical. Así cada cuadrícula de la hoja se puede designar por una letra y un número: A1, B7, …

Vamos a dejar las primeras 9 filas para poner títulos, anotaciones…

En la fila 10 vamos a escribir los títulos de las casillas. En la casilla A10 escribe: Capital inicial. En la B10: Años. En la C10: Tanto por uno. En la D10: $(1 + r)^n$. En la E10: capital final. En la F10: Interés total.



	A	B	C	D	E	F	G
1	**Interés compuesto**						
2	**Problema:**						
3	El capital inicial de un depósito asciende a 82000 €. El tanto aplicado es el 3 % a interés compuesto durante 5 años. Calcula el capital final.						
4							
5	Capital inicial:	82000					
6	Tanto por ciento o rédito:	3					
7	Número de años:	5					
8							
9							
10	**Capital inicial: C_i**	**Años**	**r (tanto por uno)**	**(1+r)^n**	**Capital final: C_f**	**Interés total**	
11	82000,00	1	0,03	1,03	84460,00	2460,00	
12	84460,00	2	0,03	1,0609	86993,80	4993,80	
13	86993,80	3	0,03	1,092727	89603,61	7603,61	
14	89603,61	4	0,03	1,12550881	92291,72	10291,72	
15	92291,72	5	0,03	1,159274074	95060,47	13060,47	
16							

En la fila 11 comenzamos los cálculos. En A11 anotamos 82000, que es el capital inicial.

En B11, escribimos 1, pues estamos en el año primero; en B12, escribimos 2, y seleccionando las casillas B11 y B12 arrastramos hasta B15, pues nos piden 5 años.

Como se ha puesto el capital al 3 %, el tanto por uno es 0,03, cantidad que copiamos en C11 y arrastramos hasta C15.

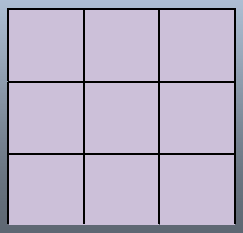
Para calcular $(1 + r)^n$, podemos hacerlo usando la función POTENCIA. Para ello escribimos un signo = en la casilla D11 y buscamos la función POTENCIA, en número escribiremos 1+C11 y en exponente B11. Te habrá quedado: =POTENCIA(1+C11;B11). Ahora, lo señalas y lo arrastras hasta D15.

Para calcular $C \cdot (1 + r)^n$, en la columna E, sólo tenemos que multiplicar A11*D11. Queremos dejar invariante el capital inicial, para decírselo a Excel, que no nos lo cambie, escribimos: =A11*D11 y arrastramos hasta la fila E15.

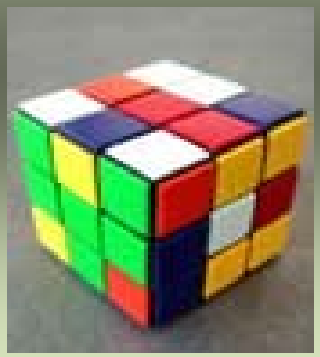
Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Proporcionalidad en áreas y volúmenes

Al aumentar el lado de un cuadrado al doble, su superficie queda multiplicada por 4. Al multiplicar por 3 el lado, el área se multiplica por 9.



Al aumentar el lado de un cubo al doble, su volumen queda multiplicado por 8. Al multiplicar por 3 el lado, el volumen se multiplica por 27.



En general, si hacemos un cambio de escala de factor de proporcionalidad k, el área tiene un factor de proporcionalidad k^2, y el volumen k^3.

Utiliza esta observación para resolver los siguientes problemas:

La torre Eiffel de París mide 300 metros de altura y pesa unos 8 millones de kilos. Está construida de hierro. Si encargamos un modelo a escala de dicha torre, también de hierro, que pese sólo un kilo, ¿qué altura tendrá? ¿Será mayor o menor que un lápiz?

Antes de empezar a calcular, da tu opinión.

Ayuda: k^3 = 8 000 000/1 luego k = 200. Si la Torre Eiffel mide 300 metros de altura, nuestra torre medirá 300/200 = 1,5 m. ¡Metro y medio! ¡Mucho más que un lápiz!

1. En una pizzería la pizza de 20 cm de diámetro vale 3 euros y la de 40 cm vale 6 euros. ¿Cuál tiene mejor precio?
2. Vemos en el mercado una merluza de 40 cm que pesa un kilo. Nos parece un poco pequeña y pedimos otra un poco mayor, que resulta pesar 2 kilos. ¿Cuánto medirá?
3. En un día frio un padre y un hijo pequeño van exactamente igual abrigados, ¿Cuál de los dos tendrá más frio?

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

		Ejemplos
Proporcionalidad directa	Dos magnitudes son **directamente** proporcionales cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número. La función de proporcionalidad directa es una recta que pasa por el origen: $y = kx$. La pendiente de la recta, ***k***, es la **razón de proporcionalidad directa**.	Para empapelar 300 m^2 hemos utilizado 24 rollos de papel, si ahora la superficie es de 104 m^2, necesitaremos 8,32 rollos, pues $k = 300/24 = 12{,}5$, $y = 12{,}5x$, por lo que $x = 104/12{,}5 = 8{,}32$ rollos.
Proporcionalidad inversa	Dos magnitudes son **inversamente** proporcionales cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda dividida o multiplicada por el mismo número. La función de proporcionalidad inversa es la hipérbola $y = k'/x$. Por tanto la **razón de proporcionalidad inversa** k' es el producto de cada par de magnitudes: $k' = a \cdot b = a' \cdot b'$.	Dos personas pintan una vivienda en 4 días. Para pintar la misma vivienda, 4 personas tardarán: $k' = 8$, $y = 8/x$, por lo que tardarán 2 días.
Porcentajes	Razón con denominador 100.	El 87 % de 2400 es ——— = 2088
Escalas	La escala es la proporción entre las medidas del dibujo y las medidas en la realidad.	A escala 1:50000, 35 cm son 17,5 km en la realidad.

Reparto proporcional directo	**Reparto proporcional inverso**
Repartir directamente a 6,10 y 14, 105000 € 6 + 10 + 14 = 30 105000 : 30 = 3500 6 · 3500 = 21000 € 10 ·3500 = 35000 € 14 · 3500 = 49000 €	Repartir 5670 inversamente a 3,5 y 6 $1/3 + 1/5 + 1/6 = \frac{10+6+5}{30} = \frac{21}{30}$ 5670 : 21 = 270 270 · 10 = **2700** 270 · 6 = **1620** 270 · 5 = **1350**

Mezclas y aleaciones	Mezclar distintas cantidades de productos, de distintos precios. La **ley** de una **aleación** es la relación entre el peso del metal más valioso y el peso total.	Una joya que pesa 245 g y contiene 195 g de plata, su ley es: $\frac{195}{245} = 0{,}795$
Interés simple y compuesto	El interés es el beneficio que se obtiene al depositar un capital en una entidad financiera a un determinado tanto por ciento durante un tiempo	C = 3600; r = 4,3 %; t = 8 años $I = \frac{3600 \cdot 4{,}3 \cdot 8}{100} = 1238{,}4$ €

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. Copia en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad directa:

litros	8,35		0,75	1,5	
euros		14	2,25		8

2. Estima cuántas personas caben de pié en un metro cuadrado. Ha habido una fiesta y se ha llenado completamente un local de 400 m^2, ¿cuántas personas estimas que han ido a esa fiesta?

3. Cada semana pagamos 48 € en transporte. ¿Cuánto gastaremos durante el mes de febrero?

4. Con 85 € hemos pagado 15 m de tela, ¿cuánto nos costarán 23 m de la misma tela?

5. Para tapizar cinco sillas he utilizado 0,6 m de tela, ¿cuántas sillas podré tapizar con la pieza completa de 10 m?

6. Un camión ha transportado en 2 viajes 300 sacos de patatas de 25 kg cada uno. ¿Cuántos viajes serán necesarios para transportar 950 sacos de 30 kg cada uno?

7. Una edición de 400 libros de 300 páginas cada uno alcanza un peso total de 100 kg. ¿Cuántos kg pesará otra edición de 700 libros de 140 páginas cada uno?

8. Sabiendo que la razón de proporcionalidad directa es k = 1,8, copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

Magnitud A	15,9			0,01	
Magnitud B		6	0,1		10

9. El modelo de teléfono móvil que costaba 285 € + IVA está ahora con un 15 % de descuento. ¿Cuál es su precio rebajado? (IVA 21 %)

10. Por retrasarse en el pago de una deuda de 1500 €, una persona debe pagar un recargo del 12 %. ¿Cuánto tiene que devolver en total?

11. Si un litro de leche de 0,85 € aumenta su precio en un 12 %, ¿cuánto vale ahora?

12. ¿Qué tanto por ciento de descuento se ha aplicado en una factura de 1900 € si finalmente se pagaron 1200 €?

13. Si unas zapatillas de 60 € se rebajan un 15 %, ¿cuál es el valor final?

14. Al comprar un televisor he obtenido un 22 % de descuento, por lo que al final he pagado 483,60 €, ¿cuál era el precio del televisor sin descuento?

15. Luis compró una camiseta que estaba rebajada un 20 % y pago por ella 20 €. ¿Cuál era su precio original?

16. Por liquidar una deuda de 35000 € antes de lo previsto, una persona paga finalmente 30800 €, ¿qué porcentaje de su deuda se ha ahorrado?

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

17. El precio de un viaje se anuncia a 500 € IVA incluido. ¿Cuál era el precio sin IVA? (IVA 21 %)

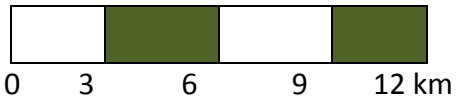
18. ¿Qué incremento porcentual se ha efectuado sobre un artículo que antes valía 25 € y ahora se paga a 29 €?

19. Un balneario recibió 10 mil clientes en el mes de julio y 12 mil en agosto. ¿Cuál es el incremento porcentual de clientes de julio a agosto?

20. Un mapa está dibujado a escala 1 : 800000. La distancia real entre dos ciudades es 200 km. ¿Cuál es su distancia en el mapa?

21. La distancia entre Oviedo y Coruña es de 340 km. Si en el mapa están a 12 cm, ¿cuál es la escala a la que está dibujado?

22. Interpreta la siguiente escala gráfica y calcula la distancia en la realidad para 21 cm.



23. Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

Tamaño en el dibujo	Tamaño real	Escala
20 cm largo y 5 cm de ancho		1 : 25000
10 cm	15 km	
	450 m	1 : 30000

24. Copia en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad inversa y completa la tabla:

Magnitud A	8	7,5		3,5	
Magnitud B		12	0,15		10

25. Determina si las siguientes magnitudes se encuentran en proporción directa, inversa o en ninguna de ellas:

a) Velocidad a la que circula un coche y espacio que recorre

b) Dinero que tienes para gastar y bolsas de almendras que puedes comprar

c) Talla de zapatos y precio de los mismos

d) Número de miembros de una familia y litros de leche que consumen

e) Número de entradas vendidas para un concierto y dinero recaudado

f) Números de grifos que llenan una piscina y tiempo que esta tarda en llenarse

g) Edad de una persona y estatura que tiene

h) Número de trabajadores y tiempo que tardan en hacer una valla

i) Edad de una persona y número de amigos que tiene

26. ¿Qué velocidad debería llevar un automóvil para recorrer en 4 horas cierta distancia, si a 80 km/h ha tardado 5 horas y 15 minutos?

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

27. La razón de proporcionalidad inversa entre A y B es 5. Copia en tu cuaderno y completa la tabla siguiente:

A	20		7		10,8
B		0,05		0,3	

28. En la granja se hace el pedido de forraje para alimentar a 240 cerdos durante 9 semanas. Si vende 60 cerdos, ¿cuántas semanas le durará el forraje? ¿Y si en lugar de vender, compra treinta cerdos? ¿Y si decide rebajar la ración una cuarta parte con los 240 cerdos?

29. Un granjero con 65 gallinas tiene maíz para alimentarlas 25 días. Si vende 20 gallinas, ¿Cuántos días podrá alimentar a las restantes?

30. Con 15 paquetes de 4 kg cada uno pueden comer 150 gallinas diariamente. Si los paquetes fueran de 2,7 kg, ¿cuántos necesitaríamos para dar de comer a las mismas gallinas?

31. Determina si las dos magnitudes son directa o inversamente proporcionales y completa la tabla en tu cuaderno:

A	24	8	0,4	6		50
B	3	9	180		20	

32. Si la jornada laboral es de 8 horas necesitamos a 20 operarios para realizar un trabajo. Si rebajamos la jornada en media hora diaria, ¿cuántos operarios serán necesarios para realizar el mismo trabajo?

33. En un almacén se guardan reservas de comida para 100 personas durante 20 días con 3 raciones diarias, ¿cuántos días duraría la misma comida para 75 personas con 2 raciones diarias?

34. Si 15 operarios instalan 2500 m de valla en 7 días. ¿Cuántos días tardarán 12 operarios en instalar 5250 m de valla?

35. En un concurso el premio de 168000 € se reparte de forma directamente proporcional a los puntos conseguidos. Los tres finalistas consiguieron 120, 78 y 42 puntos. ¿Cuántos euros recibirán cada uno?

36. Repartir 336 en partes directamente proporcionales a 160, 140, 120.

37. Un trabajo se paga a 3120 €. Tres operarios lo realizan aportando el primero 22 jornadas, el segundo 16 jornadas y el tercero 14 jornadas. ¿Cuánto recibirá cada uno?

38. Repartir 4350 en partes inversamente proporcionales a 18, 30, 45.

39. Mezclamos 3 kg de almendras a 14 €/kg, 1,5 kg de nueces a 6 €/kg, 1,75 kg de castañas 8 €/kg. Calcula el precio final del paquete de 250 g de mezcla de frutos secos.

40. Calcula el precio del litro de zumo que se consigue mezclando 8 litros de zumo de piña a 2,5 €/l, 15 litros de zumo de naranja a 1,6 €/l y 5 litros de zumo de uva a 1,2 €/l. ¿A cuánto debe venderse una botella de litro y medio si se le aplica un aumento del 40 % sobre el precio de coste?

41. Para conseguir un tipo de pintura se mezclan tres productos 5 kg del producto X a 18 €/kg, 19 kg del producto Y a 4,2 €/kg y 12 kg del producto Z a 8 €/kg. Calcula el precio del kg de mezcla.

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

42. Cinco personas comparten un microbús para realizar distintos trayectos. El coste total es de 157,5 € más 20 € de suplemento por servicio nocturno. Los kilómetros recorridos por cada pasajero fueron 3, 5, 7, 8 y 12 respectivamente. ¿Cuánto debe abonar cada uno?

43. Se ha decidido penalizar a las empresas que más contaminan. Para ello se reparten 2350000 € para subvencionar a tres empresas que presentan un 12 %, 9 % y 15 % de grado de contaminación. ¿Cuánto recibirá cada una?

44. Un lingote de oro pesa 340 g y contiene 280,5 g de oro puro. ¿Cuál es su ley?

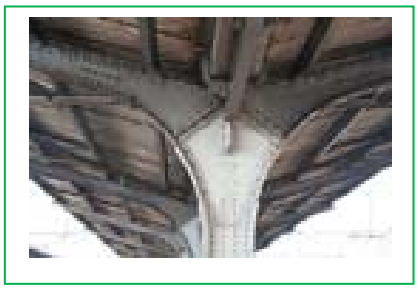
45. ¿Cuántos gramos de oro contiene una joya de 0,900 de ley, que se ha formado con una aleación de 60 g de 0,950 de ley y 20 g de 0,750 de ley?

46. ¿Qué capital hay que depositar al 3,5 % de rédito en 5 años para obtener un interés simple de 810 €?

47. ¿Cuál es el capital final que se recibirá por depositar 25400 € al 1,4 % en 10 años?

48. ¿Cuántos meses debe depositarse un capital de 74500 € al 3 % para obtener un interés de 2980 €?

49. Al 3 % de interés compuesto, un capital se ha convertido en 63338,5 €. ¿De qué capital se trata?



50. En la construcción de un puente de 850 m se han utilizado 150 vigas, pero el ingeniero no está muy seguro y decide reforzar la obra añadiendo 50 vigas más. Si las vigas se colocan uniformemente a lo largo de todo el puente, ¿a qué distancia se colocarán las vigas?

51. En un colegio de primaria se convoca un concurso de ortografía en el que se dan varios premios. El total que se reparte entre los premiados es 500 €. Los alumnos que no han cometido ninguna falta reciben 150 €, y el resto se distribuye de manera inversamente proporcional al número de faltas. Hay dos alumnos que no han tenido ninguna falta, uno ha tenido una falta, otro dos faltas y el último ha tenido cuatro faltas, ¿cuánto recibirá cada uno?

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad directa son:

A	10	0,25		0,1	100
B		50	5		

a) 612,5; 1000; 0,0005; 0,5 b) 1,25; 2,5; 125; 0,125 c) 62; 500; 0,005; 0,05

2. Con 500 € pagamos los gastos de gas durante 10 meses. En 36 meses pagaremos:

a) 2000 € b) 1900 € c) 1800 € d) 1500 €.

3. Un artículo que costaba 2000 € se ha rebajado a 1750 €. El porcentaje de rebaja aplicado es:

a) 10 % b) 12,5 % c) 15,625 % d) 11,75 %

4. Para envasar 510 litros de agua utilizamos botellas de litro y medio. ¿Cuántas botellas necesitaremos si queremos utilizar envases de tres cuartos de litro?

a) 590 botellas b) 700 botellas c) 650 botellas d) 680 botellas

5. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad inversa son:

A	5,5	10		11	
B	20		0,5		0,1

a) 40; 200; 11,5; 1000 b) 11; 200; 20; 300 c) 11; 220; 10; 1100 d) 40; 220; 10; 500

6. Tres agricultores se reparten los kilogramos de la cosecha de forma proporcional al tamaño de sus parcelas. La mayor, que mide 15 ha recibido 30 toneladas, la segunda es de 12 ha y la tercera de 10 ha recibirán:

a) 24 t y 20 t b) 20 t y 24 t c) 24 t y 18 t d) 25 t y 20 t

7. La escala a la que se ha dibujado un mapa en el que 2,7 cm equivalen a 0,81 km es:

a) 1 : 34000 b) 1 : 3000 c) 1 : 30000 d) 1 : 300

8. Con 4 rollos de papel de 5 m de largo, puedo forrar 32 libros. ¿Cuántos rollos necesitaremos para forrar 16 libros si ahora los rollos de papel son de 2 m de largo?

a) 3 rollos b) 5 rollos c) 4 rollos d) 2 rollos

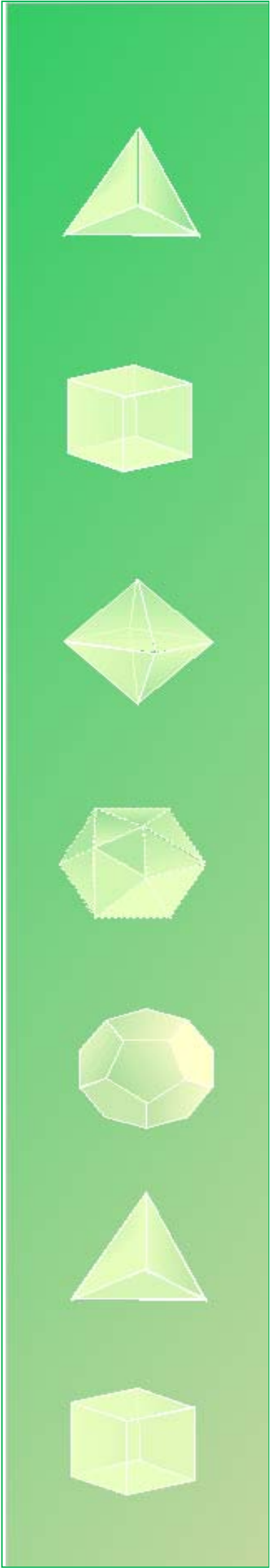
9. El precio final del kg de mezcla de 5 kg de harina clase A, a 1,2 €/kg, 2,8 kg clase B a 0,85 €/kg y 4 kg clase C a 1 €/kg es:

a) 1,12€ b) 0,98 € c) 1,03€ d) 1,049€

10. La ley de una aleación es 0,855. Si el peso de la joya es 304 g, la cantidad de metal precioso es:

a) 259,92 g b) 255,4 g c) 248,9 g d) 306 g

Autora: Nieves Zuasti
Revisor: Javier Rodrigo y María Molero
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF



Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas:

4ºB ESO
Capítulo 7: Semejanza

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-045274

Fecha y hora de registro: 2014-06-10 18:19:42.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Jorge Muñoz

Revisora: Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

Índice

1. FIGURAS SEMEJANTES

1.1. FIGURAS SEMEJANTES

1.2. RAZÓN DE SEMEJANZA. ESCALA.

1.3. SEMEJANZA EN LONGITUDES, ÁREAS Y VOLÚMENES

2. EL TEOREMA DE TALES

2.1. TEOREMA DE TALES

2.2. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE TALES

2.3. RECÍPROCO DEL TEOREMA DE TALES

2.4. APLICACIONES DEL TEOREMA DE TALES

3. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

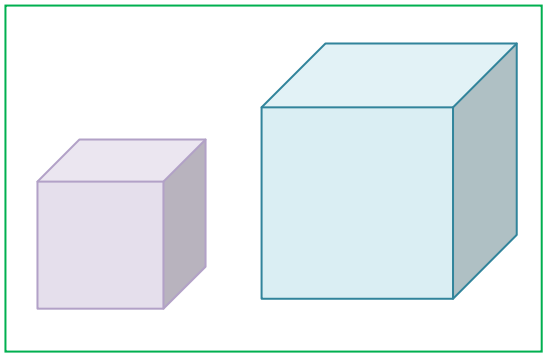
3.1. CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

3.2. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS: TEOREMA DE LA ALTURA Y DEL CATETO

3.3. APLICACIÓN INFORMÁTICA PARA LA COMPRENSIÓN DE LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Resumen

Uno de los problemas *históricos* de la Matemática es el de la **duplicación de un cubo**. En Atenas se desarrolló una tremenda peste que asolaba a la población. Incluso su gobernante, Pericles murió en el año 429 a. C. Consultado el oráculo de Apolo este dijo que se terminaría con la peste si se construía un altar que fuese doble del que había (que tenía forma de cubo).



No se logró dar con la solución. Se debe buscar la razón de proporcionalidad entre los lados para que el volumen sea doble. La peste se terminó, pero el problema se quedó sin resolver durante siglos, pero tú vas a saber solucionarlo cuando estudies este capítulo.

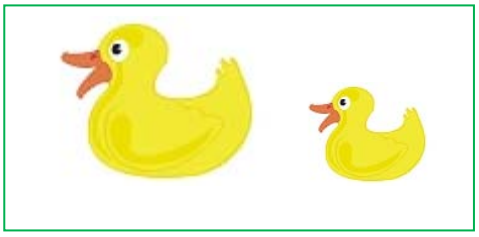
También vamos a estudiar el teorema de Tales y su aplicación a reconocer cuando dos triángulos son semejantes. Son los criterios de semejanza de triángulos.

Utilizando la semejanza de triángulos demostraremos dos teoremas, el teorema de la altura y el del cateto.

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

1. FIGURAS SEMEJANTES

1.1. Figuras semejantes



Durante este capítulo hablaremos únicamente de la proporcionalidad geométrica, la semejanza.

Dos figuras semejantes tienen *la misma forma*. Es muy útil saber reconocer la semejanza para poder estudiar una figura e inferir así propiedades de una figura semejante a ella que es más grande o inaccesible. La semejanza conserva los ángulos y mantiene la proporción entre las distancias.

Dos polígonos son semejantes si sus lados son proporcionales y sus ángulos son iguales.

1.2. Razón de semejanza. Escala.

Dos figuras son **semejantes** si las longitudes de elementos correspondientes son proporcionales. Al coeficiente de proporcionalidad se le llama **razón de semejanza**. Cuando representamos algo mediante una figura (3D) o un plano (2D) la razón de semejanza también se la llama **escala**.

En el lenguaje matemático existen dos herramientas fundamentales para describir una proporción: El producto y el cociente.

El producto indica cuántas veces mayor es la representación frente al modelo. Se suele denotar mediante el signo de producto **"X"** (10X, 100X, etc.) indicando así la razón de semejanza.

Ejemplo:

- *Una representación a escala* 100X de una célula, indica que la representación es 100 veces más grande que el modelo, o que 100 células en fila tienen la misma longitud que la representación.

La división indica el camino contrario, o cuánto más pequeño es el modelo frente a su representación. Se suele denotar mediante el símbolo de división **":"** (1:100, 1:500, etc.) lo que indica la razón de semejanza.

Ejemplo:

- *Un plano de construcción de un edificio de escala* 1:100, indica que la representación es 100 veces más pequeña que el modelo. Si una distancia en el plano es 10 cm, esa misma distancia en la realidad será de 10 m.

Para escribir una **razón de semejanza** en lenguaje algebraico se utilizan dos operadores: el producto (x) y el cociente (:).

Cuando hablamos de semejanza geométrica, nos referimos a proporcionalidad en cuanto a longitudes, pero también hay otros atributos en los que podemos encontrar semejanzas entre un modelo y un semejante. En general, cualquier magnitud que sea medible tanto en el modelo como en su semejante, es apta para establecer una relación de semejanza.

Siempre que se puedan comparar dos magnitudes de un atributo común, es posible establecer una **razón de semejanza**.

Actividades resueltas

- *Si un microscopio tiene un aumento de 1*00X, ¿qué tamaño (aparente) piensas que tendrá la imagen que se vea por el objetivo si observamos un pelo de 0,1 mm de espesor?

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

0,1 mm X 100 = 10 mm = 1 cm.

- *Averigua la altura de una casa que mide* 20 cm de alto en un plano de escala 1:100.

Si H es la altura de la casa y h el tamaño en el plano, sabemos que $h = H/100$, por lo tanto, $H = 100 \cdot h$.

$H = 100 \cdot 20$ cm = 20 m. *Comprobación*: Es una casa de unos 7 pisos.

Actividades propuestas

1. Mide tu altura en una foto y calcula el factor de semejanza.

1.3. Semejanza en longitudes, áreas y volúmenes

Longitud de figuras semejantes

En las figuras semejantes la forma no varía, únicamente cambia el tamaño. Las longitudes son proporcionales. En el siguiente apartado demostraremos el teorema de Tales que es el fundamento matemático de la semejanza.

La **razón de semejanza** se aplica a todas las **longitudes** del modelo por igual.

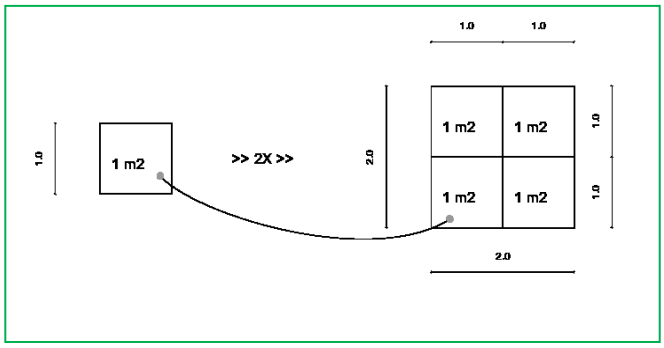
Cuando las propiedades de una figura dependen de la longitud, como el área y el volumen, estas propiedades también cambian en la figura semejante, aunque no de la misma manera que la longitud.

Ejemplo:

- *Si el área del cuadrado es $A = L^2 = L \cdot L$, el área de un cuadrado semejante de razón* 2, *será:*

  $A = 2 \cdot L \cdot 2 \cdot L = 2 \cdot 2 \cdot L \cdot L = 2^2 \cdot L^2 = 4 \cdot L^2$

Áreas de figuras semejantes



El área de una figura es una propiedad que depende de la longitud de sus segmentos. En concreto, la relación entre la longitud de una figura y su área es cuadrática.

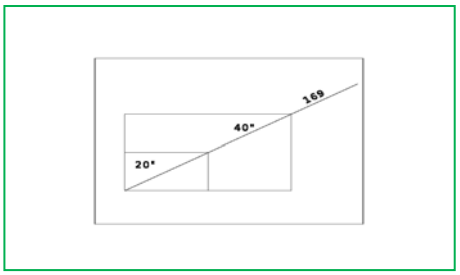
Cuando se aplica el factor de semejanza, se conserva la relación cuadrática entre longitud y área, por lo que en una figura plana (2D), provocará un aumento de su área proporcional al cuadrado.

Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es k, la relación entre sus áreas, A y A' es:

$A' = k \cdot L_1 \cdot k \cdot L_2 = k \cdot k \cdot L_1 \cdot L_2 = k^2 \cdot A$

Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es k, entonces la razón entre sus áreas es $\boldsymbol{k^2}$.

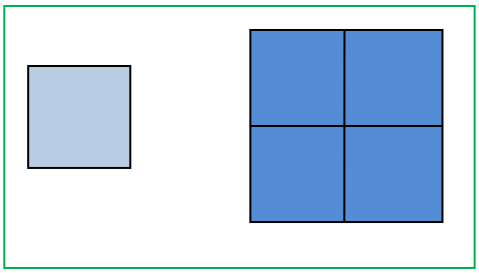
Ejemplo:



- *Un televisor de* 40 *pulgadas cuesta aproximadamente cuatro veces más que uno de* 20. Por extraño que parezca, el aumento de precio está justificado. El tamaño del televisor, indica la longitud de su diagonal en pulgadas. Una longitud doble, implica un área cuatro veces mayor y por tanto necesita cuatro veces más componentes electrónicos.

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz
Textos Marea Verde

Ejemplo:



- *Observa la figura del margen.* Si multiplicamos por 2 el lado del cuadrado pequeño, el área del cuadrado grande es $2^2 = 4$ veces la del pequeño.

Volúmenes de figuras semejantes

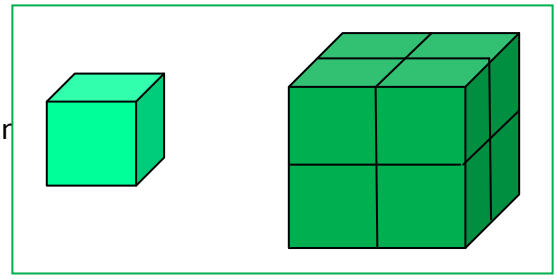
El volumen de una figura es una propiedad que depende de la longitud de sus segmentos. En este caso, la relación entre las longitudes de una figura y su volumen es cúbica.

Cuando se aplica el factor de semejanza, esta relación cúbica provocará un aumento de su volumen proporcional al cubo (k^3). Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es k, y el volumen de partida es $V = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3$: al aplicar la semejanza se tiene:

$$V_k = k \cdot L_1 \cdot k \cdot L_2 \cdot k \cdot L_3 = k \cdot k \cdot k \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = k^3 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = k^3 \cdot V$$

Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es ***k***, entonces entre sus volúmenes es $\boldsymbol{k^3}$.

Ejemplo:



- *Observa la figura del margen*. Al multiplicar por 2 el lado del cubo pequeño se obtiene el cubo grande. El volumen del cubo grande es 8 (2^3) veces el del cubo pequeño.

Actividades resueltas

- *La torre Eiffel de París mide 300 metros de altura y pesa unos 8 millones de kilos. Está construida de hierro. Si encargamos un modelo a escala de dicha torre, también de hierro, que pese sólo un kilo, ¿qué altura tendrá? ¿Será mayor o menor que un lápiz?*

El peso está relacionado con el volumen. La torre Eiffel pesa 8 000 000 kilos, y queremos construir una, exactamente del mismo material que pese 1 kilo. Por tanto $k^3 = 8000000/1 = 8\ 000\ 000$, y $k = 200$. La razón de proporcionalidad entre las longitudes es de 200.

Si la Torre Eiffel mide 300 *m* de altura (mide un poco más, 320 m), y llamamos x a lo que mide la nuestra tenemos: $300/x = 200$. Despejamos x que resulta igual a $x = 1{,}5$ *m*. ¡Mide metro y medio! ¡Es mucho mayor que un lápiz!

Actividades propuestas

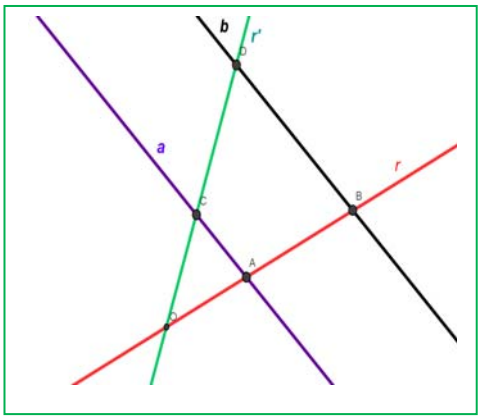
2. El diámetro de un melocotón es tres veces mayor que el de su hueso, y mide 8 *cm*. Calcula el volumen del melocotón, suponiendo que es esférico, y el de su hueso, también esférico. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre el volumen del melocotón y el del hueso?

3. En la pizzería tienen pizzas de varios precios: 3 €, 6 € y 9 €. Los diámetros de estas pizzas son: 15 *cm*, 20 *cm* y 30 *cm*, ¿cuál resulta más económica? Calcula la relación entre las áreas y compárala con la relación entre los precios.

4. Una maqueta de un depósito cilíndrico de 1000 litros de capacidad y 5 metros de altura, queremos que tenga una capacidad de 1 litro. ¿Qué altura debe tener la maqueta?

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

2. EL TEOREMA DE TALES



2.1. Teorema de Tales

Dadas dos rectas, *r* y *r'*, que se cortan en el punto *O*, y dos rectas paralelas entre sí, *a* y *b*. La recta *a* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *A* y *C*, y la recta *b* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *B* y *D*. Entonces el Teorema de Tales afirma que los segmentos son proporcionales:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}$$

Se dice que los triángulos *OAC* y *OBD* están en **posición *Tales***. Son **semejantes**. Tienen un ángulo común (coincidente) y los lados proporcionales.

Actividades resueltas

- *Sean OAC y OBD dos triángulos en posición Tales. El perímetro de OBD es* 20 *cm, y OA mide* 2 *cm, AC mide* 5 *cm y OC mide* 3 *cm. Calcula las longitudes de los lados de OBD.*

Utilizamos la expresión: $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}$ sustituyendo los datos:

$$\frac{2}{OB}=\frac{3}{OD}=\frac{5}{BD}=\frac{2+3+5}{20}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2},$$

por lo que despejando, sabemos que: *OB* = 2·2 = 4 cm; *OD* = 3·2 = 6 cm, y *BD* = 5·2 = 10 cm. En efecto: 4 + 6 + 10 = 20 cm, perímetro del triángulo.

- *Cuenta la leyenda que Tales midió la altura de la pirámide de Keops comparando la sombra de la pirámide con la sombra de su bastón. Tenemos un bastón que mide* 1 *m, si la sombra de un árbol mide* 12 *m, y la del bastón, (a la misma hora del día y en el mismo momento), mide* 0,8 *m, ¿cuánto mide el árbol?*

Las alturas del árbol y del bastón son proporcionales a sus sombras, (forman triángulos en posición *Tales*), por lo que, si llamamos *x* a la altura del árbol podemos decir:

$$\frac{0{,}8}{1}=\frac{12}{x}$$. Por tanto *x* = 12/0,8 = 15 metros.

Actividades propuestas

5. En una foto hay un niño, que sabemos que mide 1,5 *m*, y un edificio. Medimos la altura del niño y del edificio en la foto, y resultan ser: 2 *cm* y 10 *cm*. ¿Qué altura tiene el edificio? *Comprobación*: ¿El resultado te parece real? ¿Es posible que un edificio tenga esa altura?

6. Se dibuja un hexágono regular. Se trazan sus diagonales y se obtiene otro hexágono regular. Indica la razón de semejanza entre los lados de ambos hexágonos.

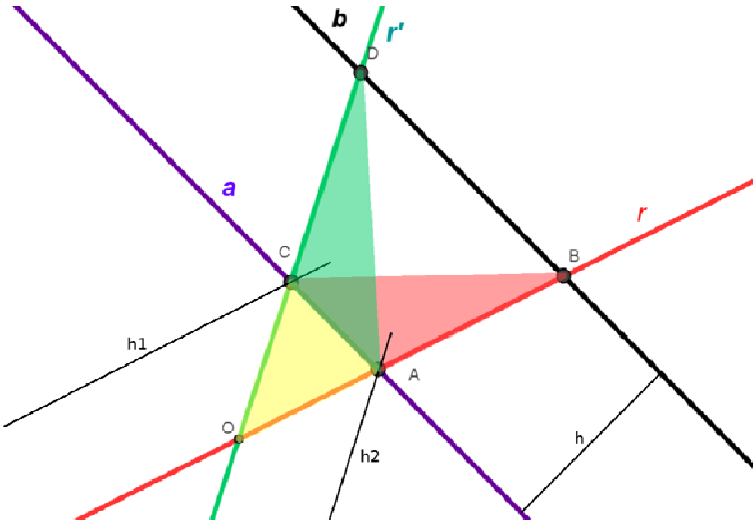
7. En un triángulo regular *ABC* de lado 1 *cm*, trazamos los puntos medios, *M* y *N*, de dos de sus lados. Trazamos las rectas *BN* y *CM* que se cortan en un punto *O*. ¿Son semejantes los triángulos *MON* y *COB*? ¿Cuál es la razón de semejanza? ¿Cuánto mide el lado *MN*?

8. Una pirámide regular hexagonal, de lado de la base 3 *cm* y altura 10 *cm*, se corta por un plano a una distancia de 4 *cm* del vértice, con lo que se obtiene una nueva pirámide. ¿Cuánto miden sus dimensiones?

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

2.2. Demostración del teorema de Tales

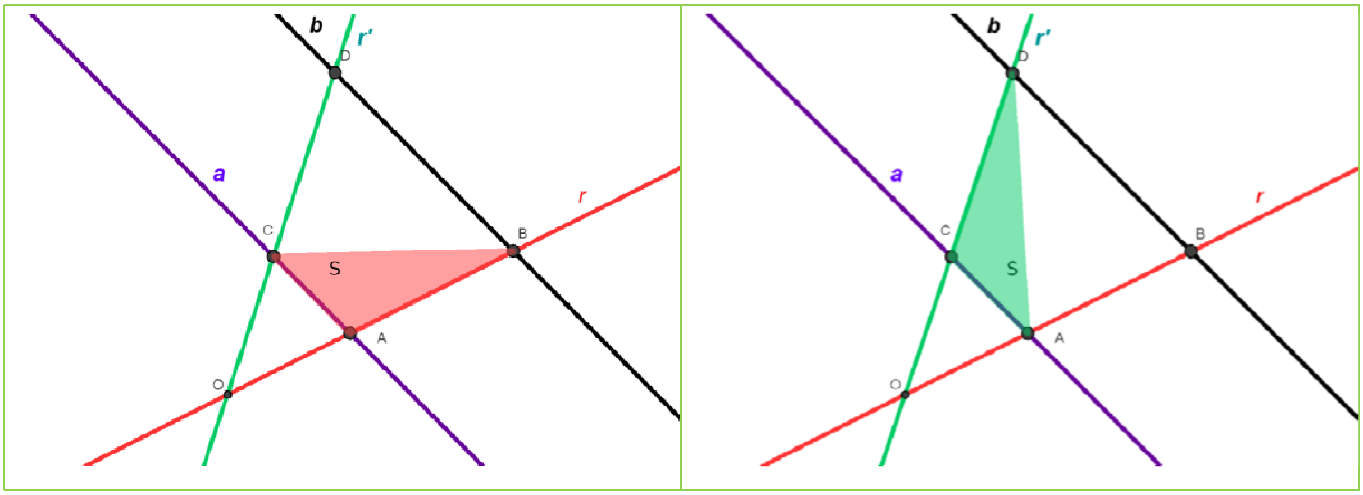
Para la demostración se utilizan los triángulos *ABC*, *ADC* y *OCA,* que se muestran en la figura.



Vamos a dar varios pasos para demostrar el teorema de Tales.

- El área del triángulo *ABC* es la misma que el área del triángulo *ADC* pues tienen la misma base, (*AC),* y la misma altura (*h*), la distancia entre las rectas paralelas ***a*** y ***b***:

$$Área\ (ABC) = Área\ (ADC) = CA \cdot h/2 = S$$

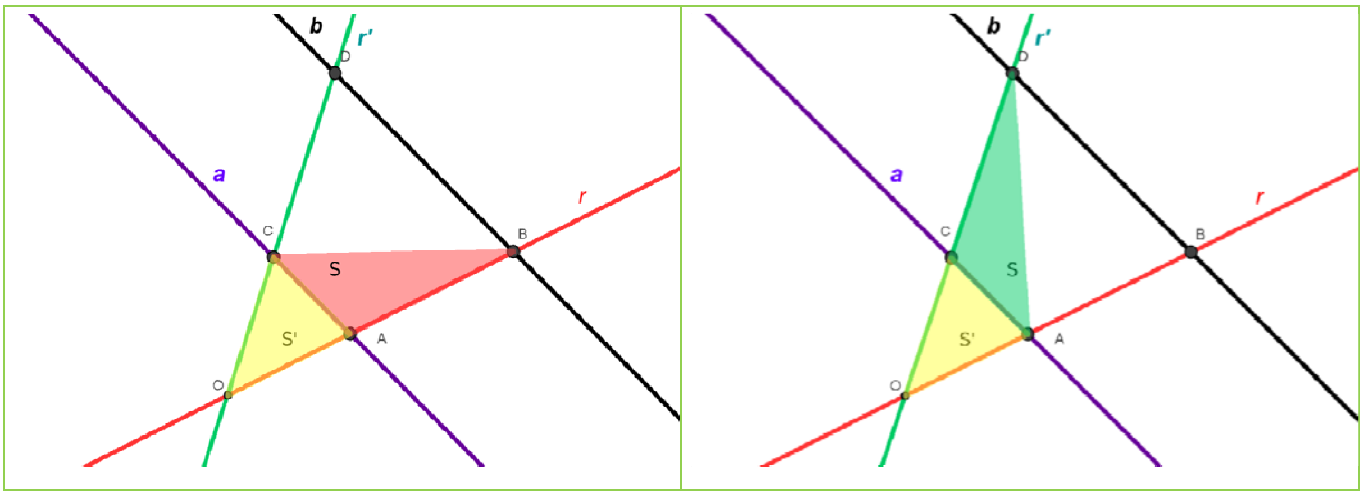


- El área del triángulo *OCB* es la misma que el área del triángulo *OAD* pues hemos sumado a las

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

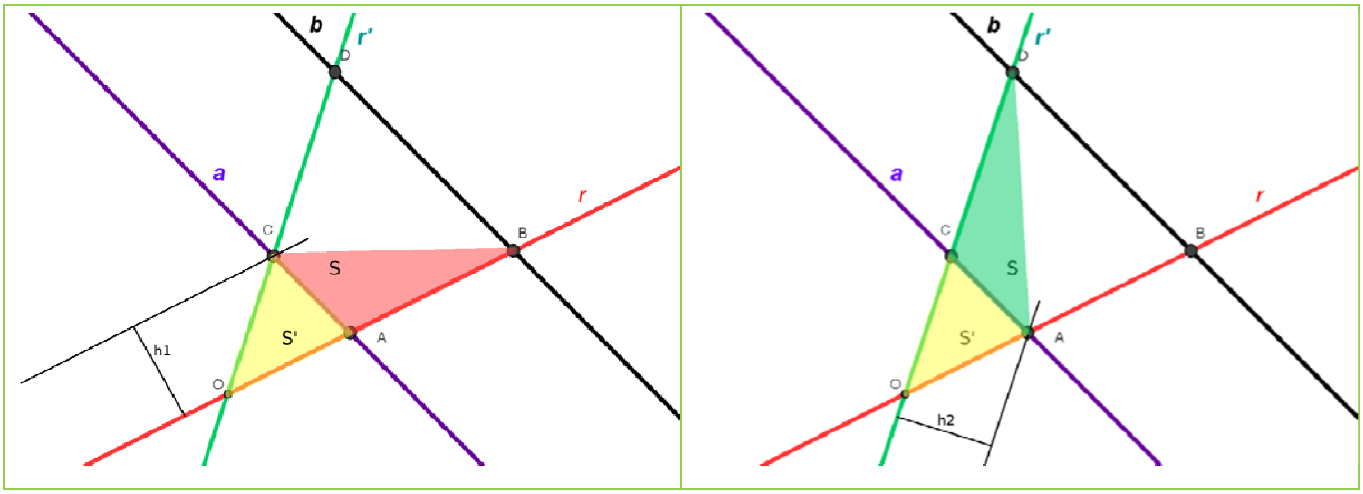
áreas de los triángulos anteriores, el área del triángulo *OAC*:

Área (*OCB*) = *Área* (*OAD*) = S + S'



- Calculamos el cociente entre las áreas de los triángulos *OAC* y *OBC*. Para calcular las áreas, tomamos las bases que están sobre la recta ***r***, entonces la altura de ambos triángulos es la misma pues tienen el vértice *C* común, por lo que el cociente entre sus áreas es igual al cociente entre sus bases.
- Del mismo modo calculamos el cociente entre las áreas de los triángulos *OAC* y *OAD* tomando ahora las bases sobre la recta ***r'*** y la altura, que es la misma, la del vértice común *A*:

$$\frac{Área(OAC)}{Área(OBC)}=\frac{S'}{S+S'}=\frac{OA\cdot h_1/2}{OB\cdot h_1/2}=\frac{OA}{OB} \qquad \frac{Área(OAC)}{Área(OAD)}=\frac{S'}{S+S'}=\frac{OC\cdot h_2/2}{OD\cdot h_2/2}=\frac{OC}{OD}$$



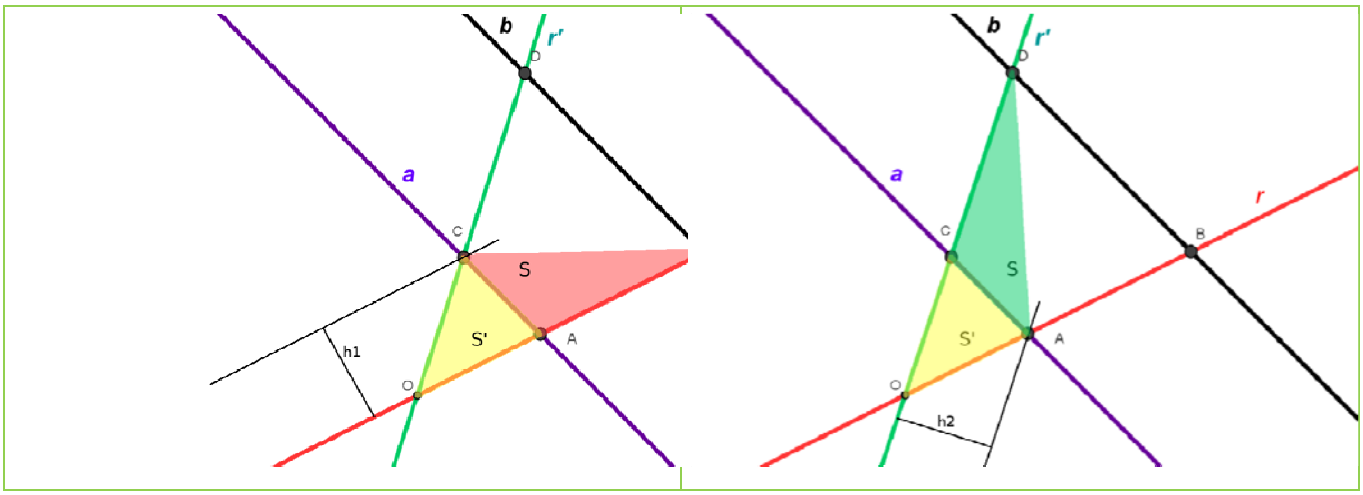
- Ya hemos demostrado que *Área* (*OBC*) = *Área* (*OAD*) = S, sustituyendo:

$$\frac{Área(OAC)}{Área(OBC)}=\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD} \Rightarrow \frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}. \qquad (1)$$

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

- Para obtener la otra relación de proporcionalidad utilizamos un razonamiento similar. Calculamos el cociente entre las áreas de los triángulos *OAC* y *ABC* tomando las bases sobre la recta ***r*** y la altura del vértice común *C*.
- Después calculamos el cociente entre las áreas de los triángulos *OAC* y *ADC* tomando las bases sobre la recta ***r'*** y la altura, que es la misma, desde el vértice común *A*, por lo que ese cociente es proporcional a las bases *OC* y *CD*:

$$\frac{Área(OAC)}{Área(ABC)}=\frac{S'}{S}=\frac{OA\cdot h_1/2}{AB\cdot h_1/2}=\frac{OA}{AB} \qquad \frac{Área(OAC)}{Área(ADC)}=\frac{S'}{S}=\frac{OC\cdot h_2/2}{CD\cdot h_2/2}=\frac{OC}{CD}$$



- Pero como las áreas de *ABC* y de *ADC* (S) son iguales se obtiene:

$$\frac{Área(OAC)}{Área(ABC)}=\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD}\Rightarrow\frac{OA}{OC}=\frac{AB}{CD}. \qquad (2)$$

Igualando las expresiones (1) y (2) se consigue la primera afirmación del teorema de Tales:

$$\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}\Leftrightarrow\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$$

Actividades resueltas

- *Demuestra que si* $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}$ *entonces* $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}$

En efecto, si decimos que $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}=k$ obtenemos que:

$$OA=k\cdot OC; OB=k\cdot OD; AB=k\cdot CD \;\Rightarrow\; OA+OB+AB=k\cdot OC+k\cdot OD+k\cdot CD=k\cdot(OC+OD+CD)$$

Y despejando *k* hemos logrado probar que:

$$k=\frac{OA+OB+AB}{OC+OD+CD} \text{ y por tanto}$$

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}$$, el teorema de Tales.

- *Sean OAC y OBD dos triángulos en posición Tales. El perímetro de OAC es 50 cm, y OB mide 12 cm, BD mide 9 cm y OD mide 9 cm. Calcula las longitudes de los lados de OAC.*

Utilizamos la expresión del Teorema de Tales:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}$$

sustituyendo los datos:

$$\frac{OA}{12}=\frac{OC}{9}=\frac{AC}{9}=\frac{50}{12+9+9}=\frac{50}{30}=\frac{5}{3},$$

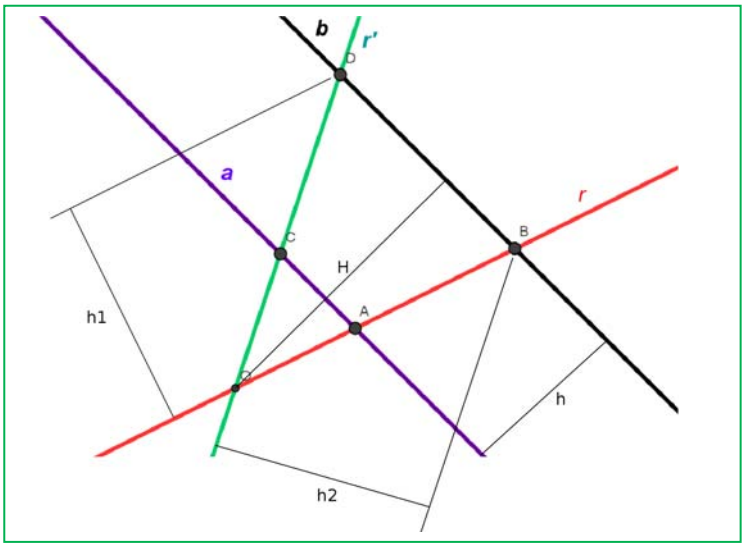
por lo que despejando, sabemos que:

$OA = 12\frac{5}{3} = 20$ cm;

$OD = 9\frac{5}{3} = 15$ cm, y

$BD = 9\frac{5}{3} = 15$ cm.

En efecto: 20 + 15 + 15 = 50 cm, perímetro del triángulo.



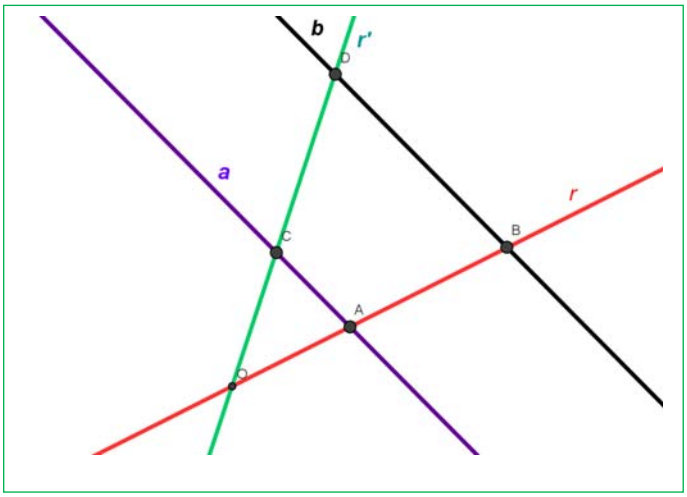
Actividades propuestas

9. Sean *ABC* y *AED* dos triángulos en posición Tales. Se sabe que *AB* = 7 m, *BC* = 5 m, *AC* = 4 m y *AD* = 14 m. Calcula las dimensiones de *AED* y su perímetro.

10. *Reto*: Utiliza una hoja en blanco para demostrar el teorema de Tales sin ayuda. No hace falta que utilices el mismo procedimiento que el libro. Hay muchas maneras de demostrar el teorema.

2.3. Recíproco del teorema de Tales

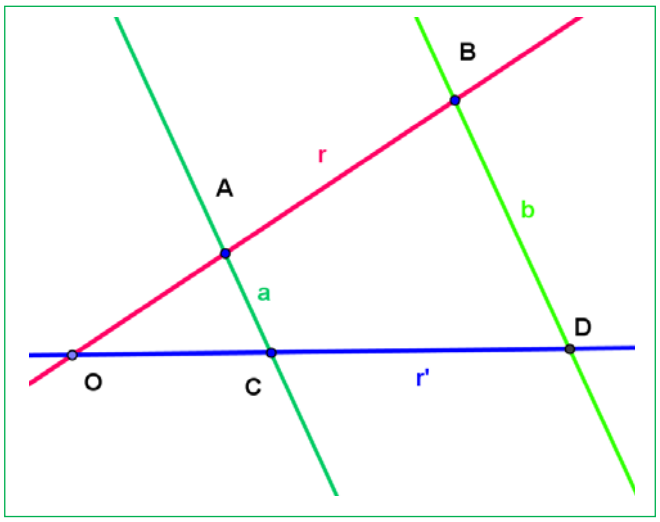
Dadas dos rectas, ***r*** y ***r'***, que se cortan en el punto *O*, y dos rectas ***a*** y ***b*** tales que la recta ***a*** corta a las rectas ***r*** y ***r'*** en los puntos *A* y *C*, y la recta ***b*** corta a las rectas ***r*** y ***r'*** en los puntos *B* y *D*. Entonces el recíproco del Teorema de Tales afirma que si todos los segmentos formados por los puntos *A, B, C* y *D* son proporcionales, entonces las rectas ***a*** y ***b*** son paralelas entre sí.



Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

Si $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$ entonces ***a*** y ***b*** son paralelas.

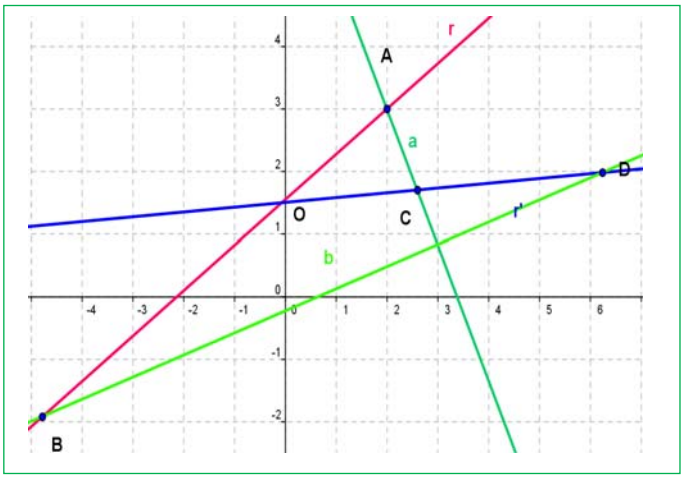
Actividades resueltas



- *En la figura adjunta se sabe que OA* = 2 cm, *OC* = 2 cm, AC = 1 cm, *OB* = 5 cm, *OD* = 5 cm, BD = 2'5 cm. ¿Cómo son las rectas ***a*** y ***b***?

Sustituimos en la expresión del teorema de Tales: $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$, que se verifica ya que: $\frac{2}{5}=\frac{2}{5}=\frac{1}{2'5}$, luego las rectas ***a*** y ***b*** son paralelas, y el segmento *AC* es paralelo a *BD*.

- *En la figura adjunta se sabe que OA* = *OC* = 2 cm, y que *OB* = 5 cm = *OD*. Las rectas ***a*** y ***b*** no son paralelas, ¿por qué?



Porque no verifica el teorema de Tales.

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}\neq\frac{AC}{BD} \Rightarrow \frac{2}{5}=\frac{2}{5}\neq\frac{AC}{BD}.$$

No basta con que se verifique una de las igualdades, deben verificarse las dos.

Comprobación: Mide con una regla los valores de *AC* y *BD*.

Actividades propuestas

11. Sean *O*, *A* y *B* tres puntos alineados y sean *O*, *C*, *D* otros tres puntos alineados en una recta diferente a la anterior. Se verifica que $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}$. ¿Podemos asegurar que el segmento *AC* es paralelo al segmento *BD*? Razona la respuesta.

12. Sean *O*, *A* y *B* tres puntos alineados y sean *O*, *C*, *D* otros tres puntos alineados en una recta diferente a la anterior. Se verifica que $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$. ¿Podemos asegurar que el segmento *AC* es paralelo al segmento *BD*? Razona la respuesta.

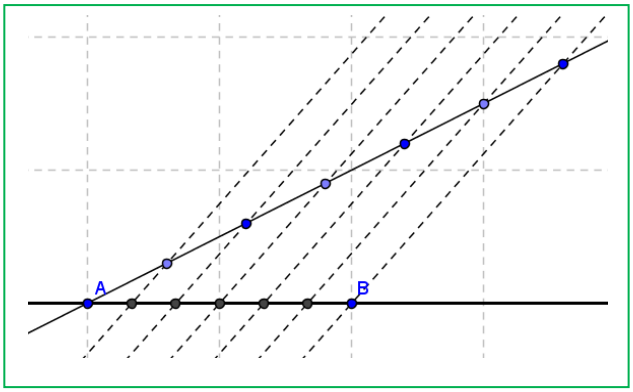
Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

2.4. Aplicaciones del teorema de Tales

Al estudiar la representación de números racionales en la recta numérica aprendimos a representar fracciones para lo que era necesario dividir segmentos en partes iguales.

Recuerda que:

Para dividir un **segmento *AB* en *n* partes iguales** se traza una semirrecta *r* con origen en *A* donde se señalan, con ayuda de un compás, *n* segmentos consecutivos de la misma longitud. El extremo del último segmento se une con *B*, y se trazan paralelas a este segmento por cada uno de los puntos señalados de la semirrecta.



Observa que la figura obtenida es de triángulos en posición Tales, y que los segmentos obtenidos en *AB* son todos de igual longitud.

Del mismo modo el teorema de Tales nos sirve para **dividir un segmento en partes que tengan una proporción dada**. El procedimiento es el mismo que el anterior. La diferencia es que ahora únicamente nos interesa una de las divisiones de la semirrecta *r*.

El teorema de Tales también nos permite conocer mucho más sobre la **semejanza de triángulos**. Si dos triángulos son semejantes vamos a poder aplicar un movimiento a uno de ellos (traslación, giro o simetría) y colocarlo en posición Tales con el segundo, y a partir de ahí utilizar el teorema de Tales. Esto lo veremos con más detenimiento en los apartados siguientes.

Actividades resueltas

- *En la figura anterior hemos dividido el segmento AB* en 6 partes iguales. Identifica los 6 triángulos en posición de Tales y calcula el factor de semejanza con respecto al primero.

Los triángulos en posición de Tales son los que comparten el mismo ángulo del vértice A.
Si llamamos *d* a la distancia entre dos cortes sobre el segmento *AB*, se puede calcular $d = AB/6$.
El factor de semejanza se calcula mediante la proporción entre sus longitudes. Al ser triángulos en posición Tales, sabemos que todas las proporciones son iguales para todos los lados, por lo que el factor de semejanza coincide con la proporción entre cualquier par de lados, incluyendo los que coinciden con el segmento *AB*.

Tenemos entonces que la base del primer triángulo (el más pequeño) es *d*, y la base del segundo triángulo es $2 \cdot d$, así que la razón de semejanza de estos dos triángulos es 2.
De la misma manera, las razones de semejanza de los demás triángulos serán 3, 4, 5 y 6.

Actividades propuestas

13. Busca otras relaciones de semejanza entre los triángulos de la actividad resuelta anterior. Por ejemplo el sexto triángulo es el doble que el tercero.

14. Dibuja en tu cuaderno un segmento y divídelo en 5 partes iguales utilizando regla y compás. Demuestra que, utilizando el teorema de Tales los segmentos obtenidos son, en efecto, iguales.

15. Dibuja en tu cuaderno un segmento de 7 cm de longitud, y divídelo en dos segmentos que estén en una proporción de 3/5.

16. Dibuja en tu cuaderno una recta numérica y representa en ella los siguientes fracciones:
a) 1/2 b) 5/7 c) –3/8 d) 5/3

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

3. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

3.1. Criterios de semejanza de triángulos

¿Cómo se sabe si dos figuras son semejantes?

Ya sabes que:

Dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma pero distinto tamaño. Aunque esta definición puede parecer muy clara en lenguaje natural, no es útil en Matemáticas, ya que no se puede escribir en lenguaje lógico.

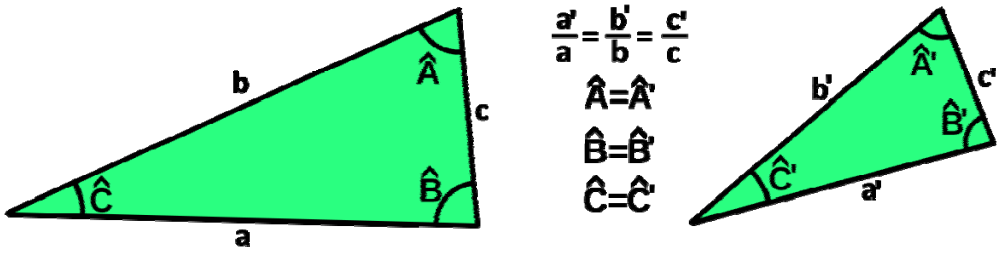
Vamos a trabajar la semejanza con la figura más simple que existe: el **triángulo**.

Las dos condiciones para la semejanza son la forma y el tamaño. Un triángulo es una figura formada por tres lados y tres ángulos.

Dos triángulos tienen la misma forma si los tres ángulos son iguales. Si un solo ángulo es distinto tienen distinta forma, y se trata de triángulos no semejantes.

Cuando dos triángulos tienen la misma forma, (los mismos ángulos), podemos hablar de triángulos semejantes. Si son semejantes, la proporción entre sus lados es constante, como afirma el teorema de Tales.

Dos triángulos **semejantes** tienen todos los ángulos iguales y los lados proporcionales.



Para reconocer dos triángulos semejantes no es necesario conocer todos los lados y ángulos, es suficiente con que se cumpla alguno de los siguientes **criterios de semejanza.**

Criterios de semejanza de triángulos

Para que dos triángulos sean semejantes, deben tener sus tres ángulos iguales. Esto se cumple en los siguientes tres casos.

Dos triángulos son semejantes sí:

Primero: Tienen dos ángulos iguales.

Al tener dos ángulos iguales y ser la suma de los ángulos de un triángulo igual a 180º, el tercer ángulo es necesariamente igual. Con lo que ambos triángulos se pueden superponer y llevar a la posición de triángulos en posición Tales. Dos de sus lados son entonces coincidentes y el tercero es paralelo.

Segundo: Tienen los tres lados proporcionales.

Si sus tres lados son proporcionales, necesariamente son semejantes por el teorema de Tales.

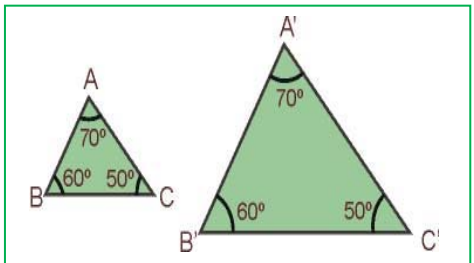
Tercero: Tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman es igual.

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz
Textos Marea Verde

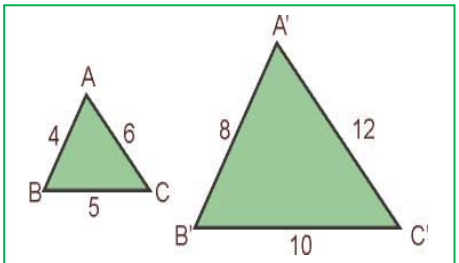
Como acabamos de ver, la demostración de los criterios de semejanza se basa en los criterios de igualdad de triángulos. Ya sabes que dos triángulos son iguales si tienen sus tres lados iguales y sus tres ángulos iguales, pero no es necesario que se verifiquen esas seis igualdades para que lo sean. Basta por ejemplo que tengan un lado y dos ángulos iguales. Así, se puede construir un triángulo igual a uno de los dados en *posición Tales* con el segundo y deducir la semejanza.

Ejemplo

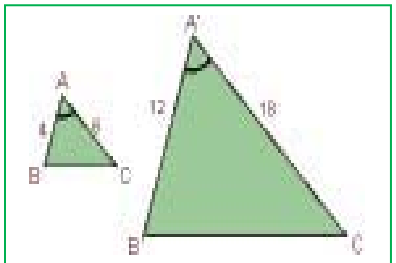
- *Los triángulos de las ilustraciones son semejantes. Cada una de las figuras verifica uno de los criterios de semejanza de triángulos.*



Primer criterio



Segundo criterio



Tercer criterio

Actividades resueltas

- *Calcula los valores desconocidos b' y c'* para que los triángulos de datos a = 9 cm, b = 6 cm, c = 12 cm. a' = 6 cm sean semejantes:

Sabemos que debe verificarse que: $a/a' = b/b' = c/c'$. Al sustituir se tiene: $9/6 = 6/b' = 12/c'$ y al despejar: $b' = 6\cdot6/9 = 4$ cm, $c' = 12\cdot6/9 = 8$ cm.

Actividades propuestas

17. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:

a) Un ángulo de 60º y otro de 40º. Un ángulo de 80º y otro de 60º.
b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 80º. Triángulo isósceles con ángulo igual de 50º.
c) A = 30º, b = 8 cm, c = 10 cm. A'= 30º, b' = 4 cm, c' = 5 cm
d) a = 7 cm, b = 8 cm, c = 12 cm. a' = 14 cm, b' = 16 cm, c' = 25 cm

18. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:

a) a = 12 cm, b = 15 cm, c = 10 cm. a' = 5 cm, ¿ b', c'?

b) A = 37º, b = 10 cm, c = 12 cm. A' = 37º, b' = 10 cm, ¿c'?

19. Un triángulo tiene lados de 12 cm, 14 cm y 8 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 80 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

3.2. Semejanza de triángulos rectángulos: Teorema de la altura y del cateto

Los triángulos rectángulos tienen un ángulo de 90º, así que para que dos triángulos rectángulos sean semejantes les basta con tener otro ángulo igual.

Si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo, distinto del recto, igual, son semejantes y sus lados son proporcionales.

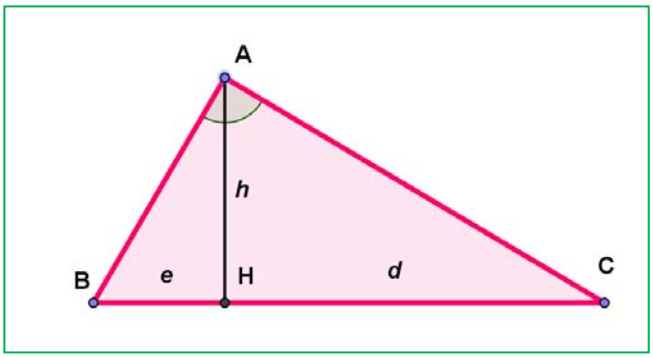
Debido a esto, la altura sobre la hipotenusa, divide al triángulo rectángulo en dos nuevos triángulos rectángulos que son semejantes, (pues comparten un ángulo con el triángulo de partida).

Utilizando ahora que los lados son proporcionales podemos escribir dos teoremas, el teorema de la altura y el del cateto.

Teorema de la altura

En un triángulo rectángulo la altura es media proporcional entre los segmentos en los que divide a la hipotenusa:

$$\frac{h}{e}=\frac{d}{h}.$$



En efecto, sea las longitudes de la altura $AH = h$, del segmento $BH = e$, y del segmento $HC = d$, al ser el triángulo ABC semejante al triángulo ABH y a su vez semejante al triángulo AHC, estos dos triángulos son semejantes, por lo que sus lados son proporcionales, por lo que:

Cateto menor de AHC / cateto menor de ABH = Cateto mayor de AHC / cateto mayor de $ABH \Rightarrow$

$$\frac{h}{e}=\frac{d}{h},$$

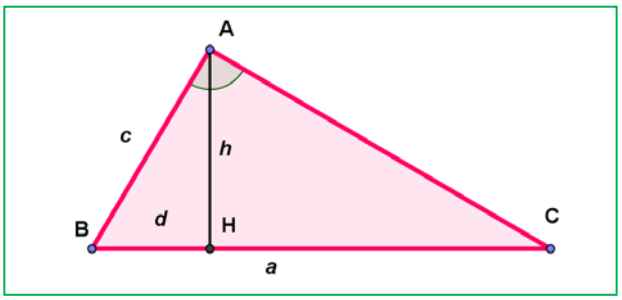
o lo que es lo mismo:

$$h^2 = e\cdot d.$$

Teorema del cateto

En un triángulo rectángulo un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella:

$$\frac{a}{c}=\frac{c}{d}.$$



Por la semejanza de los triángulos ABC y HBA sabemos que los lados correspondientes son proporcionales, por lo que:

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

hipotenusa del triángulo grande *ABC* / hipotenusa del triángulo pequeño *AHB* = cateto menor del triángulo grande *ABC* / cateto menor del triángulo pequeño *AHB*

$$\frac{a}{c}=\frac{c}{d},$$

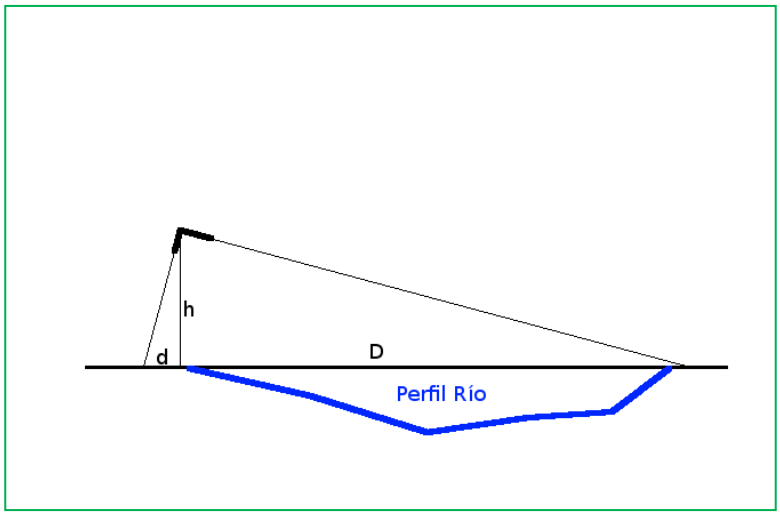
o lo que es lo mismo:

$$c^2 = a \cdot d.$$

Actividades resueltas

- *Nos han encargado medir el ancho de un río en varios puntos del curso. En la mayoría de los puntos hemos podido medirlo con una cuerda, pero hay un ensanche en el que no podemos medirlo así. Vamos a inventar un método que aplica el teorema de la altura que nos permita medirlo.*

Vamos a una tienda y compramos dos punteros láser. A continuación los unimos formando un ángulo de 90º. Después vamos a la parte del río que queremos medir y enfocamos uno de ellos hacia la otra orilla hasta que veamos el puntero. Ahora buscamos el puntero del otro láser que habíamos colocado a 90º y marcamos sobre el suelo.



Después de medir la altura a la que sostenemos los punteros y la distancia de la base hasta el segundo puntero, tenemos los siguientes datos:

d = 5 cm y h = 150 cm.

Aplicando el teorema de la altura, sabemos que:

$h^2 = d \cdot D$, así que $D = h^2/d$.

Por tanto $D = 150^2/5 = 4500$ cm = 45 metros.

Actividades propuestas

20. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 y 4 cm, ¿cuánto mide la altura sobre la hipotenusa?

21. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 y 4 cm, ¿cuánto mide la proyección sobre la hipotenusa de cada uno de esos catetos?

22. Dibuja los tres triángulos semejantes para el triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 en posición de Tales.

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

3.3. Aplicación informática para la comprensión de la semejanza

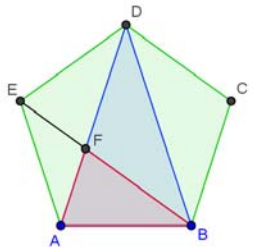
La semejanza en un pentágono regular

En esta actividad se va a utilizar el programa *Geogebra* para realizar un estudio de la semejanza de diferentes triángulos que podemos dibujar en un pentágono regular calculando de forma aproximada su razón de semejanza. También se comprueba la relación que existe entre la razón entre las áreas de dos figuras semejantes y su razón de semejanza.

Actividades resueltas

- *Cálculo de la razón de semejanza*

Abre una ventana de *Geogebra,* en el menú **Visualiza** desactiva **Ejes** y **Cuadrícula** y en el menú **Opciones** elige en **Rotulado** la opción **Solo los nuevos puntos**.

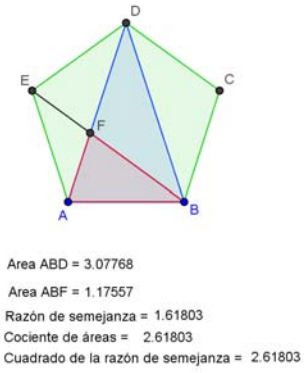


- Determina con **Nuevo punto** los puntos *A* y *B* y dibuja con **polígono regular** el pentágono que tiene como vértices los puntos *A* y *B*.
- Dibuja con **Polígono** el triángulo *ABD,* utiliza **Segmento** para dibujar la diagonal *BE* y define el punto *F* como punto de **intersección de dos objetos** (las diagonales *AD* y *BE*), determina con **polígono** el triángulo *ABF*. Es conveniente cambiar el color de cada uno de los polígonos dibujados para reconocerlos en la ventana algebraica, para esto utiliza la opción **Propiedades** del menú contextual al situar el curso sobre el polígono o sobre su nombre en la ventana algebraica
- Los triángulos *ABD* y *ABF* son semejantes. ¿Sabes demostrar por qué?

Recuerda que es suficiente demostrar que tienen dos ángulos iguales y como los ángulos interiores de un pentágono regular miden 108º, es evidente que en el triángulo isósceles *ABD* el ángulo desigual mide 36º y los ángulos iguales 72º. En el triángulo *ABF*, el ángulo *ABF* mide 36º y el *BAF,* 72º por lo tanto los triángulos son semejantes y además el ángulo *BFA* también mide 72º.

- Utiliza la herramienta de *Geogebra* que permite medir ángulos para comprobar estos resultados.
- Para hallar la razón de semejanza calculamos el cociente entre dos lados correspondientes de estos triángulos, por ejemplo, *BD* y *AD*, es decir entre una diagonal y un lado del pentágono. Para hacerlo con Geogebra definimos en la línea de entrada la variable **razóndesemejanza = f/a** (*f* es una diagonal y *a* un lado), observamos en la ventana algebraica que este valor es 1,62, si aumentamos el número de decimales en **Redondeo** del menú **Opciones** comprobamos que este valor es una aproximación del número de oro.

- *La razón de semejanza y el cociente entre las áreas.*



- Define en la línea de entrada la variable **cocientedeáreas =polígono2/polígono3**, siendo el polígono2 el triángulo *ABD* y el polígono3 el *ABF*
- Define, también, en la línea de entrada la variable **cuadradorazóndesemejanza = razóndesemejanza^2.** Observa como el cuadrado de la razón de semejanza coincide con el cociente entre las áreas. Aumenta el número de decimales para comprobar que estos valores coinciden.
- Utiliza la herramienta **Área** para que aparezca en la pantalla gráfica

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

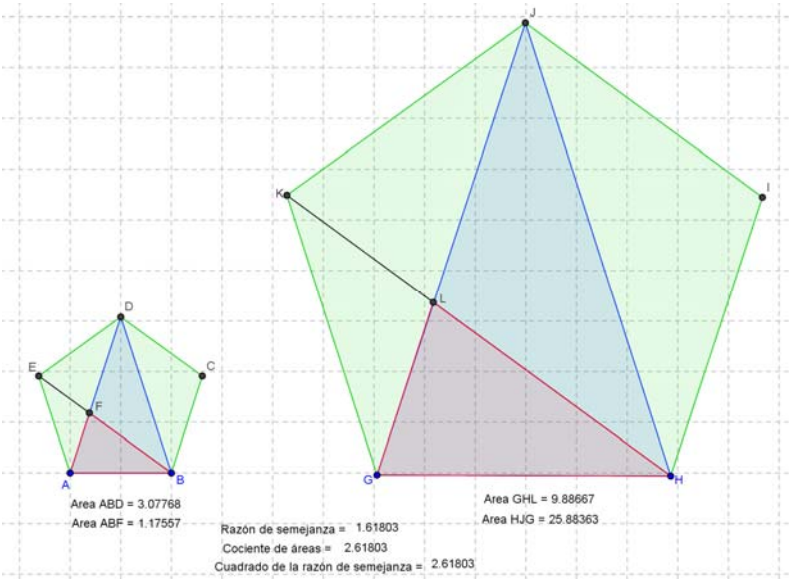
el área de los triángulos *ABD* y *ABF*, e **Insertar texto** para que aparezcan los valores de la razón de semejanza, el cociente entre las áreas y el cuadrado de la razón de semejanza.

Actividades propuestas

Comprueba estos resultados en otro pentágono

24. Dibuja un pentágono *GHIJK* del mismo modo que has construido el *ABCDE* con la condición de que la longitud de sus lados sea el triple del que ya está construido. Para facilitar la tarea puedes activar la **cuadrícula** y mover los puntos iniciales.

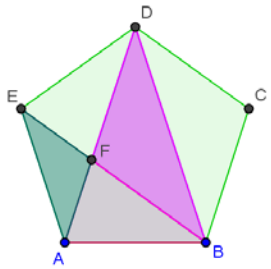
a) Calcula las áreas de los triángulos *HJG* y *GHL*, su razón de semejanza, el cociente entre sus áreas y el cuadrado de la razón de semejanza.

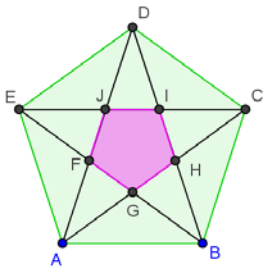


b) Comprueba que la razón de semejanza, el cociente entre las áreas y el cuadrado de la razón de semejanza de los triángulos *GHJ* y *GHL* del pentágono *GHIJK* coinciden con las de los triángulos *ABD* y *ABF* del pentágono *ABCDE.*

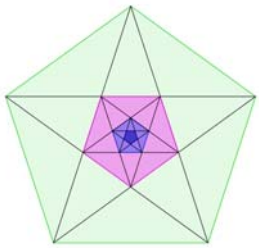
25. Calcula las áreas de los dos pentágonos y relaciona su cociente con el cuadrado de la razón de semejanza.

26. *Otros triángulos del pentágono.* Investiga si los triángulos *AFE* y *BDF* son semejantes y si lo son calcula su razón de semejanza, el cociente entre sus áreas y compara este resultado con el cuadrado de la razón de semejanza.





27. *Pentágono dentro de un pentágono.* Dibuja el pentágono *FGHIJ* que se forma en el pentágono *ABCDE* al trazar sus diagonales ambos son semejantes porque son polígonos regulares. Calcula la razón de semejanza y el cociente entre sus áreas. Observa los triángulos AGF y ABD ¿son semejantes?



28. Observa los pentágonos regulares de la figura: a) ¿Son todos semejantes? b) Te parece que el proceso de dibujar pentágonos dentro de pentágonos es infinito ¿Por qué? c) ¿Cuál es la sucesión de las razones de semejanza entre el pentágono mayor y cada uno de los siguientes?

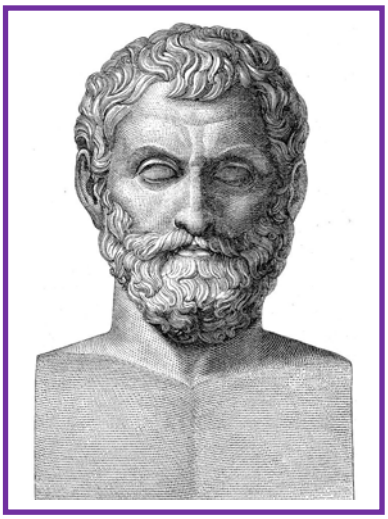
Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

CURIOSIDADES. REVISTA

Tales de Mileto (ca. 624 – 548 a.C.)

Sobre la vida de Tales se sabe muy poco. Los antiguos opinaban que era excepcionalmente inteligente siendo considerado uno de los Siete Sabios de Grecia, y que había viajado y conocido los saberes de Egipto y Babilonia.

Pero no existe ningún documento que certifique nada sobre su vida, y es probable que no dejara obra escrita a su muerte. Eudemo de Rodas escribió una historia de las Matemáticas, que se perdió, pero alguien hizo un resumen de una parte, que también se perdió, y en el siglo V d.C. Proclo incluyó parte de dicho resumen en un comentario sobre los elementos de Euclides. ¡Eso es lo que sabemos sobre Tales y la Matemática!



Hay muchas leyendas sobre su vida como que:

- Se hizo rico alquilando unas almazaras durante un año en que la cosecha de aceituna fue abundante
- Fue mercader de sal
- Fue observador de las estrellas. Un día, por mirar las estrellas se cayó a un pozo, y cuando se reían de ello dijo que quería conocer las cosas del cielo, pero que lo que estaba a sus pies se le escapaba.
- Fue un hombre de estado
- Dirigió una escuela de náutica

Sobre matemáticas se le atribuyen diversos teoremas, aunque algunos ya eran conocidos por los babilonios, pero quizás él utilizó un razonamiento deductivo. Por ejemplo, se dice que demostró:

- Un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto
- Un diámetro divide a un círculo en dos partes iguales
- Un triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales
- Dos triángulos con dos ángulos iguales y un lado igual, son iguales
- Los ángulos opuesto por el vértice son iguales

¿A qué todos estos teoremas ya te los sabías tú?

Además de decirse de él que:

- predijo un eclipse,
- construyó un canal para desviar las aguas de un río para que lo cruzara un ejército

y también se dice que utilizó la semejanza de triángulos para

- calcular la altura de la pirámide de Keops,
- la distancia de un barco a la playa

¿Sabrías tu resolver esos dos últimos problemas?

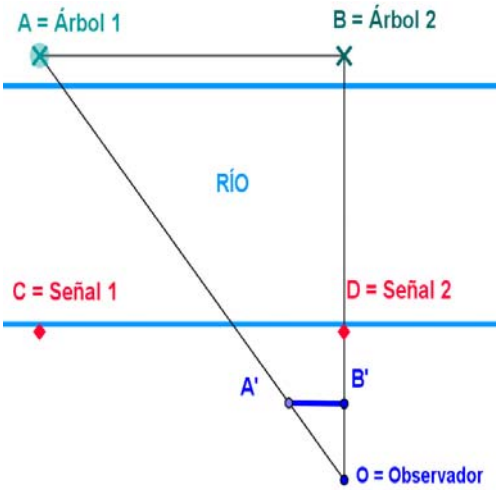
Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

Algunos problemas

- Calcula la altura de la Pirámide de Keops sabiendo que su sombra mide 175,93 metros y que al mismo tiempo la sombra de un bastón de altura un metro, mide 1,2 metros.

- Calcula la altura de un árbol sabiendo que su sombra mide 15 metros y que al mismo tiempo la sombra de un palo de altura un metro, mide 1,5 metros.

- Unos exploradores encuentran un río y quieren construir una pasarela para cruzarlo, pero, ¿cómo conocer la anchura del río, si no podemos ir a la otra orilla? ¡Piensa! ¡Piensa! Seguro que se te ocurren muchas buenas ideas, mejores que la que te vamos a comentar a continuación.
- Buscas en la orilla opuesta dos árboles, (o dos rocas, o …), *A* y *B*. Colocándote en tu orilla perpendicular a ellos, marcas dos señales, (Señal 1 y Señal 2), y mides así la distancia entre esos dos árboles. Ahora midiendo ángulos dibujas dos triángulos semejantes. Uno, en tu orilla, lo puedes medir, y por semejanza de triángulos calculas los lados del otro.



Imagina que la distancia *CD* es de 10 metros, que *A'B'* mide 2 metros y que *OB'* = 2,5 m. ¿Cuánto mide *OB*? Si *OD* mide 5 metros, ¿cuánto mide la anchura de río?

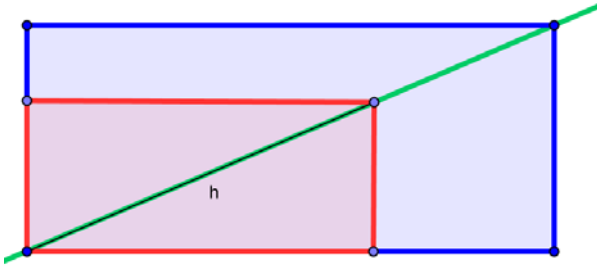
¡Piensa! ¡Piensa!

¿Cómo podrías conocer a qué distancia de la costa está un barco?

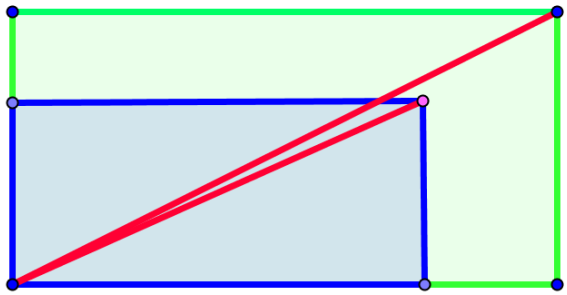
Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

Rectángulos semejantes

Para saber si dos rectángulos son semejantes se colocan uno sobre el otro, con dos lados comunes, y si tienen la misma diagonal, son semejantes



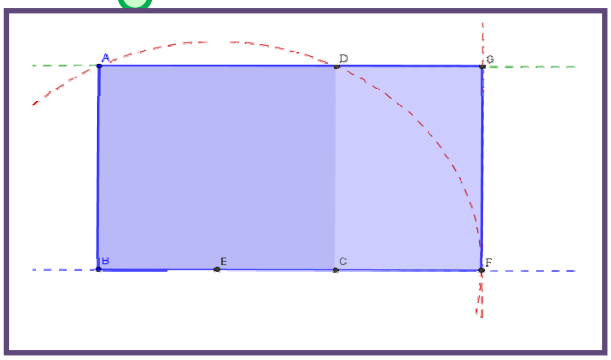
Rectángulos semejantes



No son semejantes

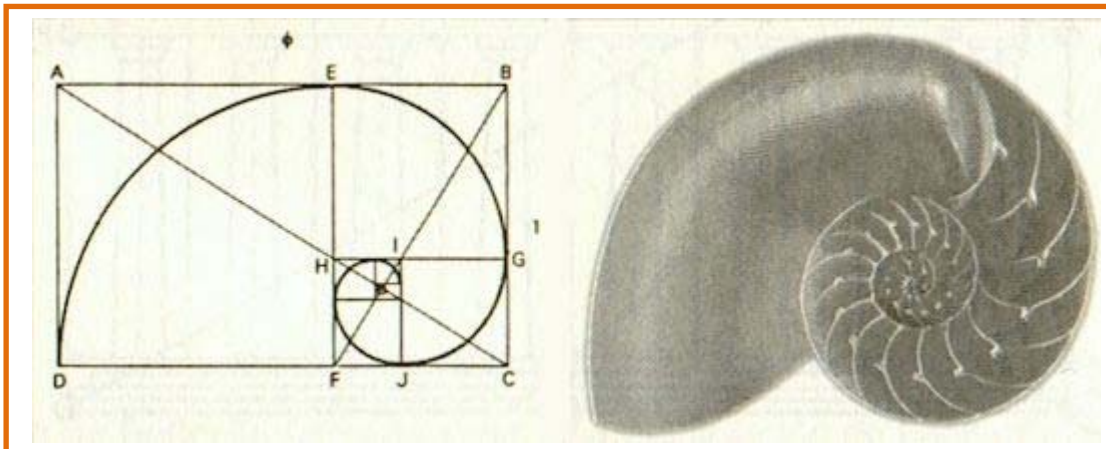
Rectángulo áureo

Un rectángulo es áureo si sus lados están en proporción áurea. Todos los rectángulos áureos son semejantes.



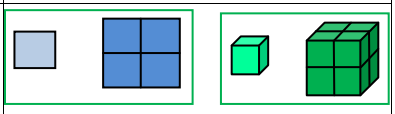
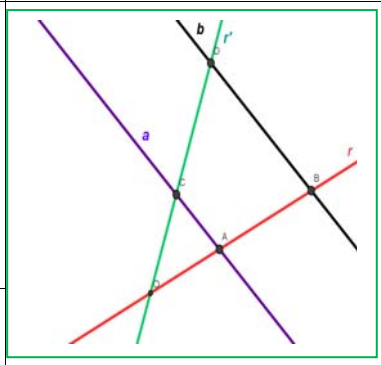
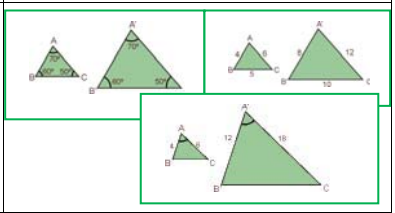
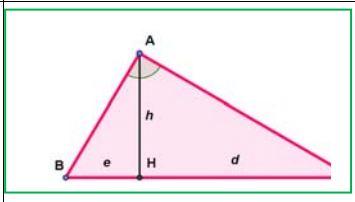
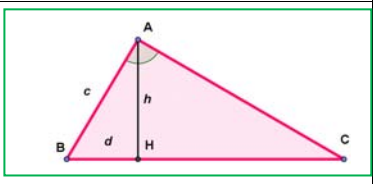
Si a un rectángulo áureo se le quita (o añade) un cuadrado, se obtiene un rectángulo semejante al de partida y por lo tanto también áureo.

Puedes construir una espiral con rectángulos áureos cómo indica la figura



Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

RESUMEN

		Ejemplos
Figuras semejantes	Si las longitudes de elementos correspondientes son proporcionales.	
Razón de semejanza	Coeficiente de proporcionalidad	
Semejanza en longitudes, áreas y volúmenes	Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es ***k***, entonces la razón entre sus áreas es $\boldsymbol{k^2}$ y entre sus volúmenes es $\boldsymbol{k^3}$.	
Teorema de Tales	Dadas dos rectas, *r* y *r'*, que se cortan en el punto *O*, y dos rectas paralelas entre sí, *a* y *b*. La recta *a* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *A* y *C*, y la recta *b* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *B* y *D*. Entonces: $$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$$	
Recíproco del teorema de Tales	Si $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$ entonces ***a*** y ***b*** son paralelas.	
Semejanza de triángulos	Dos triángulos son **semejantes** tienen todos los ángulos iguales y los lados proporcionales.	
Criterios de semejanza de triángulos	Dos triángulos son semejantes sí: **Primero:** Tienen dos ángulos iguales. **Segundo:** Tienen los tres lados proporcionales. **Tercero:** Tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman es igual.	
Teorema de la altura	En un triángulo rectángulo la altura es media proporcional de los segmentos en los que divide a la hipotenusa: $\frac{h}{e}=\frac{d}{h}$.	
Teorema del cateto	En un triángulo rectángulo un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella: $\frac{a}{c}=\frac{c}{d}$.	

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Figuras semejantes

1. Busca fotografías, planos, fotocopias, figuras a escala, etc. toma medidas y determina las razones de semejanza. Calcula las medidas reales y comprueba que la razón de semejanza obtenida es correcta.
2. En un mapa de carretera de escala 1:3000 la distancia entre dos ciudades es de 2,7 cm. Calcula la distancia real entre dichas ciudades.
3. Un microscopio tiene un aumento de 500X, ¿qué tamaño tiene la imagen que se ve por el objetivo si observamos un paramecio de 0,034 mm de diámetro?
4. Pericles murió de peste en el año 429 a. C. Consultado el oráculo de Apolo debían construir un altar en forma de cubo cuyo volumen duplicara exactamente el que ya existía. ¿Cuál debía ser la razón de proporcionalidad de los lados? ¿Es posible construir exactamente un cubo con dicha razón?
5. En una fotografía una persona que sabe que mide 1,75 m tiene una altura de 2,3 cm. Aparece un árbol que en la fotografía mide 5,7 cm, ¿cuánto mide en la realidad?
6. ¿Cuánto mide el lado de un icosaedro cuya superficie es el triple del de otro icosaedro de lado 4 cm?
7. Suponemos que un melocotón es una esfera, y que su hueso tiene un diámetro que es un tercio del del melocotón. ¿Cuánto es mayor la pulpa del melocotón que su hueso?
8. ¿Son semejantes todos los cuadrados? ¿Y todos los rombos? ¿Y todos los rectángulos? ¿Cuándo son semejantes dos rombos? ¿Y dos rectángulos?
9. El área de un rectángulo es 10 cm^2, y uno de sus lados mide 2 cm, ¿qué área tiene un rectángulo semejante al anterior en el que el lado correspondiente mide 1 cm? ¿Qué perímetro tiene?
10. ¿Son semejantes todas las esferas? ¿Y los icosaedros? ¿Y los cubos? ¿Y los dodecaedros? ¿Cuándo son semejantes dos cilindros?
11. La arista de un octaedro mide 7,3 cm, y la de otro 2,8 cm, ¿Qué relación de proporcionalidad hay entre sus superficies? ¿Y entre sus volúmenes?
12. La medida normalizada A$ tiene la propiedad de que partimos el rectángulo por la mitad de su parte más larga, el rectángulo que se obtiene es semejante al primero. Duplicando, o dividiendo se obtienen las dimensiones de los rectángulo A1, A2, A3, A4, A5…. El rectángulo A4 mide 29,7 cm x 21 cm. Determina las medidas de A3 y de A5.
13. Dibuja un pentágono regular y traza sus diagonales. Tienes un nuevo pentágono regular. ¿Cuál es la razón de semejanza?
14. Dibuja en tu cuaderno un pentágono regular y traza sus diagonales. ¿Cuánto miden los ángulos del triángulo formado por un lado del pentágono y las dos diagonales del vértice opuesto? Este triángulo se denomina *triángulo áureo*, pues al dividir el lado mayor entre el menor se obtiene el número de oro. En la figura que has trazado hay otros triángulos semejantes al áureo, ¿qué relación de proporcionalidad hay entre ellos?
15. El mapa a escala 1:1500000 de una región tiene un área de 1600 cm^2, ¿cuánto mide la superficie verdadera de dicha región?

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz

16. Eratostenes de Alejandría (276 – 196 a. C.) observó que en Siena la dirección de los rayos solares era perpendicular a la superficie de la Tierra en el solsticio de verano. Viajó siguiendo el curso del Nilo una distancia de 790 km (5 mil estadios) y midió la inclinación de los rayos del sol en el solsticio de verano en Alejandría que era de α = 7º 12'. Utilizó la proporcionalidad: $2\pi R/790 = 360º/\alpha$ para determinar el radio de la Tierra. ¿Qué obtuvo?

17. Tenemos un conjunto de rectángulos de lados: A: 4 y 7, B: 2 y 5, C: 8 y 14, D: 4 y 10, E: 3 y 7, F: 9 y 21. Indica cuáles son semejantes. Dibuja y recorta el rectángulo A, y dibuja el resto de rectángulos. Superpón el rectángulo A con los otros rectángulos y explica que observas con el que es semejante. ¿Qué longitud tiene el otro lado de un rectángulo semejante a A cuyo lado menor mida 10 cm?

El teorema de Tales

18. Divide un segmento cualquiera en 5 partes iguales utilizando el teorema de Tales. Sabrías hacerlo por otro procedimiento exacto?

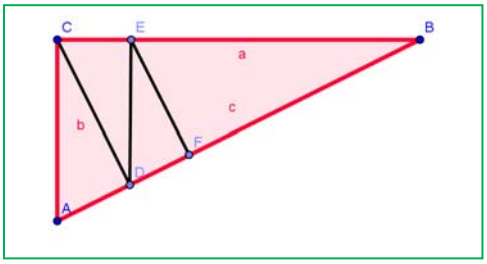
19. Divide un segmento cualquiera en 3 partes proporcionales a 2, 3, 5 utilizando el teorema de Tales.

20. Si alguien mide 1'75 m y su sombra mide 1 m, calcula la altura del edificio cuya sombra mide 25 m a la misma hora.

21. Un rectángulo tiene una diagonal de 75 m. Calcula sus dimensiones sabiendo que es semejante a otro rectángulo de lados 36 m y 48 m.

22. Sean *OAC* y *OBD* dos triángulos en posición Tales. El perímetro de *OBD* es 200 cm, y *OA* mide 2 cm, *AC* mide 8 cm y *OC* mide 10 cm. Determina las longitudes de los lados de *OBD.*

23. En el museo de Bagdad se conserva una tablilla en la que aparece dibujado un triángulo rectángulo *ABC*, de lados a = 60, b = 45 y c= 75, subdividido en 4 triángulos rectángulos menores *ACD*, *CDE*, *DEF* y *EFB*, y el escriba ha calculado la longitud del lado *AD*. Utiliza el teorema de Tales para determinar las longitudes de los segmentos *AD*, *CD*, *DE*, *DF*, *EB*, *BF* y *EF*. Calcula el área del triángulo *ABC* y de los triángulos *ACD*, *CDE*, *DEF* y *EFB*.



Semejanza de triángulos

24. El triángulo rectángulo *ABC* tiene un ángulo de 54º y otro triángulo rectángulo tiene un ángulo de 36º. ¿Podemos asegurar que son semejantes? Razona la respuesta.

25. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 25 cm y la altura sobre la hipotenusa mide 10 cm, ¿cuánto miden los catetos?

26. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:

a) Un ángulo de 50º y otro de 40º. Un ángulo de 90º y otro de 40º.

b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 40º. Triángulo isósceles con un ángulo igual de 70º.

c) A = 72º, b = 10 cm, c = 12 cm. A'= 72º, b' = 5 cm, c' = 6 cm.

d) a = 7 cm, b = 5 cm, c = 8 cm. a' = 21 cm, b' = 15 cm, c' = 24 cm.

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz
Textos Marea Verde

27. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:

a) a = 12 cm, b = 9 cm, c = 15 cm. a' = 8 cm, ¿b', c'?

b) A = 45º, b = 6 cm, c = 4 cm. A' = 45º, b' = 24 cm, ¿a'?

28. Las longitudes de los lados de un triángulo son 7 cm, 9 cm y 10 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 65 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

29. La sombra de un edificio mide 23 m, y la del primer piso 3 m. Sabemos que la altura de ese primer piso es de 2,7 m, ¿cuánto mide el edificio?

30. Demuestra que en dos triángulos semejantes las bisectrices son proporcionales.

31. Un triángulo rectángulo isósceles tiene la hipotenusa de longitud 9 cm, igual a un cateto de otro triángulo semejante al primero. ¿Cuánto valen las áreas de ambos triángulos?

32. Uniendo los puntos medios de los lados de un triángulo se obtiene otro triángulo. ¿Son semejantes? ¿Qué relación hay entre sus perímetros? ¿Y entre sus áreas?

33. La altura y la base de un triángulo isósceles miden respectivamente 7 y 5 cm; y es semejante a otro de base 12 cm. Calcula la altura del nuevo triángulo y las áreas de ambos.

34. Los triángulos siguientes son semejantes. Averigua la medida de los ángulos que faltan sabiendo que:

a) Son rectángulos y un ángulo del primer triángulo mide 52º.

b) Dos ángulos del primer triángulo miden 30º y 84º.

35. Los triángulos siguientes son semejantes. Averigua las medidas que faltan sabiendo que:

a) Los lados del primer triángulo miden 10 m, 15 m y z m. Los del segundo: x m, 9 m y 8 m.
b) Los lados del primer triángulo miden 4 m, 6 m y 8 m. Los del segundo: 6 m, x m y z m.
c) Un lado del primer triángulo mide 12 cm y la altura sobre dicho lado 6 cm. El lado correspondiente del segundo mide 9 cm, y la altura x cm
d) Un triángulo isósceles tiene el ángulo desigual de 35º y el lado igual de 20 cm y el desigual de 7 cm; el otro tiene el lado igual de 5 cm. ¿Cuánto miden sus otros lados y ángulos?

36. Enuncia el primer criterio de semejanza de triángulos para triángulos rectángulos.

37. Los egipcios usaban una cuera con nudos, todos a la misma distancia, para obtener ángulos rectos. Formaban triángulos de longitud 3, 4 y 5. ¿Por qué? Los indios y los chinos usaban un procedimiento similar aunque utilizando cuerdas con los nudos separados en 5, 12 y 13, y también 8, 15 y 17. ¿Por qué? Escribe las longitudes de los lados de triángulos semejantes a los indicados.

38. Se quiere calcular la altura de un árbol para lo que se mide su sombra: 13 m, y la sombra de un palo de 1'2 m de longitud, 0,9 m. ¿Qué altura tiene el árbol?

39. Ahora no podemos usar el procedimiento de la sombra porque el árbol es inaccesible (hay un rio en medio) pero sabemos que está a 30 m de nosotros. ¿Cómo lo harías? Pepe ha cogido un lápiz que mide 10 cm y lo ha colocado a 50 cm de distancia. De ese modo ha conseguido ver alineado la base del árbol con un extremo del lápiz, y la punta del árbol con el otro. ¿Cuánto mide este árbol?

40. Arquímedes calculaba la distancia a la que estaba un barco de la costa. Con una escuadra ABC alineaba los vértices BC con el barco, C', y conocía la altura del acantilado hasta el vértice B. Dibuja la situación, determina qué triángulos son semejantes. Calcula la distancia del barco si BB' = 50 m, BA = 10 cm, AC = 7 cm.

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz
Textos Marea Verde

AUTOEVALUACIÓN

1. En un mapa de carretera de escala 1:1200 la distancia entre dos pueblos es de 5 cm. La distancia real entre dichos pueblos es de:

a) 60 m b) 60 km c) 240 km d) 240 cm

2. Si un microscopio tiene un aumento de 1000X, ¿qué tamaño (aparente) piensas que tendrá la imagen que se vea por el objetivo si observamos una célula de 0,01 mm de diámetro

a) 1 cm b) 1 mm c) 0,1 cm d) 100 mm

3. Queremos construir un cuadrado de área doble de uno de un metro de lado. El lado del nuevo cuadrado debe medir:

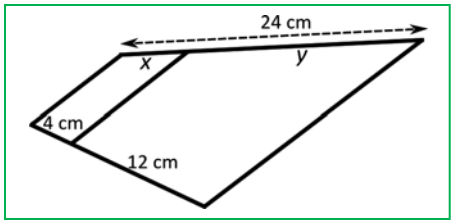
a) 2 metros b) $\sqrt{2}$ metros c) $\sqrt[3]{2}$ metros d) 1,7 metros

4. Sean *OAC* y *OBD* dos triángulos en posición *Tales*. El perímetro de *OBD* es 50 cm, y *OA* mide 1 cm, *AC* mide 1,5 cm y OC mide 2,5 cm. Las longitudes de los lados de *OBD* son:

a) *OB* = 10 cm, *OD* = 20 cm, *BD* = 30 cm b) *OB* = 25 cm, *OD* = 10 cm, *BD* = 15 cm

c) *OB* = 10 cm, *OD* = 15 cm, *BD* = 25 cm d) *OB* = 15 cm, *OD* = 25 cm, *BD* = 30 cm.

5. En la figura adjunta los valores de *x* e *y* son:



a) 6 y 12 cm b) 5 y 19 cm c) 6 y 18 cm d) 5 y 20 cm

6. Los triángulos *ABC* y *DEF* son semejantes. Los lados de *ABC* miden 3, 5 y 7 cm, y el perímetro de *DEF* mide 60 m. Los lados de *DEF* miden:

a) 6, 10 y 14 cm b) 12, 20 y 28 cm c) 9, 15 21 m d) 12, 20 y 28 m

7. Dos triángulos rectángulos son proporcionales si:

a) Tienen los catetos proporcionales

b) Tienen un ángulo igual

c) Tienen un ángulo distinto del recto igual

d) Sus áreas son proporcionales

8. Los triángulos *ABC* y *DEF* son semejantes. El ángulo A mide 30º, y B, 72º. ¿Cuánto miden los ángulos *D*, *E* y *F*?

a) *D* = 72º, *E* = 78º y *F* = 30º b) *D* = 30º, *E* = 88º y *F* = 72º c) *D* = 30º, *E* = 72º y *F* = 68º

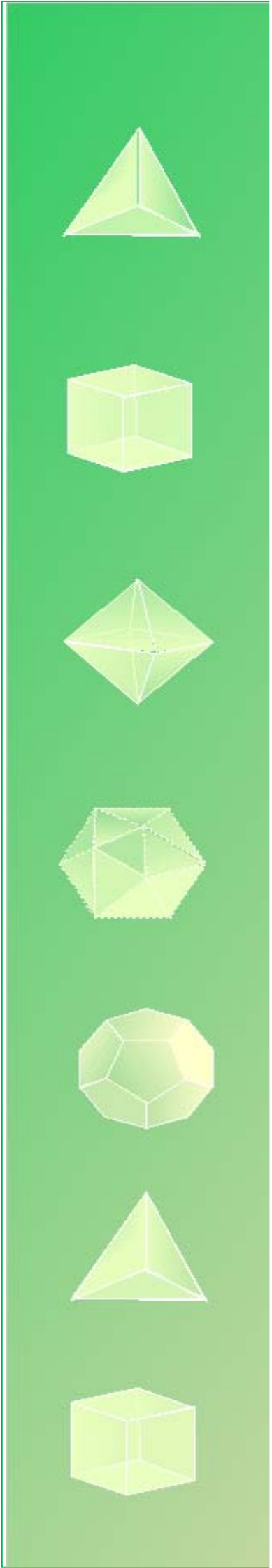
9. La altura de un triángulo rectángulo divide a la hipotenusa en dos segmentos de longitud 5 y 4 cm, ¿cuánto mide la altura?

a) 5,67 cm b) 4 cm c) 6 cm d) 5 cm

10. La proyección de un cateto sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 4 cm, y la hipotenusa 9 cm, ¿cuánto mide el cateto?

a) 7 cm b) 5 cm c) 5,67 cm d) 6 cm.

Autor: Jorge Muñoz
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y Jorge Muñoz
Textos Marea Verde



Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas:

4ºB ESO
Capítulo 8:
TRIGONOMETRÍA

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-052238

Fecha y hora de registro: 2014-09-07 17:23:48.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autoras: Mª Fernanda Ramos Rodríguez y

Mª Milagros Latasa Asso

Revisora: Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF,

Mª Milagros Latasa y Fernanda Ramos

Índice

1. SISTEMAS DE MEDIDA DE ÁNGULOS

1.1. SISTEMA SEXAGESIMAL

1.2. SISTEMA INTERNACIONAL

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

2.1. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DIRECTAS DE UN ÁNGULO AGUDO

2.2. RELACIONES FUNDAMENTALES.

2.3. OTRAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS. OTRAS RELACIONES

2.4. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 30°, 45° Y 60°.

2.5. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

2.6. APLICACIONES DE LA RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS AL CÁLCULO DE DISTANCIAS.

3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

3.1. CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA. CUADRANTES.

3.2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

3.3. REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE.

4. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA

4.1. TEOREMA DE LOS SENOS.

4.2. TEOREMA DE LOS COSENOS.

4.3. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA.

Resumen

Etimológicamente *trigonometría* significa *medición de triángulos*. Su objetivo es establecer las relaciones matemáticas entre las medidas de los lados de un triángulo con las amplitudes de sus ángulos, de manera que resulte posible calcular las unas mediante las otras.

Los primeros escritos relacionados con ella que aparecen en la historia se remontan a la época babilónica de la que se conservan unas tablillas con mediciones de lados y ángulos de triángulos rectángulos. La trigonometría se aplica desde sus orígenes en agrimensura, navegación y astronomía ya que permite calcular distancias que es imposible obtener por medición directa.

En este capítulo estudiarás las primeras definiciones trigonométricas y conocerás algunas de sus aplicaciones.

Inscripción babilónica. Museo Pérgamo de Berlín

1. SISTEMAS DE MEDIDA DE ÁNGULOS

1.1. Sistema sexagesimal

Recordarás que en el sistema sexagesimal de medida de ángulos, la unidad es el **grado sexagesimal** que se define como la trescientos sesenteava parte de un ángulo completo. Tiene dos divisores que son el **minuto** que es la sesenteava parte de un grado y el **segundo** que es la sesenteava parte de un minuto. Recuerda la notación que se emplea en este sistema:

1° = 1 grado sexagesimal; 1´ = 1 minuto sexagesimal; 1´´ = 1 segundo sexagesimal.

Como consecuencia de la definición:

1 ángulo completo = 360°; 1° = 60´; 1´ = 60´´.

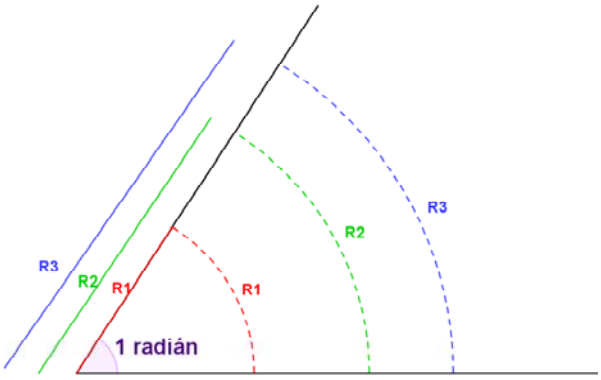
1.2. Sistema internacional

En el sistema internacional, la unidad de medida de ángulos es el **radián.**

El **radián** es un ángulo tal que cualquier arco que se le asocie mide exactamente lo mismo que el radio utilizado para trazarlo.

Se denota por **rad.**

A un ángulo completo le corresponde un arco de longitud $2\pi R$, a un radián un arco de longitud R, entonces:



Nº de radianes de un ángulo completo = $\dfrac{2\pi R}{R} = 2\pi$ **rad**

Y la relación con el sistema sexagesimal la obtenemos a partir del ángulo completo:

1 ángulo completo = 360° = 2π rad $\Leftrightarrow$ 1 ángulo llano = 180° = π rad

Por esta relación se obtiene que 1 rad $\cong$ 57, $216^{o} \cong 57^{o}\ 12'\ 58''$.

Actividades propuestas

1. Expresa en radianes las siguientes medidas: 45°, 150°, 210°, 315°.

2. Expresa en grados sexagesimales: $\dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{5}$ y $\dfrac{3\pi}{8}$ radianes.

3. Dos ángulos de un triángulo miden respectivamente 40° y $\dfrac{\pi}{3}$ radianes. Calcula en radianes lo que mide el tercer ángulo.

4. Un ángulo de un triángulo isósceles mide $\dfrac{5\pi}{6}$ radianes. Calcula en radianes la medida de los otros dos.

5. Dibuja un triángulo rectángulo isósceles y expresa en radianes la medida de cada uno de sus ángulos.

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

2.1. Razones trigonométricas directas de un ángulo agudo

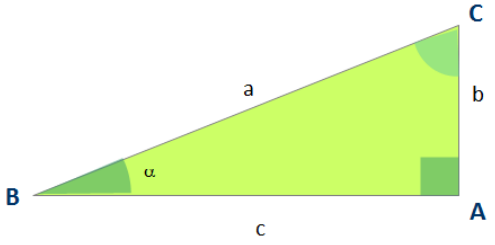
Empecemos por considerar un ángulo agudo cualquiera, utilizaremos una letra griega α (alfa) para denotarlo. Es siempre posible construir un triángulo rectángulo de modo que α sea uno de sus ángulos. Sea $\overset{\Delta}{ABC}$ uno de estos triángulos y situemos en el vértice *B*, el ángulo α.

Se definen las razones trigonométricas directas del ángulo α: seno, coseno y tangente como:

$$seno\ \ de\ \ \alpha = sen\,\alpha = sen\,\hat{B} = \frac{cateto\ \ opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

$$\cos eno\ \ de\ \ \alpha = \cos\alpha = \cos\hat{B} = \frac{cateto\ \ adyacente}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

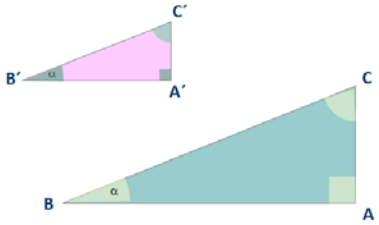
$$tangente\,de\ \alpha = tan\alpha = tan\hat{B} = \frac{cateto\ \ opuesto}{cateto\ \ adyacente} = \frac{b}{c}$$



A menudo se nombran los ángulos de un triángulo con la misma letra mayúscula que el vértice correspondiente.

También se utilizan las expresiones tg α y tag α como símbolos de la tangente de α.

Esta definición no depende del triángulo elegido. Vamos a demostrarlo. Para ello consideremos otro triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ con α en el vértice *B´*.



Según el segundo criterio de semejanza de triángulos $\overset{\Delta}{ABC}$ y $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ son semejantes porque tienen dos ángulos iguales 90º y α. Por lo tanto los lados de ambos son proporcionales:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \Rightarrow & \text{el seno es independiente del triángulo en que se mide} \\ \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} \Rightarrow & \text{el coseno es independiente del triángulo en que se mide} \\ \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \Rightarrow & \text{la tangente es independiente del triángulo en que se mide} \end{cases}$$

Actividades resueltas

- *Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo* $\overset{\Delta}{ABC}$ *cuyos catetos miden b = 30 cm y c = 40 cm.*

Calculamos en primer lugar el valor de la hipotenusa $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 30^2 + 40^2 = 900 + 1600 = 2500 \Rightarrow$ $a = \sqrt{2500} = 50$cm.

$$sen\,\hat{B} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0,6\,;\ \cos\hat{B} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0,8\,;\ tg\,\hat{B} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} = 0,75\,.$$

$$sen\,\hat{C} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0,8\,;\ \cos\hat{C} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0,6\,;\ tg\,\hat{C} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}\,.$$

2.2. Relaciones fundamentales

Si conocemos una de las razones trigonométricas del ángulo α, es posible calcular las razones trigonométricas restantes, gracias a las dos relaciones trigonométricas fundamentales siguientes:

PRIMERA RELACIÓN FUNDAMENTAL:

$$(sen\ \alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

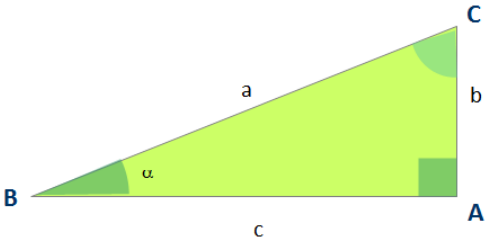
que también verás escrita como $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$ dado que las potencias de las razones trigonométricas suelen escribirse con su exponente sobre la ultima letra de su notación y a continuación el nombre del ángulo

La demostración es sencilla. Volvamos al triángulo inicial del párrafo anterior:

Por el teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$

Dividamos a ambos miembros entre a^2:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{a^2}{a^2} = \dfrac{b^2}{a^2} + \dfrac{c^2}{a^2} \\ sen\ \alpha = \dfrac{b}{a} \\ cos\ \alpha = \dfrac{c}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow 1 = (sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2$$



SEGUNDA RELACIÓN FUNDAMENTAL:

$$\tan\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$$

En el mismo triángulo anterior:

$$\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{b}{a} : \frac{c}{a} = \frac{b}{c}\,\frac{a}{a} = \frac{b}{c} = tan\,\alpha\,.$$

Actividades resueltas

- *Sabiendo que α es un ángulo agudo, calcula las restantes razones trigonométricas de α en los casos siguientes: a) $sen\alpha = \frac{1}{5}$ b) $\tan\alpha = 3$*

a) $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{25} + cos^2\ \alpha = 1 \Rightarrow cos^2\ \alpha = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25} \Rightarrow cos\,\alpha = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$$tan\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{1}{5} : \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{5}{10\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \\ tan\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \\ sen\,\alpha = 3\,cos\,\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow (3\,cos\,\alpha)^2 + cos^2\,\alpha = 1 \Rightarrow 10\,cos^2\,\alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow cos^2\,\alpha = \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad cos\,\alpha = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$sen\,\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

2.3. Otras razones trigonométricas. Otras relaciones

Otras razones trigonométricas de un ángulo α son la cosecante, la secante y la cotangente de α y sus notaciones son *cosec* α, *sec* α, *cotan* α.

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha}\,;\; sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha}\,;\; cotan\,\alpha = \frac{1}{tan\,\alpha}.$$

Con su definición, aparecen nuevas identidades trigonométricas, entre las que destacan:

a) $sen\,\alpha\,.\,cosec\,\alpha = 1\,;\; cos\,\alpha\,.\,sec\,\alpha = 1\,;\; tan\,\alpha\,.\,cotan\,\alpha = 1\,.$

b) $sec^2\,\alpha = 1 + tan^2\alpha$

c) $cosec^2\,\alpha = 1 + cotan^2\alpha$

La primera de ellas es evidente por definición. La segunda y la tercera tienen una demostración muy parecida por lo que encontrarás solo una de las dos y la otra como actividad propuesta

Demostración b):

A partir de $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$, dividimos a ambos miembros entre $cos^2\,\alpha$:

$$\frac{sen^2\,\alpha}{cos^2\,\alpha} + \frac{cos^2\,\alpha}{cos^2\,\alpha} = \frac{1}{cos^2\,\alpha} \Rightarrow tan^2\,\alpha + 1 = sec^2\,\alpha\,.$$

Actividades propuestas

6. Sabiendo que $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, calcula las razones trigonométricas secante, cosecante y cotangente de α.

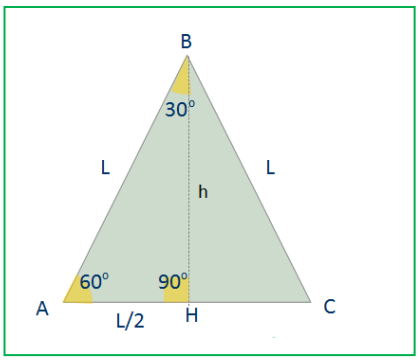
7. Si *cotan* α = 2, calcula las cinco razones trigonométricas del ángulo α.

8. Demuestra que $cosec^2\,\alpha = 1 + cotan^2\alpha$

2.4. Razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 30º Y 60º

Consideramos un triángulo equilátero de lado *L* Trazamos la altura correspondiente al lado sobre el que se apoya. Con ello queda dividido en dos triángulos rectángulos iguales cuyos ángulos miden 90º, 30º y 60º. Además la hipotenusa mide *L* y uno de sus catetos L/2. Por el teorema de Pitágoras podemos obtener el que nos falta:



$$h=\sqrt{L^2-\left(\frac{L}{2}\right)^2}=\sqrt{L^2-\frac{L^2}{4}}=\sqrt{\frac{3L^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}\,L}{2}$$

Calculamos las razones trigonométricas de 30º y 60º en el triángulo $\overset{\Delta}{ABH}$:

$$sen\,60^o=\frac{h}{L}=\frac{\frac{\sqrt{3}\,L}{2}}{L}=\frac{\sqrt{3}\,L}{2\,L}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad sen30^o=\frac{\frac{L}{2}}{L}=\frac{L}{2L}=\frac{1}{2}$$

$$\cos 60^o=\frac{\frac{L}{2}}{L}=\frac{L}{2L}=\frac{1}{2} \qquad \cos 30^o=\frac{h}{L}=\frac{\frac{\sqrt{3}\,L}{2}}{L}=\frac{\sqrt{3}\,L}{2\,L}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

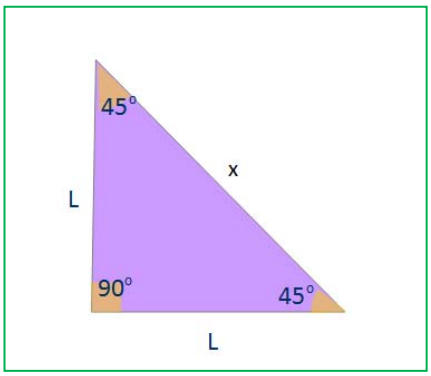
$$tag\,60^o=\frac{h}{\frac{L}{2}}=\frac{2\,h}{L}=\frac{2\sqrt{3}\,L}{2}:L=\frac{2\sqrt{3}\,L}{2\,L}=\sqrt{3} \qquad tag\,30^o=\frac{\frac{L}{2}}{h}=\frac{L}{2}:\frac{\sqrt{3}\,L}{2}=\frac{2\,L}{2\sqrt{3}\,L}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 45º

Ahora vamos a trabajar con un triángulo rectángulo isósceles. Pongamos que los dos catetos tienen una longitud *L*. Utilizamos de nuevo el teorema de Pitágoras y obtenemos el valor de la hipotenusa *x* en función de *L*:

$$x=\sqrt{L^2+L^2}=\sqrt{2L^2}=L\sqrt{2}$$

Ahora podemos calcular ya las razones trigonométricas de 45º



$$sen\,45^o=\frac{L}{x}=\frac{L}{L\sqrt{2}}:=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^o=\frac{L}{x}=\frac{L}{L\sqrt{2}}:=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tag\,45^o=\frac{L}{L}=1$$

	Seno	Coseno	Tangente
30º	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45º	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60º	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$

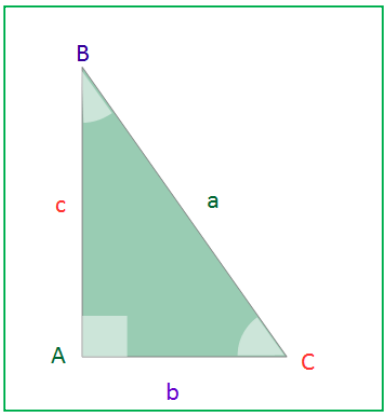
Textos Marea Verde

2.5. Resolución de triángulos rectángulos.

Resolver un triángulo es calcular las amplitudes de los tres ángulos y las longitudes de los tres lados.

En el caso de que el triángulo sea rectángulo podemos considerar tres casos dependiendo de las hipótesis o datos iniciales. En cada uno de ellos existen varias formas de obtener la solución. Vamos a describir una en cada caso:

Primer caso: Se conocen un ángulo $\hat{B}$ y la hipotenusa *a*:



$$\text{Como } \hat{A} = 90^o \quad \hat{C} = 90^o - \hat{B}$$

Ahora a partir de las razones trigonométricas de $\hat{B}$ o $\hat{C}$, obtenemos los lados que nos faltan. También cabe utilizar el teorema de Pitágoras cuando conozcamos uno de los dos catetos.

$$sen\,\hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a\,sen\,\hat{B} \quad \cos\hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a\cos\hat{B}$$

Segundo caso: Se conocen un ángulo $\hat{B}$ y un cateto *b*:

$$\text{Como } \hat{A} = 90^o \quad \hat{C} = 90^o - \hat{B}$$

También en este caso las razones trigonométricas de $\hat{B}$ o $\hat{C}$ sirven para obtener al menos uno de los lados y puede utilizarse el teorema de Pitágoras cuando hallemos el valor de un lado más. Una forma de resolución es:

$$tg\,\hat{B} = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{tg\,\hat{B}} \quad sen\,\hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{sen\,\hat{B}}$$

Tercer caso: Se conocen dos lados:

En este caso utilizaremos en primer lugar el teorema de Pitágoras para calcular el tercer lado, tanto si el que falta es un cateto como si es la hipotenusa. Siguiendo con el triángulo de la figura:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Para obtener el primero de los ángulos agudos, calcularemos en primer lugar una de sus razones trigonométricas, por ejemplo $sen\,\hat{B} = \frac{b}{a}$ y para conocer el valor del ángulo, despejamos escribiendo:

$\hat{B} = arc\,sen\,\frac{b}{a}$, que significa "*ángulo cuyo seno es B*" y que se obtiene con la calculadora activando el comando ***sin***$^{-1}$ lo que conseguiremos con la secuencia

$\frac{b}{a}$.

Análogamente, si partimos de $\cos\hat{B} = \frac{c}{a}$ o bien $tg\,\hat{B} = \frac{b}{c}$ el ángulo *B* es $\hat{B} = arc\cos\frac{c}{a}$ o $\hat{B} = arc\tan\frac{b}{c}$ que obtendremos con las secuencias

$\frac{c}{a}$ o bien

$\frac{b}{c}$.

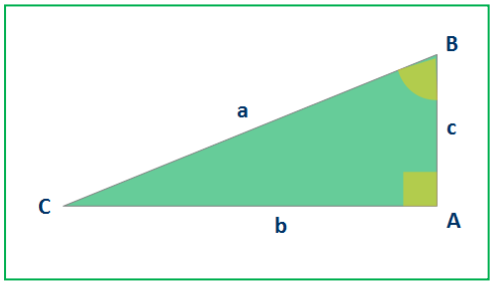
Textos Marea Verde

Actividades resueltas

- *Resolver el triángulo ABC con ángulo recto en A en los dos casos siguientes:*

  a) $\hat{B} = 42^o$ *y la hipotenusa a = 12 m.*

  b) Los catetos miden 12 dm y 5 dm.



a) Cálculo de los ángulos: $\hat{A} = 90^o$; $\hat{B} = 42^o$; $\hat{C} = 90^o - 42^o = 48^o$

Cálculo de los lados: $sen\ 42^o = \frac{b}{12} \Rightarrow b = 12\ sen\ 42^o \approx 8{,}03$ m.

$cos\ 42^o = \frac{c}{12} \Rightarrow c = 12\ cos\ 42^o \approx 8{,}92$ m.

b) Cálculo de la hipotenusa: $a^2 = b^2 + c^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow a = \sqrt{169} = 13$ dm

Cálculo de los ángulos: $\hat{A} = 90^o$; $\hat{B} = arc\tan\frac{12}{5} = 67^o\ 22'\ 48''$; $\hat{C} = 90^o - 67^o\ 22'\ 48'' = 22^o\ 37'\ 12''$.

2.6. Aplicaciones de la resolución de triángulos rectángulos al cálculo de distancias

Resolución de triángulos rectángulos

La resolución de triángulos rectángulos puede aplicarse directamente en algunos casos al cálculo de distancias.

Actividades resueltas

- Calcular la altura de un árbol sabiendo que determina una sombra de 3,5 metros cuando los rayos *de sol forman un ángulo de 30º con el suelo.*

La razón trigonométrica de 30º que relaciona el lado conocido y el que nos piden es la tangente:

$$\tan 30^o = \frac{h}{3{,}5} \Rightarrow h = 3{,}5 \tan 30^o = 3{,}5 . \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 2{,}02 \text{ m.}$$

Técnica de la doble observación

Se utiliza para calcular alturas de objetos a los que resulta difícil llegar como por ejemplo, edificios, montañas, objetos en el extremo opuesto de una calle, etc.…

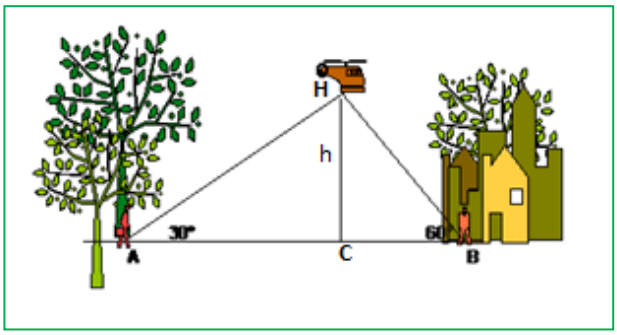
Precisamos de un instrumento para medir ángulos. Habitualmente se utiliza el llamado **teodolito**. La técnica consiste en tomar la medida del ángulo que forma una visual dirigida al punto más alto del objeto a medir con la horizontal, desde dos puntos distintos y situados a una distancia conocida para nosotros.

Aparecen entonces dos triángulos rectángulos con un lado común que es la altura a medir. Es posible plantear un sistema de ecuaciones en cuyo planteamiento es clave la definición de las razones

trigonométricas de un ángulo agudo. Veamos algunos ejemplos:

Actividades resueltas

- *Dos personas, separadas **30** metros ven un helicóptero. La persona situada en A dirige una visual a la base del mismo que forma con el suelo un ángulo de **30º**. También la persona situada en B dirige su vista al mismo punto obteniendo un ángulo de **60º**. ¿A qué altura vuela el helicóptero?*



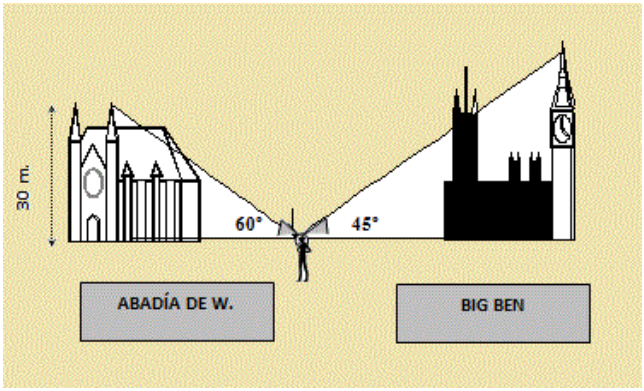
Sea h esta altura. Las visuales y el suelo determinan dos triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{AHC}$ y $\overset{\Delta}{BHC}$ en los que:

$AC + CB = 30 \Rightarrow CB = 30 - AC$ y si hacemos $AC = x$

$$\left.\begin{array}{l} \tan 30º = \dfrac{h}{x} \Rightarrow h = x \tan 30º = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x \\ \tan 60º = \dfrac{h}{30-x} \Rightarrow h = (30-x)\ \tan 60º = \sqrt{3}\,(30-x) \end{array}\right\} \frac{\sqrt{3}}{3}x = \sqrt{3}(30-x) \Rightarrow x = (30-x).3 \Rightarrow 4x = 90 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = \dfrac{90}{4} = \dfrac{45}{2} = 22{,}5\,m$. Sustituyendo, llegamos a la solución $h = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.\dfrac{45}{2} = \dfrac{15\sqrt{3}}{2} \approx 13\,m$

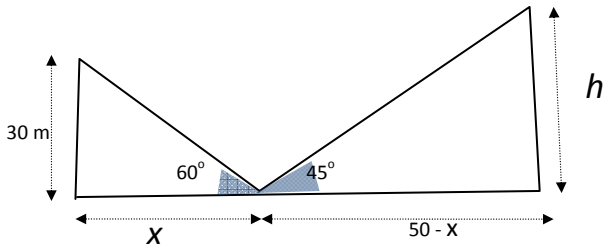
- *En un viaje de alumnos de 4º de E.S.O. a Londres, algunos de los viajeros hicieron prácticas de trigonometría. (Ya sabes, siempre hay un teodolito a mano).*



Al conocer que las torres de la Abadía de Westminster tienen **30** metros de altura, decidieron aprovechar sus conocimientos para calcular la altura de la conocida torre Big Ben. Desde un punto intermedio entre ambos edificios se divisa el punto más alto de la Abadía con ángulo de **60º,** y el Big Ben con un ángulo de **45º**. Si la distancia entre las bases de las torres de los dos edificios es de **50** metros, ¿cuál fue el resultado de sus cálculos?, ¿a qué distancia se encontraba de cada edificio? (Nota: Los datos son totalmente ficticios)

En el triángulo izquierdo determinado por la *Abadía*:

$$\tan 60º = \frac{30}{x} \Rightarrow x = \frac{30}{\tan 60^o} = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}\ m$$



En el triángulo que determina el *Big Ben*:

$$\tan 45º = \frac{h}{50 - 10\sqrt{3}} \Rightarrow h = \left(50 - 10\sqrt{3}\right).\tan 45^o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 50 - 10\sqrt{3}\ \ m \approx 32{,}7\ \ m$$

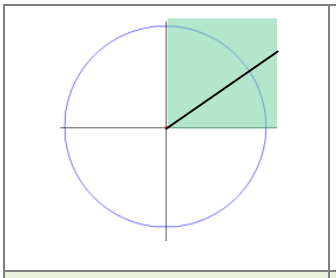
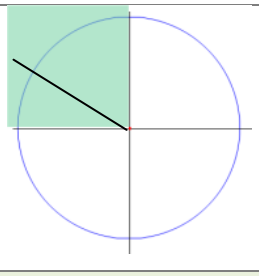
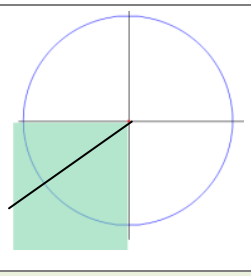
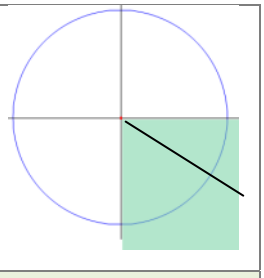
3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

3.1. Circunferencia trigonométrica. Cuadrantes

Se llama **circunferencia trigonométrica** o **goniométrica** a una circunferencia de radio unidad centrada en el origen de coordenadas.

Es posible representar cualquier ángulo en la circunferencia trigonométrica. Para ello siempre se toma un lado fijo que es la semirrecta definida por la parte positiva del eje de abscisas; el segundo lado es la semirrecta variable que corresponda según su medida. El sentido de un ángulo se mide de OX^+ a la semirrecta variable que determina su amplitud. Se entiende que para un ángulo negativo coincide con el de las agujas de un reloj analógico y para un ángulo positivo, el contrario.

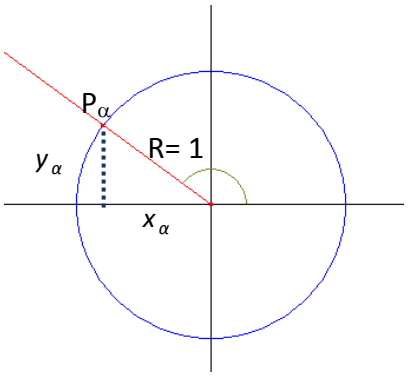
La circunferencia trigonométrica divide al plano en cuatro regiones que se denominan cuadrantes.

			
PRIMER CUADRANTE	SEGUNDO CUADRANTE	TERCER CUADRANTE	CUARTO CUADRANTE

3.2. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

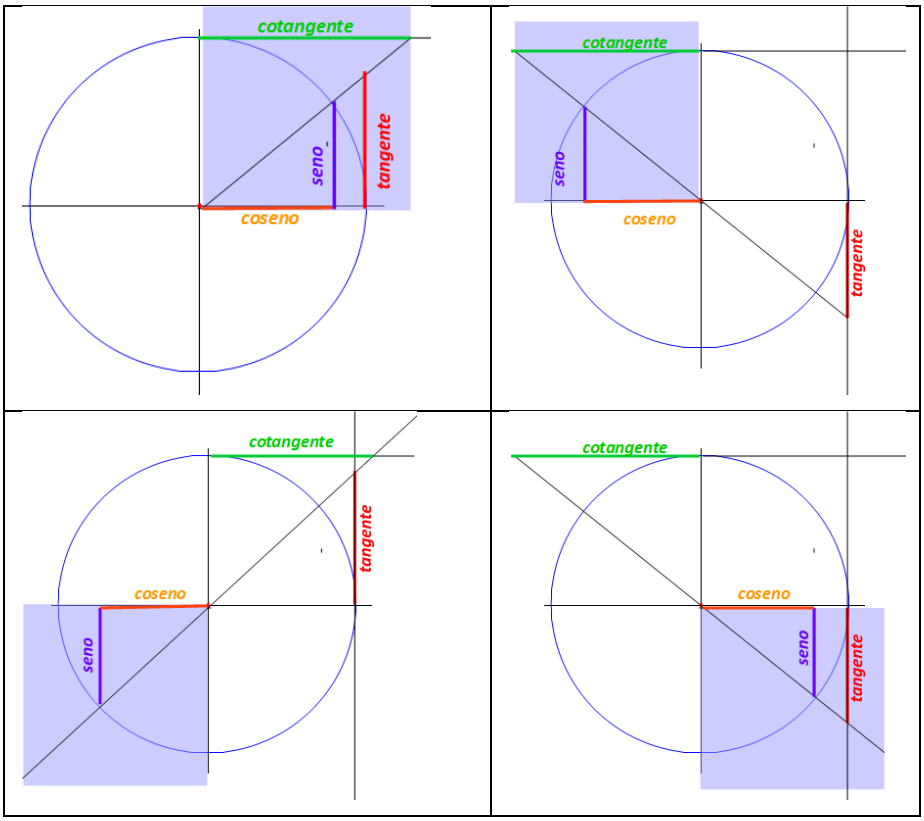
La semirrecta variable que define un ángulo α en la circunferencia trigonométrica es clave para la definición de un ángulo cualquiera. Dicha semirrecta corta a la circunferencia en un punto $P_\alpha\ (x_\alpha, y_\alpha)$ a partir del que se define:

$$sen\ \alpha = \frac{y_\alpha}{R} = \frac{y_\alpha}{1} = y_\alpha\ ;\ cos\ \alpha = \frac{x_\alpha}{R} = \frac{x_\alpha}{1} = x_\alpha\ ;\ tag\ \alpha = \frac{y_\alpha}{x_\alpha}.$$



Se conserva la definición para ángulos agudos que son ángulos del primer cuadrante y se amplía a ángulos de cualquier signo y amplitud.

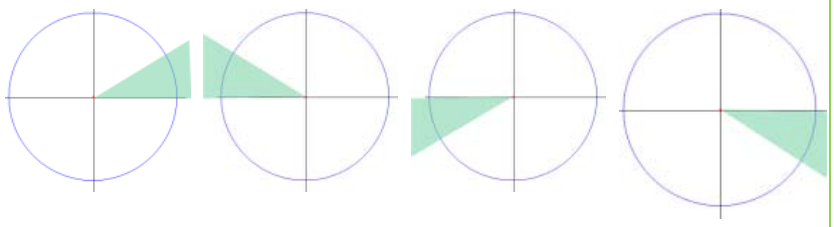
Además, esta definición permite tener una representación geométrica del seno y el coseno de un ángulo que coincide con los segmentos y_α , x_α, ordenada y abscisa del punto P_α. Las rectas tangentes a la circunferencia goniométrica en los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$ proporcionan también representaciones geométricas de la tangente y cotangente que son los segmentos determinados por estas tangentes geométricas, el eje *OX* y la semirrecta correspondiente a cada ángulo



3.3. Reducción al primer cuadrante

Los ángulos α de los cuadrantes segundo, tercero o cuarto pueden relacionarse con ángulos agudos β que podemos situar en el primer cuadrante y que tienen razones trigonométricas con los mismos valores absolutos que los ángulos α iniciales.

Estas relaciones permiten obtener las razones trigonométricas de cualquier ángulo α en función de uno del primer cuadrante β. En cada caso calcularemos la amplitud de la zona sombreada.



Debes pensar que los ángulos de estos cuadrantes no siempre son positivos ni tienen un valor absoluto menor que 360º.

Observa que, si su valor absoluto es mayor que 360º, equivale al número de vueltas que te indique el cociente entero de la división de α entre 360º más el resto de la división.

El signo de un ángulo depende solo de la forma de recorrerlo (medido desde la parte positiva del eje *OX* hacia la semirrecta que lo define).

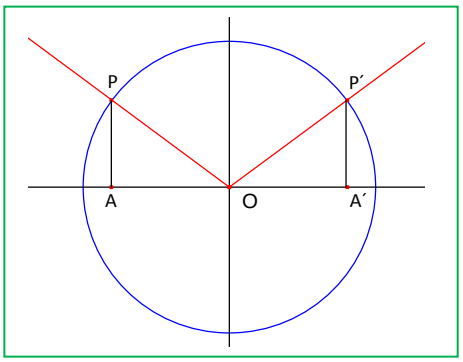
En los casos en los que deseemos obtener qué ángulos corresponden a una razón trigonométrica dada, resulta especialmente importante ya que, aunque hagamos uso de la calculadora, ésta nos devolverá un único valor y, sin embargo, existen infinitos ángulos solución de este problema. Gracias a lo que describiremos en este epígrafe, podremos encontrarlos sin dificultad.

Para hacer más cómoda la explicación consideraremos que a partir de P se miden las razones

trigonométricas del ángulo α y a partir de P´ las del ángulo β

ANGULOS DEL SEGUNDO CUADRANTE

Construimos los triángulos rectángulos *OPA* y *OP´A´* iguales de forma que la hipotenusa sea en ambos casos el radio de la circunferencia goniométrica y además β = ángulo *AOP* = ángulo *A´OP´*



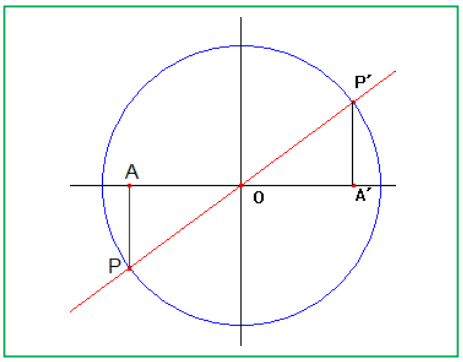
$$sen\,\alpha = \overline{AP} = \overline{A'P'} = sen\,\beta$$

$$cos\,\alpha = \overline{AO} = -\overline{A'O} = -cos\,\beta$$

Y dividiendo miembro a miembro, obtenemos $tan\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \dfrac{sen\,\beta}{-cos\,\beta} = -tan\,\beta$

ANGULOS DEL TERCER CUADRANTE

También en este caso los triángulos rectángulos *OPA* y *OP´A´* son iguales. Su hipotenusa es el radio de la circunferencia goniométrica y sus catetos los segmentos determinados por las coordenadas de los puntos *P* y *P´*. La construcción se realiza además de modo que β = ángulo *AOP* = ángulo *A´OP´*



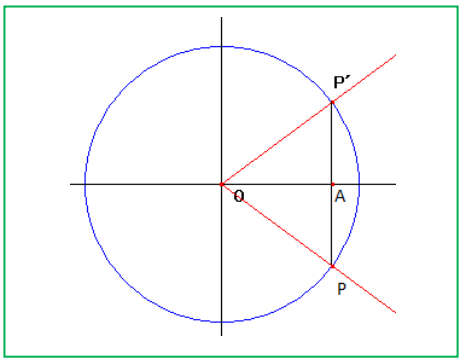
$$sen\,\alpha = \overline{AP} = -\overline{A'P'} = -sen\,\beta$$

$$cos\,\alpha = \overline{AO} = -\overline{A'O} = -cos\,\beta$$

Y dividiendo miembro a miembro, obtenemos $tan\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \dfrac{-sen\,\beta}{-cos\,\beta} = tan\,\beta$

ANGULOS DEL CUARTO CUADRANTE

Por último construimos los triángulos rectángulos *OPA* y *OP´A* iguales de modo análogo a lo descrito en los dos casos anteriores, observando que, en este caso *A* = *A´*.



$$sen\,\alpha = \overline{AP} = -\overline{AP'} = -sen\,\beta$$

$$cos\,\alpha = \overline{AO} = cos\,\beta \text{ en ambos casos}$$

Y dividiendo miembro a miembro, obtenemos:

$$tan\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{-sen\,\beta}{cos\,\beta} = -tan\,\beta$$

Actividades propuestas

9. Sitúa en el cuadrante que corresponda y expresa en función de un ángulo agudo, el seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos:

Ángulo	*cuadrante*	*seno*	*coseno*	*tangente*
165 º				
–230 º				
315 º				
3625 º				

10. Utiliza la calculadora y lo aprendido en este epígrafe para encontrar todos los ángulos positivos menores que 360º cuyo seno es de 0,4.

11. Ídem todos los ángulos negativos menores en valor absoluto que 360º cuya tangente vale 2.

12. Ídem todos los ángulos comprendidos entre 360º y 720º cuyo coseno vale 0,5.

ANGULOS DETERMINADOS POR LOS SEMIEJES.

Los ángulos $0^o + 360^o n$; $90^o + 360^o n$; $180^o + 360^o n$; $270^o + 360^o n$ están determinados por semiejes de coordenadas y sus razones trigonométricas se miden a partir de puntos de los ejes. Estos puntos son, respectivamente $P_1\ (1,0)$, $P_2\ (0,1)$, $P_3\ (-1,0)$ y $P_4\ (0,-1)$ con lo que se obtiene con facilidad:

$sen\ (0^o + 360^o n) = 0;\ cos\ (0^o + 360^o n) = 1;\ tan\ (0^o + 360^o n) = 0$.

$sen\ (90^o + 360^o n) = 1;\ cos\ (90^o + 360^o n) = 0;\ tan\ (90^o + 360^o n)$ no existe

$sen\ (180^o + 360^o n) = 0;\ cos\ (180^o + 360^o n) = -1;\ tan\ (180^o + 360^o n) = 0$

$sen\ (270^o + 360^o n) = -1;\ cos\ (270^o + 360^o n) = 0;\ tan\ (270^o + 360^o n)$ no existe

4. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA

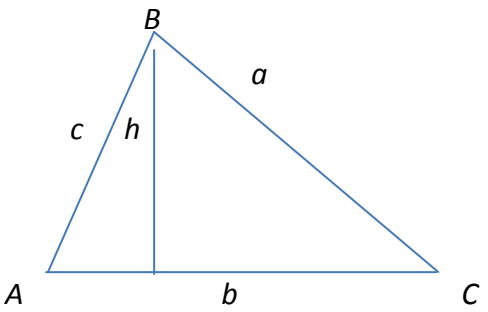
Las definiciones de seno, coseno y tangente que hemos aplicado en triángulos rectángulos no se pueden aplicar en triángulos no rectángulos. Para resolver triángulos no rectángulos se aplican dos teoremas muy importantes en trigonometría: el teorema de los senos y teorema de los cosenos.

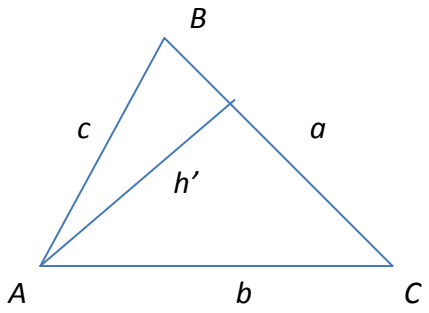
4.1. Teorema de los senos

El **teorema de los senos** afirma que en todo triángulo se cumple que los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos. Es decir,

$$\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}=\frac{c}{sen\hat{C}}$$

Consideremos el triángulo *ABC* y tracemos dos alturas cualesquiera *h* y *h´* que dividen al triángulo no rectángulo en dos triángulos rectángulos.





Aplicando la definición de seno a los triángulos en los que interviene *h*:

$$sen\ \hat{A}=\frac{h}{c}\ \longrightarrow h=c\ sen\ \hat{A}$$

$$sen\ \hat{C}=\frac{h}{a}\ \longrightarrow h=c\ sen\ \hat{C}$$

Por tanto:

$$c\,sen\,\hat{A}=a\,sen\ \hat{C}\ \longrightarrow \frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{c}{sen\hat{C}}$$

Aplicando la definición de seno a los triángulos en los que interviene *h'*:

$$sen\,\hat{B}=\frac{h'}{c}\ \longrightarrow\ h'=c\,sen\,\hat{B}$$

$$sen\ \hat{C}=\frac{h'}{b}\ \longrightarrow\ h'=b\,sen\,\hat{C}$$

Por tanto:

$$c\,sen\hat{B} = b\,sen\hat{C} \rightarrow \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$$

Entonces, se deduce que: $\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$

Notas

Si el triángulo es obtusángulo, un razonamiento análogo nos lleva a las mismas fórmulas.

Podemos resolver fácilmente triángulos utilizando el teorema de los senos si conocemos:

a) dos ángulos (es decir, tres ángulos) y un lado
b) dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

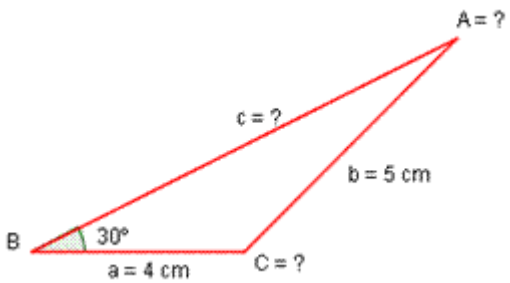
Actividades resueltas

- *Resolver el siguiente triángulo B = 30º, a = 4 cm y b = 5 cm.:*

Conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, *b.*

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} \rightarrow \frac{4}{sen\hat{A}} = \frac{5}{sen30º} \rightarrow$$

$$sen\ \hat{A} = \frac{4\cdot(1/2)}{5} = 0'4.$$



Por tanto: $\hat{A}$ = *arcsen* 0,4 = 23,58º

El ángulo $\hat{c}$ = 180º – (23'58º + 30º) 126,42º.

Para calcular el lado *c* volvemos a aplicar el teorema de los senos:

$$\frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \rightarrow \frac{5}{sen30º} = \frac{c}{sen126'42º}$$

Entonces: $c = \frac{5\cdot sen\,126{,}42º}{sen30º} = 8{,}1$ cm.

4.2. Teorema de los cosenos

El **teorema de los cosenos** afirma que en un triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ cualquiera se cumple que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

El próximo año estudiarás la demostración de este teorema. De momento solo veremos algunas de sus aplicaciones.

Notas

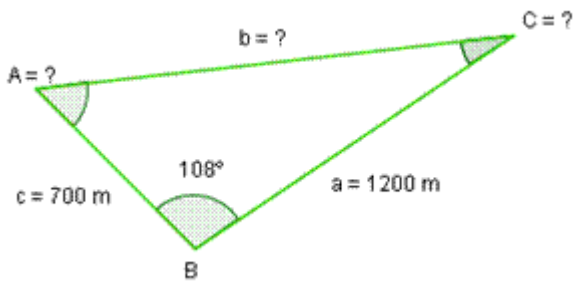
- Si te fijas, el teorema de los cosenos es una **generalización del teorema de Pitágoras**. Es decir,

cuando el triángulo es rectángulo, el teorema de los cosenos y el teorema de Pitágoras es lo mismo.

- Podemos utilizar el teorema de los cosenos si en un triángulo conocemos:
  a) los tres lados,
  b) dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos
  c) dos lados y el ángulo que forman.

Actividades resueltas

- *Resolver el siguiente triángulo del que conocemos B = 108º, c = 700 m y a = 1200 m:*



$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$ luego $b = \sqrt{1200^2 + 700^2 - 2\cdot 700\cdot 1200\cdot \cos 108} \rightarrow b$ = 1564,97 m.

Con *a, b* y *c* conocidos, calculamos el ángulo *C*:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} \rightarrow \cos\hat{C} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2\cdot a\cdot b} = \frac{700^2 - 1200^2 - 1564{,}97^2}{-2\cdot 1200\cdot 1564'97} = 0{,}9 \rightarrow \hat{c} = 25{,}18^o.$$

El ángulo $\hat{c}$ también se podría calcular utilizando el teorema de los senos.

Para calcular $\hat{A}$: $\hat{A}$ = 180º – (108º + 25,18º) = 46'82º.

Actividades propuestas

13. Calcula la longitud del lado *a* de un triángulo, sabiendo que *C* = 25º, *b* = 7 cm y *c* = 4 cm.

14. Calcula los ángulos del triángulo de lados: *a* = 6, *b* = 8 y *c* = 5.

4.3. Resolución de triángulos cualesquiera

Las herramientas básicas para resolver triángulos cualesquiera son los teoremas de los senos y los cosenos vistos anteriormente. El próximo curso se ampliará brevemente la resolución de estos triángulos, estudiando casos en los que no existirá solución o casos en los que haya dos soluciones.

También se plantearán problemas de cálculo de distancias entre puntos inaccesibles.

CURIOSIDADES. REVISTA

¿NUESTROS SENTIDOS NOS ENGAÑAN?

La foto muestra un tramo de carretera hacia el horizonte. Todas las líneas son rectas, la fotografía no engaña, pero nuestros sentidos, sí. Según nuestra percepción, estas líneas se cortan en el punto del horizonte, aunque nosotros, cuando estamos en esa situación, sabemos que no es así. Entonces, ¿por qué lo vemos así? Por dos razones: porque la luz viaja en línea recta y porque nuestra percepción visual se basa en los ángulos, lo que hace que la anchura de la carretera disminuya con la distancia.

Pero ahora, que conoces las relaciones entre ángulos y lados de un triángulo, sabrás razonar si los objetos disminuyen su tamaño de forma inversamente proporcional a la distancia a la que se encuentran.

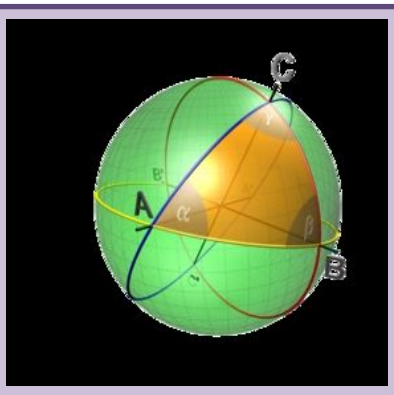
¿Sabías que…?

El teorema de los senos se utilizó en el siglo XIX para medir de forma precisa el meridiano de París y así poder definir el metro.

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

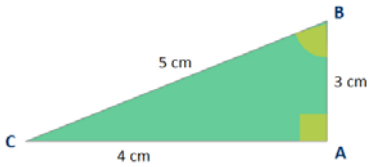
La trigonometría esférica estudia los triángulos que se forman sobre una superficie esférica

- **En la trigonometría esférica la distancia más corta entre dos puntos no es una recta, sino un arco.**
- **Los ángulos de un triángulo esférico suman más de 180º**
- **Es la base de la navegación y la astronomía. Curioso, ¿no?**



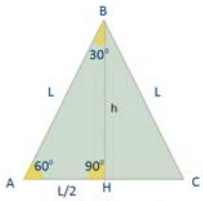
Revisora: Nieves Zuasti
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez y Milagros Latasa Asso
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Milagros Latasa y Fernanda Ramos

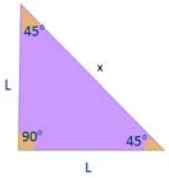
RESUMEN

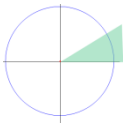
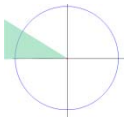
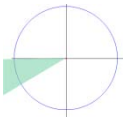
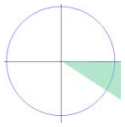
		Ejemplos
Radián	Es un ángulo tal que cualquier arco que se le asocie mide exactamente lo mismo que el radio utilizado para trazarlo. Se denota por rad. Nº de radianes de un ángulo completo = 2π rad	90° son $\pi/2$ rad
Razones trigonométricas de un ángulo agudo	$sen\ \alpha = \frac{cateto\ \ opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$ $\cos\alpha = \frac{cateto\ \ adyacente}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$ $tan\alpha = \frac{cateto\ \ opuesto}{cateto\ \ adyacente} = \frac{b}{c}$	 $sen\,C = \frac{3}{5}$, $\cos C = \frac{4}{5}$
Relaciones fundamentales	• $(sen\,\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$ • $\tan\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$	$(sen\ 30^{o})^2 + (\cos\ 30^{o})^2 =$ $= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$
Otras razones trigonométricas	$cosec\alpha = \frac{1}{sen\alpha}$ $\sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha}$ $cotan\alpha = \frac{1}{tan\alpha}$	$cosec\ 90^{o} = 1$ $\sec 90^{o}$ No existe $cotan\ 45^{o} = 1$

Razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°

	seno	*coseno*	*tangente*
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$





Reducción al primer cuadrante	Las razones trigonométricas de cualquier ángulo α pueden expresarse en función de las de un ángulo agudo β	   

Reducción al primer cuadrante	2º CUADRANTE	$sen\ \alpha = sen\ \beta$ y $\cos\ \alpha = -\cos\ \beta$	$sen\,135^o = sen\,45^o$
	3er CUADRANTE	$sen\ \alpha = -sen\ \beta$ y $\cos\ \alpha = -\cos\ \beta$	$sen\,200^o = -sen\,20^o$
	4º CUADRANTE	$sen\ \alpha = -sen\ \beta$ y $\cos\ \alpha = \cos\ \beta$	$\cos\left(-60^o\right) = \cos 60^o$
Resolución de triángulos	Resolver un triángulo es calcular las medidas de sus ángulos y sus lados. • Si el triángulo es rectángulo, usaremos las definiciones de las razones trigonométricas, el teorema de Pitágoras y el resultado que afirma que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° • Si el triángulo no es rectángulo, además del resultado de que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°, usaremos los teoremas de los senos y los cosenos.		
Teorema de los senos	En un triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ cualquiera: $\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$		
Teorema de los cosenos	En un triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ cualquiera: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$		

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Expresa las siguientes medidas de ángulos en radianes:
   a) 30° b) 60° c) 100° d) 330°

2. ¿Cuánto mide en grados sexagesimales un ángulo de 1 rad? Aproxima el resultado con grados, minutos y segundos.

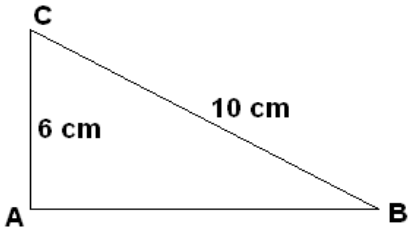
3. Halla la medida en grados de los siguientes ángulos expresados en radianes:

   a) π b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{5\pi}{6}$ d) 2π

4. Usando la calculadora halla el seno, el coseno y la tangente de :
   a) 28° b) 62°

   ¿Encuentras alguna relación entre las razones trigonométricas de ambos ángulos?

5. Halla el seno y el coseno de los ángulos *B* y *C* del dibujo. ¿Qué relación encuentras?



6. En un triángulo rectángulo *ABC* con ángulo recto en *A*, si *tan B* = 1,2 y *b* = 3 cm, ¿cuánto mide *c*?

7. Trabajando con ángulos agudos, ¿es cierto que a mayor ángulo le corresponde mayor seno? ¿Y para el coseno?

8. Usando la calculadora halla el seno, el coseno y la tangente de 9° y 81°. ¿Encuentras alguna relación entre las razones trigonométricas de ambos ángulos?

9. Si *a* es un ángulo agudo y *cos a* = 0,1, ¿cuánto valen las otras dos razones trigonométricas?

10. Comprobar las relaciones trigonométricas fundamentales con 30°, 45° y 60° sin utilizar decimales ni calculadora.

11. Si *a* es un ángulo agudo y *tan a* = 0,4, ¿cuánto valen las otras dos razones trigonométricas?

12. Completa en tu cuaderno el siguiente cuadro sabiendo que α es un ángulo agudo.

	0,7	
1/3		
		2

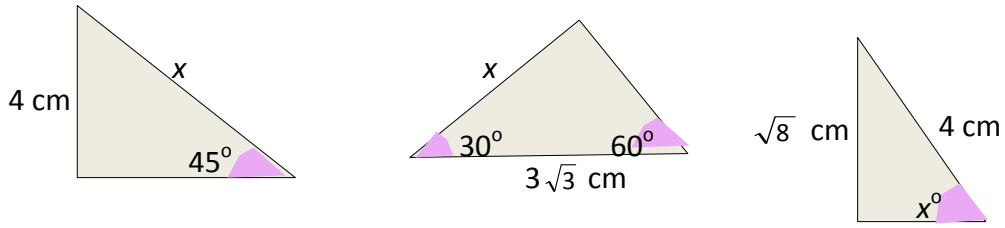
13. ¿Es rectángulo un triángulo cuyos lados miden 12, 13 y 5 cm? En caso afirmativo determina el seno, coseno y tangente de los dos ángulos agudos.

14. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 5 y 12 cm. Calcula las razones trigonométricas de sus ángulos agudos. ¿Qué amplitud tienen?

15. Si α es un ángulo agudo tal que $sen\ \alpha = \frac{1}{3}$, calcula:

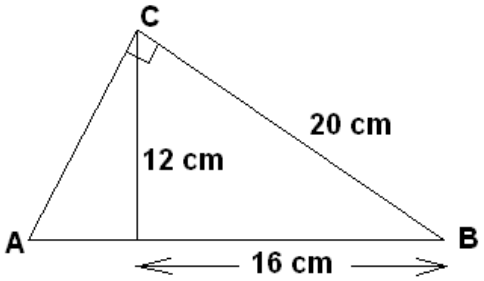
i) Las restantes razones trigonométricas de α
ii) Las razones trigonométricas de 180º – α
iii) Las razones trigonométricas de 180º + α
iv) Las razones trigonométricas de 360º – α

16. Sin utilizar calculadora, calcula el valor de *x* en los siguientes triángulos rectángulos:



17. Beatriz sujeta una cometa con una cuerda de 42 m. ¿A qué altura se encuentra ésta en el momento en que el cable tenso forma un ángulo de 52º 17' con el suelo?

18. Calcula el seno, coseno y tangente del ángulo *A* en el siguiente dibujo:



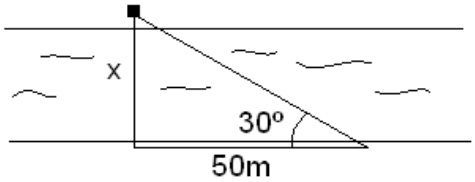
19. Si *a* es un ángulo del segundo cuadrante y *cos a* = –0,05, ¿cuánto valen las otras dos razones trigonométricas?

20. Si *a* es un ángulo obtuso y *sen a* = 0,4, ¿cuánto valen las otras dos razones trigonométricas?

21. Dibuja en tu cuaderno la tabla siguiente y sitúa en el cuadrante que corresponda y expresa en función de un ángulo agudo, el seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente de los siguientes ángulos. Si puedes, calcúlalos:

Ángulo	*cuadrante*	*seno*	*coseno*	*tangente*	*secante*	*cosecante*	*cotangente*
–225º							
150º							
–60º							
3645 º							

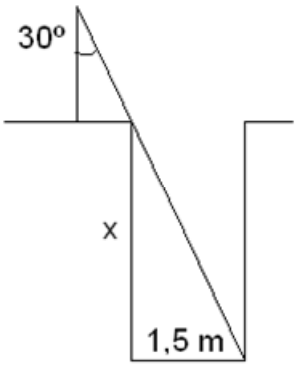
22. Calcula la anchura del río representado en la figura siguiente:



23. Averigua la altura de la torre de una iglesia si a una distancia de 80 m, y medido con un teodolito de

altura 1,60 m, el ángulo de elevación del pararrayos que está en lo alto de la torre es de 23º.

24. Halla el área de un hexágono regular de lado 10 cm.



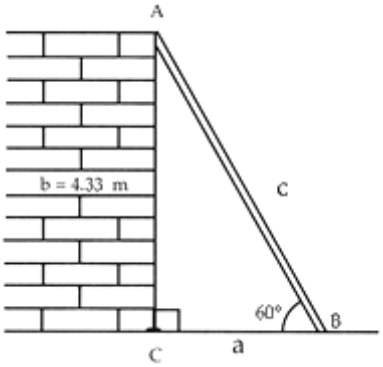
25. Calcula la profundidad de un pozo de 1,5 m de diámetro sabiendo el ángulo indicado en la figura de la derecha.

26. Cuál es la altura de una montaña cuya cima, si nos situamos a una distancia de 3000 m del pie de su vertical y medimos con un teodolito de altura 1,50 m, presenta un ángulo de inclinación de 49º.

27. ¿Cuál es el ángulo de inclinación de los rayos solares en el momento en que un bloque de pisos de 25 m de altura proyecta una sombra de 10 m de longitud?

28. Halla la altura y el área de un triángulo isósceles cuya base mide 20 cm y cuyo ángulo desigual vale 26º.

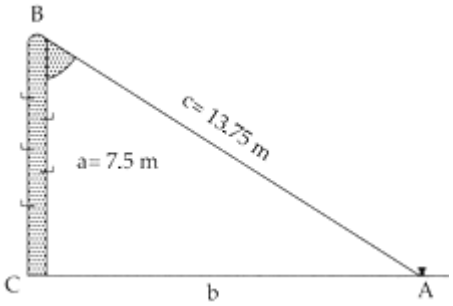
29. Halla el área de un dodecágono regular de lado 16 cm.



30. Obtener la longitud de una escalera apoyada en una pared de 4,33 m de altura que forma un ángulo de 60 º con respecto al suelo

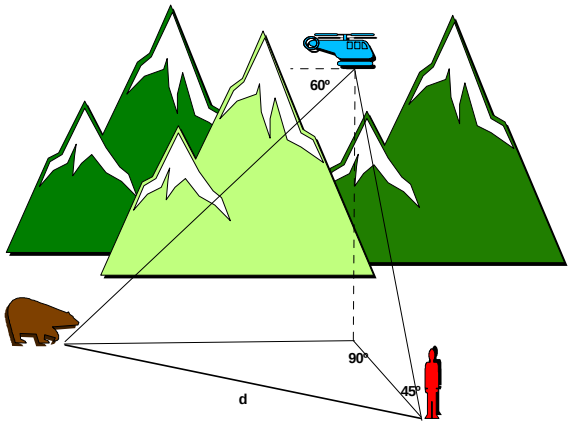
31. El hilo de una cometa totalmente extendida mide 150 m, y forma un ángulo con el suelo de 40º mientras lo sujeto a 1,5 m del suelo. ¿A qué altura del suelo está la cometa?

32. Para medir la altura de un campanario a cuya base no podemos acceder, tendemos una cuerda de 30 m de largo desde lo alto de la torre hasta tensarla en el suelo, formando con éste un ángulo de 60º. ¿Cuál es la altura del campanario?



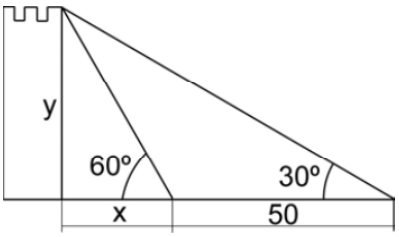
33. Obtener el ángulo que forma un poste de 7.5 m de alto con un cable tirante que va, desde la punta del primero hasta el piso, y que tiene un largo de 13.75 m

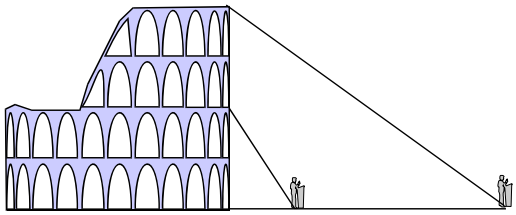
34. Dos amigos observan desde su casa un globo que está situado en la vertical de la línea que une sus casas. La distancia entre sus casas es de 3 km. Los ángulos de elevación medidos por los amigos son de 45º y 60º. Halla la altura del globo y la distancia de ellos al globo.



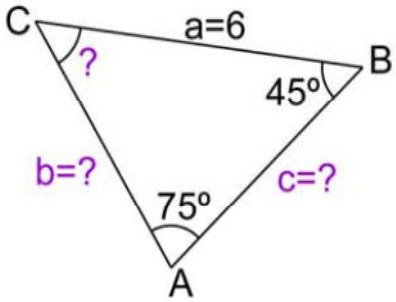
35. Un biólogo se encuentra en el puerto de Somiedo haciendo un seguimiento de los osos pardos. Cuenta con la ayuda de un cámara y un piloto que vuelan en un helicóptero, manteniéndose a una altura constante de **$40\sqrt{3}$**m. En el momento que describe la figura, el cámara ve desde el helicóptero al oso con un ángulo de depresión (ángulo que forma su visual con la horizontal marcado en el dibujo) de **60º**. El biólogo dirige una visual al helicóptero que forma con el suelo un ángulo de **45º**. Calcular la distancia **d** entre el biólogo y el oso.

36. Desde cierto lugar del suelo se ve el punto más alto de una torre, formando la visual un ángulo de 30º con la horizontal. Si nos acercamos 50 m a la torre, ese ángulo se hace de 60º. Calcula la altura de la torre.





37. Con un teodolito de 1 metro de altura, dos personas pretenden medir la altura del *Coliseo de Roma.* Una de ellas se acerca al anfiteatro, separándose **40 m**. de la otra. Esta última obtiene que el ángulo de elevación del punto más alto es de **30º.** La otra no divisa el Coliseo completo por lo que mide el ángulo de elevación al punto que marca la base del tercer piso , obteniendo **60º** como resultado**.** Calcular la altura del Coliseo y la distancia de los dos observadores a la base del mismo.



38. Resuelve el triángulo: a = 6; B = 45º; A = 75º

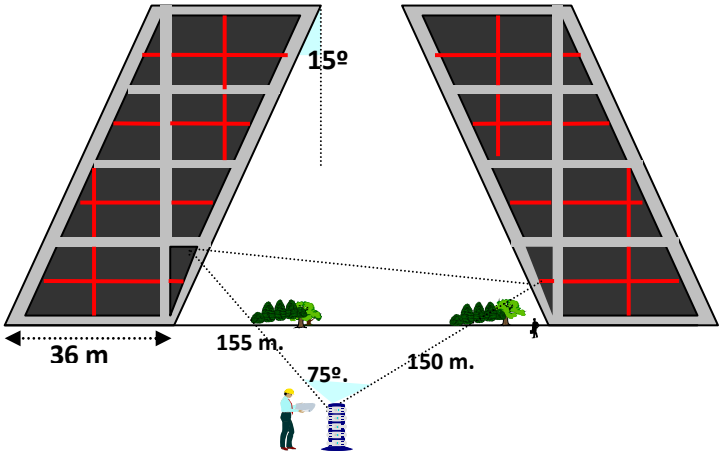
39. Los padres de Pedro tienen una parcela en el campo de forma triangular cuyos lados miden 20, 22 y 30 m. Pedro quiere calcular los ángulos. ¿Cuáles son esos ángulos?

40. Estando situado a 100 m de un árbol, veo su copa bajo un ángulo de 30º. Mi amigo ve el mismo árbol bajo un ángulo de 60º. ¿A qué distancia está mi amigo del árbol?

41. Las conocidas *torres Kio* de Madrid son dos torres gemelas que están en el Paseo de la Castellana, junto a la Plaza de Castilla. Se caracterizan por su inclinación y representan una puerta hacia Europa.

Textos Marea Verde

a. Con los datos que aparecen en la figura, determina su altura.
b. Desde dos oficinas situadas en torres distintas se han extendido dos cables hasta un mismo punto que miden 155 y 150 metros y que forman un ángulo de 75º en su punto de encuentro. ¿ Qué distancia en línea recta hay entre ambas?



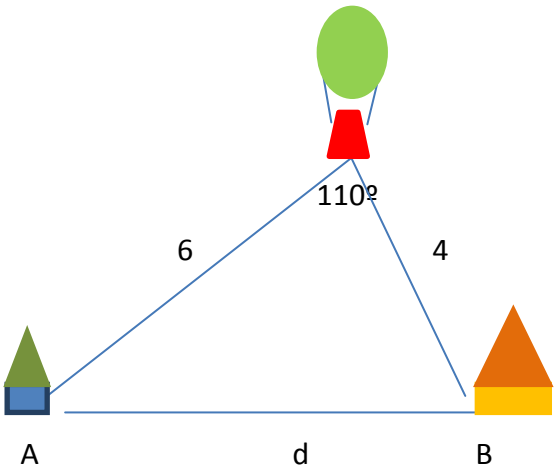
42. Tres pueblos están unidos por carreteras: *AB* = 10 km, *BC* = 12 km y el ángulo formado por *AB* y *BC* es de 120º. Cuánto distan *A* y *C*.

43. Van a construir un túnel del punto *A* al punto *B*. Se toma como referencia una antena de telefonía (*C*) visible desde ambos puntos. Se mide entonces la distancia *AC* = 250 m. Sabiendo que el ángulo en *A* es de 53º y el ángulo *B* es de 45º calcula cuál será la longitud del túnel.

44. Calcula el lado de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 6 m.

45. El punto más alto de un repetidor de televisión, situado en la cima de una montaña, se ve desde un punto del suelo *P* bajo un ángulo de 67º. Si nos acercamos a la montaña 30 m lo vemos bajo un ángulo de 70º y desde ese mismo punto vemos la cima de la montaña bajo un ángulo de 66º. Calcular la altura del repetidor.

46. Desde lo alto de un globo se observa un pueblo *A* con un ángulo de 50º. Otro pueblo, *B* situado al lado y en línea recta se observa desde un ángulo de 60º. El globo se encuentra a 6 km del pueblo *A* y a 4 km de **B**. Calcula la distancia entre *A* y *B*.



47. Resuelve los triángulos:
a) a = 20 m; *B* = 45º; *C* = 65º
b) *c* = 6 m, *A* = 105º, *B* = 35º
c) *b* = 40 m; *c* = 30 m, *A* = 60º.

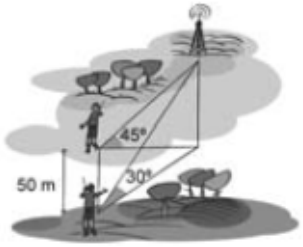
48. Dado el triángulo de vértices *A*, *B*, *C*, y sabiendo que *A* = 60º, *B* = 45º y que *b*= 20 m. Resolverlo y calcular su área.

49. Calcula la longitud de los lados de un paralelogramo cuyas diagonales son de 20 y 16 m. y las diagonales forman entre sí un ángulo de 37º.

50. Un triángulo isósceles con base 30 m tiene dos ángulos iguales de 80º. ¿Cuánto miden los otros dos lados?

51. Tres amigos se sitúan en un campo de fútbol. Entre Álvaro y Bartolo hay 25 m y entre Bartolo y César, 12 metros. El ángulo formado en la esquina de César es de 20º. Calcula la distancia entre Álvaro y César.

52. Un hombre que está situado al oeste de una emisora de radio observa que su ángulo de elevación es de 45º. Camina 50 m hacia el sur y observa que el ángulo de elevación es ahora de 30º. Halla la altura de la antena.



53. Los brazos de un compás miden 12 cm y forman un ángulo de 60º. ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?

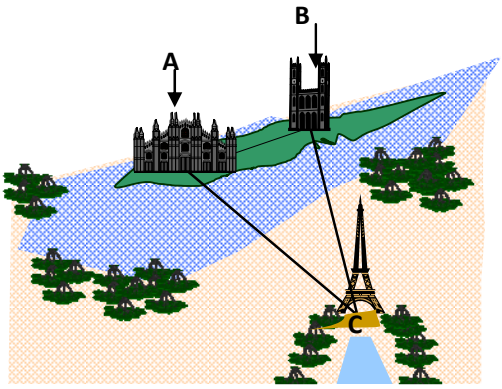
54. Escribe cuatro ángulos con el mismo seno que 135º.

55. Encuentra dos ángulos que tengan la tangente opuesta a la de 340º.

56. Busca dos ángulos con el mismo seno que 36º y coseno opuesto.

57. ¿Qué ángulos negativos, comprendidos entre –360º y 0º tienen el mismo seno que 60º?

58. En París y en *l' Île de la Cité* se encuentran *Nôtre Dame* y *la Sainte Chapelle* a una distancia de **200** metros. Imaginemos que un observador situado en *A* ve *B* y *C* con un ángulo de **56º** y que otro, situado en *B* ve *A* y *C* con un ángulo de **117º.** Calcular las distancias entre la torre *Eiffel* (*C*) y *Nôtre Dame* (*B*), asi como entre la torre *Eiffel* (*C)* y la *Sainte Chapelle* (A).



AUTOEVALUACIÓN

1. La expresión en radianes de 65° es:

   a) 1,134 rad b) 1,134π rad c) 2,268 rad d) 2,268π rad

2. El valor de la hipotenusa en un triángulo rectángulo con un ángulo de 25° y con uno de los catetos de 3 cm es:

   a) 3,3 cm b) 7,1 cm c) 6,4 cm d) 2,2 cm

3. Si α es un ángulo agudo y $sen\,\alpha$ = 0,8, la tangente de α es:

   a) 0,6 b) –0,6 c) –1,33 d) 1,33

4. Selecciona la opción correcta:

a) $tan\,\hat{A} = \frac{2}{3}$ significa que $sen\,\hat{A} = 2$ y $\cos\hat{A} = 3$

b) La secante de un ángulo siempre está comprendida entre –1 y 1

c) En el segundo y cuarto cuadrantes la tangente y cotangente de un ángulo tienen signo negativo

d) El seno de un ángulo es siempre menor que su tangente.

5. Si el seno de un ángulo del segundo cuadrante es $\frac{4}{5}$, entonces su tangente y secante son respectivamente:

   a) $-\frac{3}{5}$ y $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{3}{5}$ y $\frac{5}{3}$ c) $-\frac{4}{3}$ y $-\frac{3}{4}$ d) $\frac{4}{3}$ y $\frac{3}{4}$

6. La altura de un edificio es de 50 m, la medida de su sombra cuando los rayos del sol tienen una inclinación de 30° con la horizontal es de

   a) 25 m b) 100 m c) $50\sqrt{3}$ m d) $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ m

7. El ángulo de -420° es un ángulo que se sitúa en

a) El primer cuadrante b) El segundo cuadrante c) El tercer cuadrante d) El cuarto cuadrante

8. Si α es un ángulo agudo y β es su suplementario, se cumple:

   a) $sen\ \alpha = -sen\ \beta$ y $\cos\alpha = \cos\beta$ b) $sen\ \alpha = sen\ \beta$ y $\cos\alpha = -\cos\beta$

   c) $sen\ \alpha = sen\ \beta$ y $\cos\alpha = \cos\beta$ d) $sen\ \alpha = -sen\ \beta$ y $\cos\alpha = -\cos\beta$

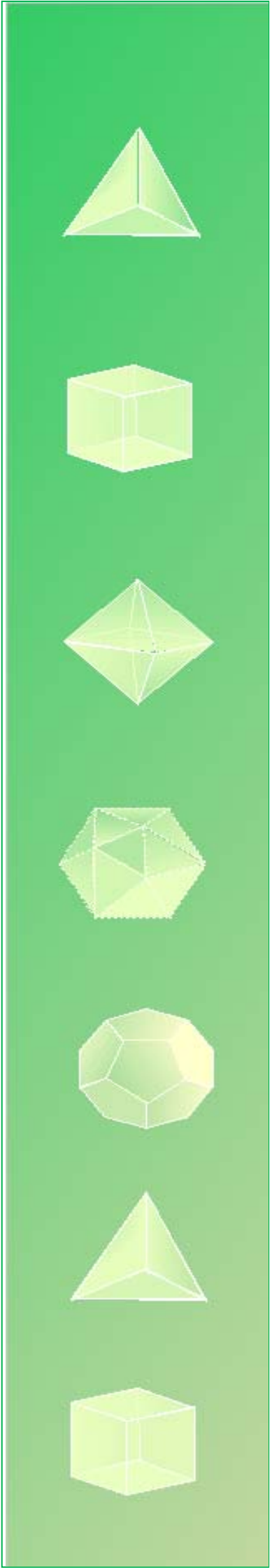
9. Para calcular la altura de una montaña se mide con un teodolito desde *A* el ángulo que forma la visual a la cima con la horizontal, que es $\hat{A}$ = 30 °. Avanzando 200 m, se vuelve a medir y el ángulo resulta ser $\hat{B}$ = 35,2°. La altura de la montaña es de:

   a) 825 m b) 773 m c) 595 m d) 636 m

10. Si el radio de un pentágono regular es 8 cm, su área mide

   a) 305,86 cm^2 b) 340,10 cm^2 c) 275,97 cm^2 d) 152,05 cm^2

Textos Marea Verde



Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas:

4ºB ESO
Capítulo 9: Geometría.

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-042254

Fecha y hora de registro: 2014-05-08 18:14:30.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez

Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro

Ilustraciones: Milagros Latasa y Banco de Imágenes de INTEF

Índice

1. TEOREMA DE PITÁGORAS Y TEOREMA DE TALES

1.1. TEOREMA DE PITÁGORAS
1.2. TEOREMA DE TALES
1.3. PROPORCIONALIDAD EN LONGITUDES, ÁREAS Y VOLÚMENES

2. LONGITUDES, ÁREAS Y VOLÚMENES

2.1. LONGITUDES. ÁREAS Y VOLÚMENES EN PRISMAS Y CILINDROS
2.2. LONGITUDES. ÁREAS Y VOLÚMENES EN PIRÁMIDES Y CONOS
2.3. LONGITUDES. ÁREAS Y VOLÚMENES EN LA ESFERA
2.4. LONGITUDES, ÁREAS Y VOLÚMENES DE POLIEDROS REGULARES

3. INICIACIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

3.1. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN EL PLANO
3.2. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN EL ESPACIO DE TRES DIMENSIONES
3.3. ECUACIONES Y RECTAS Y PLANOS
3.4. ALGUNAS ECUACIONES

Resumen

La Geometría es una de las ramas más antiguas de las Matemáticas y su estudio nos ayuda a interpretar mejor la realidad que percibimos. Su nombre significa "*medida de la Tierra*". Medir es calcular longitudes, áreas y volúmenes. En este tema recordarás las fórmulas que estudiaste ya el año pasado y profundizarás sobre sus aplicaciones en la vida real.

Nos movemos en el espacio de dimensión tres, caminamos sobre una esfera (que por ser grande, consideramos plana), las casas son casi siempre ortoedros. La información que percibimos por medio de nuestros sentidos la interpretamos en términos geométricos. Precisamos de las fórmulas de áreas y volúmenes de los cuerpos geométricos para calcular las medidas de los muebles que caben en nuestro salón, o para hacer un presupuesto de la reforma de nuestra vivienda.

Muchas plantas distribuyen sus hojas buscando el máximo de iluminación y sus flores en forma esférica buscando un aprovechamiento óptimo del espacio. El átomo de hierro dispone sus electrones en forma de cubo, los sistemas de cristalización de los minerales adoptan formas poliédricas, los panales de las abejas son prismas hexagonales. Éstos son algunos ejemplos de la presencia de cuerpos geométricos en la naturaleza.

ORIGEN DE LA IMAGEN: WIKIPEDIA

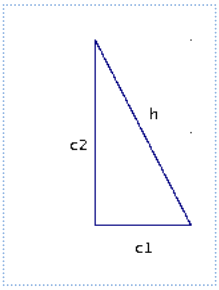
Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

1. TEOREMA DE PITÁGORAS Y TEOREMA DE TALES

1.1. Teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras en el plano

Ya sabes que:

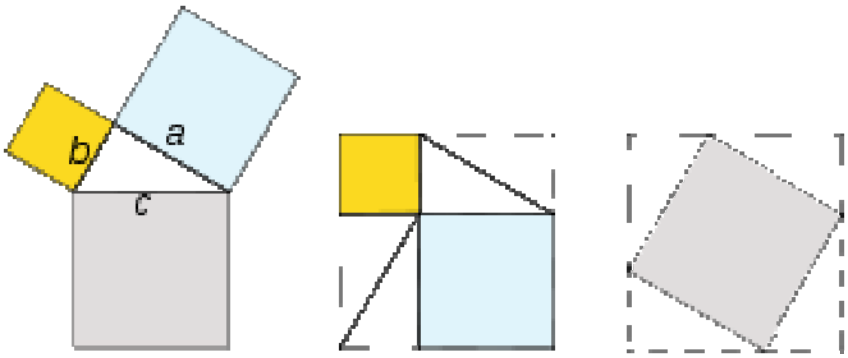


En un triángulo rectángulo llamamos **catetos** a los lados incidentes con el ángulo recto e **hipotenusa** al otro lado.

En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

Demostración:



Ejemplo:

- Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 6 *cm* y 8 *cm*, su hipotenusa vale 10 *cm*, ya que:

$$h = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \ cm.$$

Actividades resueltas

- *Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 dm y uno de sus catetos mide 12 dm, halla la medida del otro cateto:*

  Solución: Por el teorema de Pitágoras:

$$c = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{(13-12)\times(13+12)} = \sqrt{25} = 5 \ dm$$

Actividades propuestas

1. ¿Es posible encontrar un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 12 y 16 *cm* y su hipotenusa 30 *cm*? Si tu respuesta es negativa, halla la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 y 16 *cm*.

2. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:

a) 4 *cm* y 3 *cm* b) 1 *m* y 7 *m*

c) 2 *dm* y 5 dm d) 23,5 *km* y 47,2 *km*.

Utiliza la calculadora si te resulta necesaria.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

3. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:

a) 8 *cm* y 3 *cm* b) 15 *m* y 9 *m*

c) 35 *dm* y 10 *dm* d) 21,2 *km* y 11,9 *km*

4. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 5 *m*.

5. Calcula el área de un hexágono regular de lado 7 *cm*.

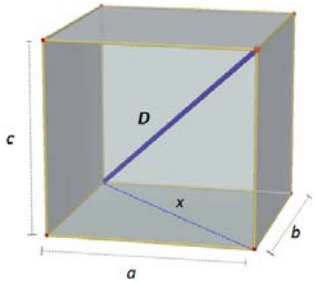
Teorema de Pitágoras en el espacio

Ya sabes que:

La diagonal de un ortoedro al cuadrado coincide con la suma de los cuadrados de sus aristas.

Demostración:

Sean *a, b* y *c* las aristas del ortoedro que suponemos apoyado en el rectángulo de dimensiones *a* , *b*.



Si *x* es la diagonal de este rectángulo, verifica que: $x^2 = a^2 + b^2$

El triángulo de lados *D, x, a* es rectángulo luego: $D^2 = x^2 + c^2$

Y teniendo en cuenta la relación que verifica *x:*

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Actividades resueltas

- *Calcula la longitud de la diagonal de un ortoedro de aristas 7, 9 y 12 cm.*

  $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$ = $7^2 + 9^2 + 12^2$ = 274. $D \approx$ 16,55 cm.

- *Las aristas de la base de una caja con forma de ortoedro miden 7 cm y 9 cm y su altura 12 cm. Estudia si puedes guardar en ella tres barras de longitudes 11 cm, 16 cm y 18 cm.*

  El rectángulo de la base tiene una diagonal *d* que mide: $d = \sqrt{7^2 + 9^2} = \sqrt{130} \approx 11{,}4$ cm

  Luego la barra más corta cabe apoyada en la base.

  La diagonal del ortoedro vimos en la actividad anterior que mide 16,55, luego la segunda barra si cabe, inclinada, pero la tercera, no.

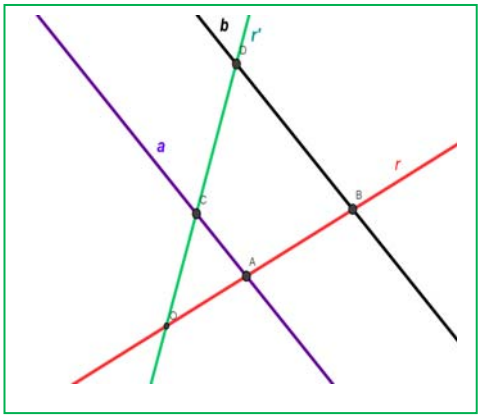
Actividades propuestas

6. Una caja tiene forma cúbica de 3 *cm* de arista. ¿Cuánto mide su diagonal?

7. Calcula la medida de la diagonal de una sala que tiene 8 metros de largo, 5 metros de ancho y 3 metros de altura.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

1.2. Teorema de Tales



Ya sabes que:

Dadas dos rectas, *r* y *r'*, que se cortan en el punto *O*, y dos rectas paralelas entre sí, *a* y *b*. La recta *a* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *A* y *C*, y la recta *b* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *B* y *D*. Entonces el Teorema de Tales afirma que los segmentos son proporcionales:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$$

Se dice que los triángulos *OAC* y *OBD* están en posición *Tales*. Son **semejantes**. Tienen un ángulo común (coincidente) y los lados proporcionales.

Actividades resueltas

- *Sean OAC y OBD dos triángulos en posición Tales. El perímetro de OBD es 20 cm, y OA mide 2 cm, AC mide 5 cm y OC mide 3 cm. Calcula las longitudes de los lados de OBD.*

Utilizamos la expresión: $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}$ sustituyendo los datos:

$\frac{2}{OB}=\frac{3}{OD}=\frac{5}{BD}=\frac{2+3+5}{20}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$, por lo que despejando, sabemos que: *OB* = 2·2 = 4 cm; *OD* = 3·2 = 6 cm, y *BD* = 5·2 = 10 cm. En efecto: 4 + 6 + 10 = 20 cm, perímetro del triángulo.

- *Cuenta la leyenda que Tales midió la altura de la pirámide de Keops comparando la sombra de la pirámide con la sombra de su bastón. Tenemos un bastón que mide 1 m, si la sombra de un árbol mide 12 m, y la del bastón, (a la misma hora del día y en el mismo momento), mide 0,8 m, ¿cuánto mide el árbol?*

Las alturas del árbol y del bastón son proporcionales a sus sombras, (forman triángulos en posición *Tales*), por lo que, si llamamos *x* a la altura del árbol podemos decir:

$\frac{0,8}{1}=\frac{12}{x}$. Por tanto *x* = 12/0,8 = 15 metros.

Actividades propuestas

8. En una foto hay un niño, que sabemos que mide 1,5 *m*, y un edificio. Medimos la altura del niño y del edificio en la foto, y resultan ser: 0,2 *cm* y 10 *cm*. ¿Qué altura tiene el edificio?

9. Se dibuja un hexágono regular. Se trazan sus diagonales y se obtiene otro hexágono regular. Indica la razón de semejanza entre los lados de ambos hexágonos.

10. En un triángulo regular *ABC* de lado, 1 *cm*, trazamos los puntos medios, *M* y *N*, de dos de sus lados. Trazamos las rectas *BN* y *CM* que se cortan en un punto *O*. ¿Son semejantes los triángulos *MON* y *COB*? ¿Cuál es la razón de semejanza? ¿Cuánto mide el lado *MN*?

11. Una pirámide regular hexagonal de lado de la base 3 *cm* y altura 10 *cm*, se corta por un plano a una distancia de 4 *cm* del vértice, con lo que se obtiene una nueva pirámide. ¿Cuánto miden sus dimensiones?

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

1.3. Proporcionalidad en longitudes, áreas y volúmenes

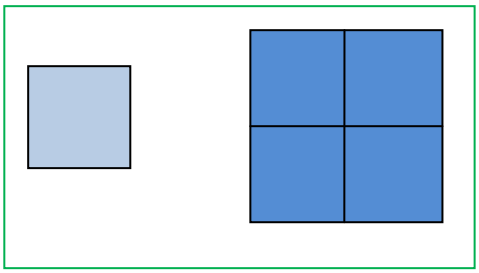
Ya sabes que:

Dos figuras son **semejantes** si las longitudes de elementos correspondientes son proporcionales. Al coeficiente de proporcionalidad se le llama **razón de semejanza**. En mapas, planos… a la razón de semejanza se la llama **escala**.

Áreas de figuras semejantes

Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es *k*, entonces la razón entre sus áreas es k^2.

Ejemplo:

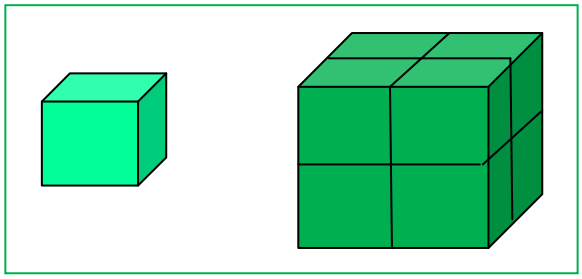


Observa la figura del margen. Si multiplicamos por 2 el lado del cuadrado pequeño, el área del cuadrado grande es $2^2 = 4$ veces la del pequeño.

Volúmenes de figuras semejantes

Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es *k*, entonces entre sus volúmenes es k^3.

Ejemplo:



Observa la figura del margen. Al multiplicar por 2 el lado del cubo pequeño se obtiene el cubo grande. El volumen del cubo grande es 8 (2^3) el del cubo pequeño.

Actividades resueltas

- *La torre Eiffel de París mide 300 metros de altura y pesa unos 8 millones de kilos. Está construida de hierro. Si encargamos un modelo a escala de dicha torre, también de hierro, que pese sólo un kilo, ¿qué altura tendrá? ¿Será mayor o menor que un lápiz?*

El peso está relacionado con el volumen. La torre Eiffel pesa 8 000 000 kilos, y queremos construir una, exactamente del mismo material que pese 1 kilo. Por tanto k^3 = 8000000/1 = 8 000 000, y k = 200. La razón de proporcionalidad entre las longitudes es de 200.

Si la Torre Eiffel mide 300 *m*, y llamamos *x* a lo que mide la nuestra tenemos: 300/*x* = 200. Despejamos *x* que resulta igual a *x* = 1,5 *m*. ¡Mide metro y medio! ¡Es mucho mayor que un lápiz!

Actividades propuestas

12. El diámetro de un melocotón es tres veces mayor que el de su hueso, y mide 8 *cm*. Calcula el volumen del melocotón, suponiendo que es esférico, y el de su hueso, también esférico. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre el volumen del melocotón y el del hueso?

13. En la pizzería tienen pizzas de varios precios: 1 €, 2 € y 3 €. Los diámetros de estas pizzas son: 15 *cm*, 20 *cm* y 30 *cm*, ¿cuál resulta más económica? Calcula la relación entre las áreas y compárala con la relación entre los precios.

14. Una maqueta de un depósito cilíndrico de 1000 litros de capacidad y 5 metros de altura, queremos que tenga una capacidad de 1 litro. ¿Qué altura debe tener la maqueta?

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

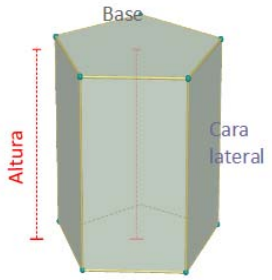
2. LONGITUDES, ÁREAS Y VOLÚMENES

2.1. Longitudes, áreas y volúmenes en prismas y cilindros

Recuerda que:

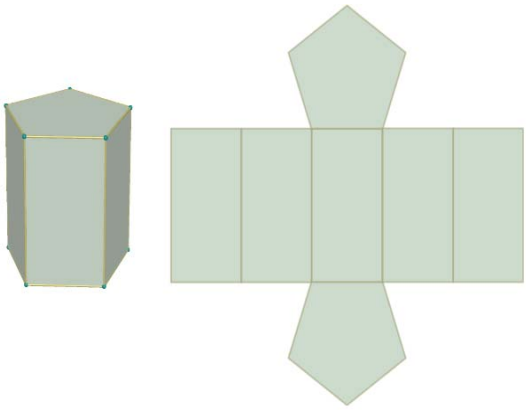
Prismas

Un ***prisma*** es un poliedro determinado por dos caras paralelas que son polígonos iguales y tantas caras laterales, que son paralelogramos, como lados tienen las bases.



Áreas lateral y total de un prisma

El **área lateral** de un prisma es la suma de las áreas de las caras laterales.



Como las caras laterales son paralelogramos de la misma altura, que es la altura del prisma, podemos escribir:

Área lateral = Suma de las áreas de las caras laterales =

= Perímetro de la base · altura del prisma.

Si denotamos por h la altura y por P_B el perímetro de la base:

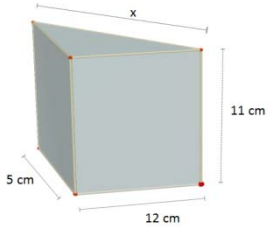
$$\text{Área lateral} = A_L = P_B \cdot h$$

El **área total** de un prisma es el área lateral más el doble de la suma del área de la base:

$$\text{Área total} = A_T = A_L + 2 \cdot A_B$$

Actividades resueltas

- *Calcula las áreas lateral y total de un prisma triangular recto de 11 cm de altura si su base es un triángulo rectángulo de catetos 12 cm y 5 cm.*



Calculamos en primer lugar la hipotenusa del triángulo de la base:

$$x^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow x = \sqrt{169} = 13 \quad cm$$

$$P_B = 12 + 5 + 13 = 30\ cm;\ A_B = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30\ cm^2$$

$$A_L = P_B \cdot h = 30 \cdot 11 = 330\ cm^2 \qquad A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 330 + 60 = 390\ cm^2$$

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

Volumen de un cuerpo geométrico. Principio de *Cavalieri*

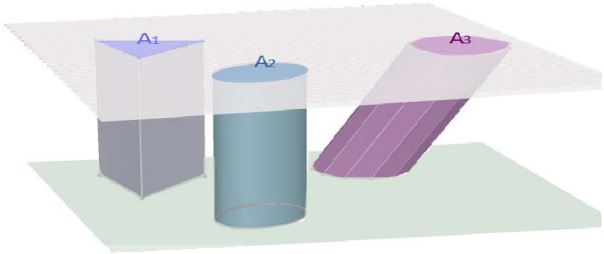
Recuerda que:

Bonaventura Cavalieri, matemático del siglo XVII enunció el principio que lleva su nombre y que afirma:

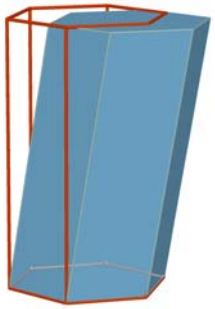
"Si dos cuerpos tiene la misma altura y al cortarlos por planos paralelos a sus bases, se obtienen secciones con el mismo área, entonces los volúmenes de los dos cuerpos son iguales"

Ejemplo:

En la figura adjunta las áreas de las secciones A_1, A_2, A_3, producidas por un plano paralelo a las bases, son iguales, entonces, según este principio los volúmenes de los tres cuerpos son también iguales.



Volumen de un prisma y de un cilindro



El volumen de un prisma recto es el producto del área de la base por la altura. Además, según el principio de *Cavalieri*, el volumen de un prisma oblicuo coincide con el volumen de un prisma recto con la misma base y altura. Si denotamos por *V* este volumen, A_B el área de la base y *h* la altura:

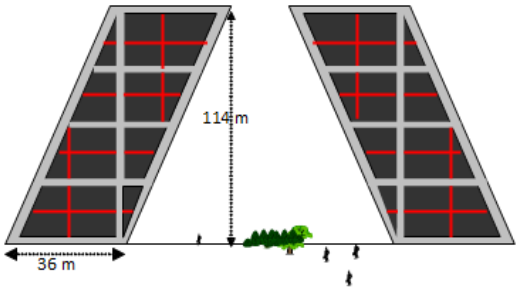
$$\text{Volumen prisma} = V = A_B \cdot h$$

También el volumen de un cilindro, recto u oblicuo es área de la base por altura. Si llamamos *R* al radio de la base, A_B el área de la base y *h* la altura, el volumen se escribe:

$$\text{Volumen cilindro} = V = A_B \cdot h = \pi R^2 \cdot h$$

Actividades resueltas

- *Las conocidas torres Kio de Madrid son dos torres gemelas que están en el Paseo de la Castellana, junto a la Plaza de Castilla. Se caracterizan por su inclinación y representan una puerta hacia Europa.*
  Cada una de ellas es un prisma oblicuo cuya base es un cuadrado de 36 metros de lado y tienen una altura de 114 metros. El volumen interior de cada torre puede calcularse con la fórmula anterior:



$$V = A_B \cdot h = 36^2 \cdot 114 = 147\,744\ m^3$$

Actividades propuestas

15. Calcula el volumen de un prisma recto de 20 *dm* de altura cuya base es un hexágono de 6 *dm* de lado.

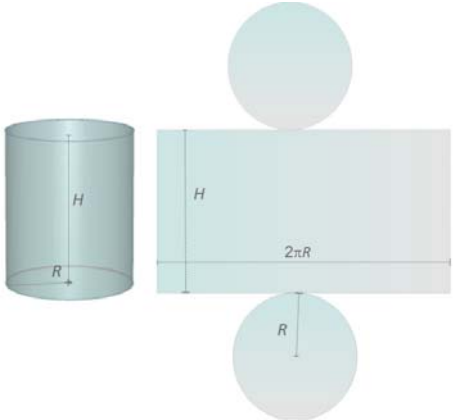
16. Calcula la cantidad de agua que hay en un recipiente con forma de cilindro sabiendo que su base tiene 10 *cm* de diámetro y que el agua alcanza 12 *dm* de altura.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

Áreas lateral y total de un cilindro

El cilindro es un cuerpo geométrico desarrollable. Si recortamos un cilindro recto a lo largo de una generatriz, y lo extendemos en un plano, obtenemos dos círculos y una región rectangular. De esta manera se obtiene su desarrollo.

A partir de éste, podemos ver que el área lateral de cilindro está determinada por el área del rectángulo que tiene como dimensiones la longitud de la circunferencia de la base y la altura del cilindro.



Supondremos que la altura del cilindro es H y que R es el radio de la base con lo que el área lateral A_L es:

$$A_L = \text{Longitud de la base} \cdot \text{Altura} = (2\pi\ R)\cdot H\ = 2\pi RH$$

Si a la expresión anterior le sumamos el área de los dos círculos que constituyen las bases, obtenemos el área total del cilindro.

$$A_T = A_L + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi RH + 2\pi R^2$$

2.2. Longitudes, áreas y volúmenes en pirámides y conos

Recuerda que:

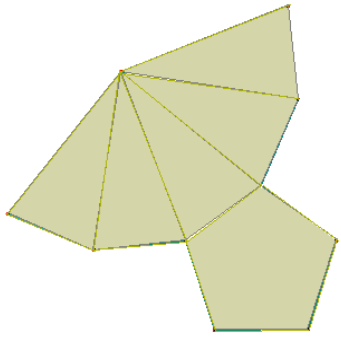
Áreas lateral y total de una pirámide y de un tronco de pirámide regulares

Una **pirámide** es un poliedro determinado por una cara poligonal denominada base y tantas caras triangulares con un vértice común como lados tiene la base.

El área lateral de una pirámide regular es la suma de las áreas de las caras laterales.

Son triángulos isósceles iguales por lo que, si la arista de la base mide b, el apotema de la pirámide es Ap y la base tiene n lados, este área lateral es:

Desarrollo de pirámide pentagonal regular



$$\text{Área lateral} = A_L = n\cdot\frac{b\cdot Ap}{2} = \frac{n\cdot b\cdot Ap}{2}$$

y como $n \cdot b$ = Perímetro de la base

$$A_L = \frac{\text{Perímetro de la base}\ .\ \text{Apotema de la pirámide}}{2} = \frac{\text{Perímetro de la base}}{2}\cdot \text{Apotema}$$

El área lateral de una pirámide es igual al semi-perímetro por el apotema.

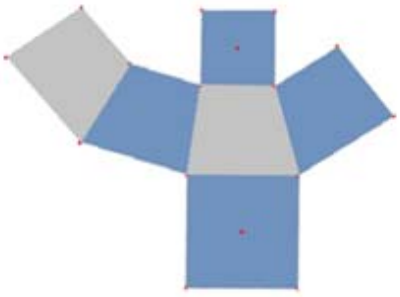
El área total de una pirámide es el área lateral más el área de la base:

$$\text{Área total} = A_T = A_L + A_B$$

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

Un tronco de pirámide regular es un cuerpo geométrico desarrollable. En su desarrollo aparecen tantas caras laterales como lados tienen las bases. Todas ellas son trapecios isósceles.

Desarrollo de tronco de pirámide cuadrangular



Si B es el lado del polígono de la base mayor, b el lado de la base menor, n el número de lados de las bases y Ap es la altura de una cara lateral

$$\text{Área lateral} = A_L = n \cdot \frac{(B+b).Ap}{2} = \frac{(P_B+P_b).Ap}{2} =$$

$$= \frac{\text{Suma de perímetro de las bases} \ . \ \text{Apotema del tronco}}{2}$$

El área total de un tronco de pirámide regular es el área lateral más la suma de áreas de las bases:

$$\text{Área total} = A_T = A_L + A_B + A_b$$

Actividades resueltas

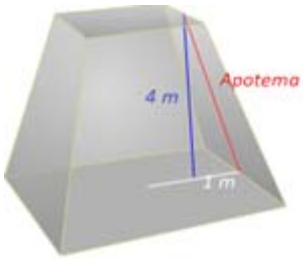
- *Calculemos el área total de un tronco de pirámide regular de 4 m de altura si sabemos que las bases paralelas son cuadrados de 4 m y de 2 m de lado.*

En primer lugar calculamos el valor del apotema. Teniendo en cuenta que el tronco es regular y que las bases son cuadradas se forma un triángulo rectángulo en el que se cumple:

$$Ap^2 = 4^2 + 1^2 = 17 \Rightarrow Ap = \sqrt{17} \approx 4{,}12 \ m$$

$$A_L = \frac{(P_B + P_b)\cdot Ap}{2} = \frac{(16+8)\cdot 4{,}12}{2} = 49{,}44 \ m^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 49{,}44 + 16 + 4 = 69{,}44 \ m^2$$



Actividades propuestas

17. Calcula las áreas lateral y total de un prisma hexagonal regular sabiendo que las aristas de las bases miden 3 *cm* y cada arista lateral 2 *dm*.

18. El área lateral de un prisma regular de base cuadrada es 16 m^2 y tiene 10 *m* de altura. Calcula el perímetro de la base.

19. El lado de la base de una pirámide triangular regular es de 7 *cm* y la altura de la pirámide 15 *cm*. Calcula el apotema de la pirámide y su área total.

20. Calcula el área lateral de un tronco de pirámide regular, sabiendo que sus bases son dos octógonos regulares de lados 3 y 8 *dm* y que la altura de cada cara lateral es de 9 *dm*.

21. Si el área lateral de una pirámide cuadrangular regular es 104 cm^2, calcula el apotema de la pirámide y su altura.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

Áreas lateral y total de un cono

Recuerda que:

También el cono es un cuerpo geométrico desarrollable. Al recortar siguiendo una línea generatriz y la circunferencia de la base, obtenemos un círculo y un sector circular con radio igual a la generatriz y longitud de arco igual a la longitud de la circunferencia de la base.

Llamemos ahora *R* al radio de la base y *G* a la generatriz. El área lateral del cono es el área de sector circular obtenido. Para calcularla pensemos que esta área debe ser directamente proporcional a la longitud de arco que a su vez debe coincidir con la longitud de la circunferencia de la base. Podemos escribir entonces:

$$\frac{A\ Lateral\ del\ cono}{Longitud\ de\ arco\ correspondiente\ al\ sector} = \frac{A\ total\ del\ círculo\ de\ radio\ G}{Longitud\ de\ la\ circunferencia\ de\ radio\ G}$$

Es decir: $\frac{A_L}{2\pi R} = \frac{\pi\ G^2}{2\pi G}$ y despejando A_L tenemos:

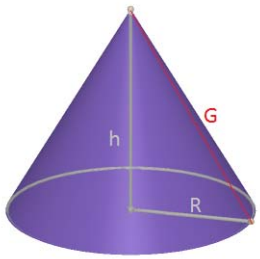
$$A_L = \frac{2\pi R\ \pi\ G^2}{2\pi G} = \pi R G$$

Si a la expresión anterior le sumamos el área del círculo de la base, obtenemos el área total del cono.

$$A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2$$

Actividades resueltas

- *Calcula el área total de un cono de 12 dm de altura, sabiendo que la circunferencia de la base mide 18,84 dm .(Toma 3,14 como valor de π)*



Calculamos en primer lugar el radio *R* de la base:

$$2\pi R = 18{,}84 \Rightarrow \quad R = \frac{18{,}84}{2\pi} \approx \frac{18{,}84}{6{,}28} = 3\ dm.$$

Calculamos ahora la generatriz *G*:

$$G = \sqrt{R^2 + h^2} \Rightarrow \quad G = \sqrt{3^2 + 12^2} = \sqrt{153} \approx 12{,}37\ dm.$$

Entonces $A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2 = 3{,}14 \cdot 3 \cdot 12{,}37 + 3{,}14 \cdot 3^2 \approx 144{,}79\ dm^2$.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

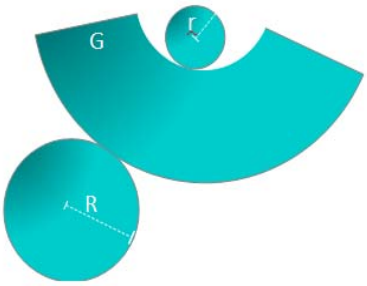
Áreas lateral y total de un tronco de cono

Recuerda que:

Al cortar un cono por un plano paralelo a la base, se obtiene un tronco de cono. Al igual que el tronco de pirámide, es un cuerpo desarrollable y su desarrollo lo constituyen los dos círculos de las bases junto con un trapecio circular, cuyas bases curvas miden lo mismo que las circunferencias de las bases.

Llamando *R* y *r* a los radios de las bases y *G* a la generatriz resulta:

$$A_L = \frac{(2\pi R + 2\pi r)G}{2} = \frac{2(\pi R + \pi r)G}{2} = (\pi R + \pi r)G$$



Si a la expresión anterior le sumamos las áreas de los círculos de las bases, obtenemos el área total del tronco de cono:

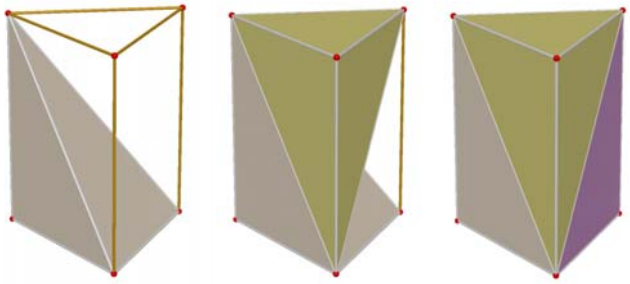
$$A_T = A_L + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2$$

Volumen de una pirámide y de un cono

Recuerda que:

También en los casos de una pirámide o cono, las fórmulas del volumen coinciden en cuerpos rectos y oblicuos.

El volumen de una pirámide es la tercera parte del volumen de un prisma que tiene la misma base y altura.



$$\text{Volumen pirámide} = V = \frac{A_B \cdot h}{3}$$

Si comparamos cono y cilindro con la misma base y altura, concluimos un resultado análogo

$$\text{Volumen cono} = V = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3}$$

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

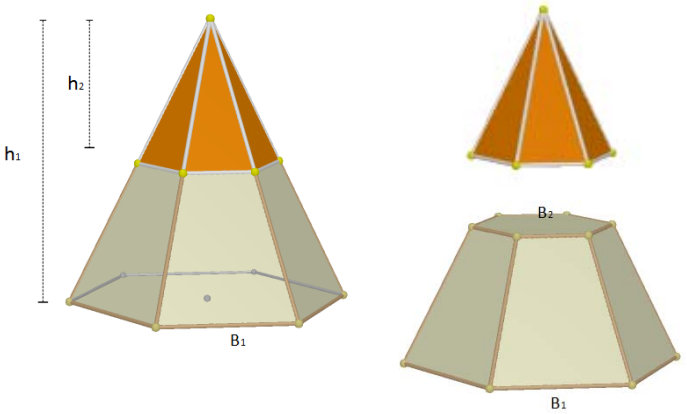
Volumen de un tronco de pirámide y de un tronco de cono

Existe una fórmula para calcular el volumen de un tronco de pirámide regular pero la evitaremos. Resulta más sencillo obtener el volumen de un tronco de pirámide regular restando los volúmenes de las dos pirámides a partir de las que se obtiene.

Si representamos por A_{B1} y A_{B2} las áreas de las bases y por h_1 y h_2 las alturas de las pirámides citadas, el volumen del tronco de pirámide es:

Volumen tronco de pirámide =

$$V = \frac{A_{B1} \cdot h_1}{3} - \frac{A_{B2} \cdot h_2}{3}$$



El volumen del tronco de cono se obtiene de modo parecido. Si R_1 y R_2 son los radios de las bases de los conos que originan el tronco y h_1 y h_2 sus alturas, el volumen del tronco de cono resulta:

$$\textit{Volumen tronco de cono} = V = \frac{\pi \cdot R_1^2 \cdot h_1}{3} - \frac{\pi \cdot R_2^2 \cdot h_2}{3}$$

Actividades resueltas

- *Calcula el volumen de un tronco de pirámide regular de 10 cm de altura si sus bases son dos hexágonos regulares de lados 8 cm y 3 cm.*

Primer paso: calculamos las apotemas de los hexágonos de las bases:

Para cada uno de estos hexágonos:

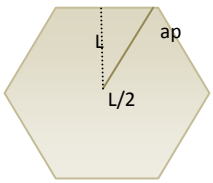


Figura 1

$$L^2 = ap^2 + (L/2)^2 \Rightarrow ap^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{3L^2}{4} \Rightarrow ap = \frac{\sqrt{3}\,L}{2}$$

Luego las apotemas buscadas miden: $ap_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6\,cm;\ ap_2 = \frac{7\sqrt{3}}{2} \approx 6{,}1\,cm$

Como segundo paso, calculamos el apotema del tronco de pirámide

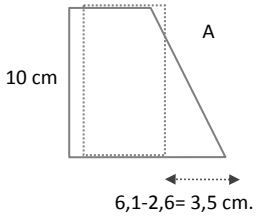


Figura 2

$$A^2 = 10^2 + 3{,}5^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{112{,}25} \approx 10{,}6\,cm$$

En tercer lugar, calculamos el valor de los segmentos *x, y* de la figura 3 que nos servirán para obtener las alturas y apotemas de las pirámides que generan el tronco con

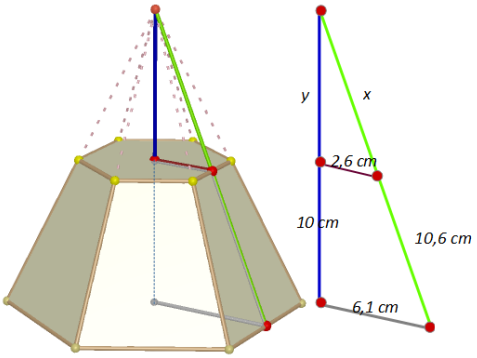


Figura 3

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

el que trabajamos:

Por el teorema de *Tales*: $\frac{x}{2,6}=\frac{10,6+x}{6,1}\Rightarrow 6,1\,x=(10,6+x)2,6\Rightarrow 6,1\,x-2,6x=27,56\Rightarrow$

$$x=\frac{27,56}{3,5}\approx 7,9\,cm$$

Entonces el apotema de la pirámide grande es 10,6 + 7,9=18,5 cm y el de la pequeña 7,9 *cm*. Y aplicando el teorema de *Pitágoras*:

$$y^2=x^2-2,6^2=7,9^2-2,6^2=55,65\Rightarrow y=\sqrt{55,65}\approx 7,5\ cm$$

Luego las alturas de las pirámides generadoras del tronco miden 10 + 7,5 = 17,5 *cm* y 7,5 *cm.*

Por último calculamos el volumen del tronco de pirámide:

$$V=\frac{A_{B1}\cdot h_1}{3}-\frac{A_{B2}\cdot h_2}{3}=\frac{1}{3}.\frac{48\cdot 18,5\cdot 17,5}{2}-\frac{1}{3}.\frac{18\cdot 7,9\cdot 7,5}{2}=\frac{15540}{6}-\frac{1066.5}{6}=2412,25\,cm^3$$

Actividades propuestas

22. Una columna cilíndrica tiene 35 *cm* de diámetro y 5 *m* de altura. ¿Cuál es su área lateral?

23. El radio de la base de un cilindro es de 7 *cm* y la altura es el triple del diámetro. Calcula su área total.

24. Calcula el área lateral de un cono recto sabiendo que su generatriz mide 25 *dm* y su radio de la base 6 *dm*.

25. La circunferencia de la base de un cono mide 6,25 *m* y su generatriz 12 *m*. Calcula el área total.

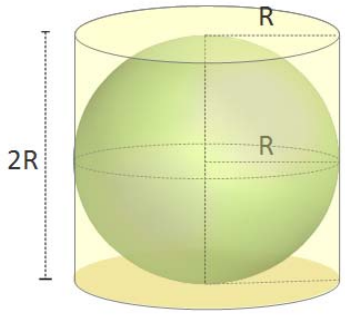
Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

2.3. Longitudes, áreas y volúmenes en la esfera

Recuerda que:

Área de una esfera.

La esfera **no** es un cuerpo geométrico desarrollable, por lo que es más complicado que en los casos anteriores encontrar una fórmula para calcular su área.



Arquímedes demostró que el área de una esfera es igual que el área lateral de un cilindro circunscrito a la esfera, es decir un cilindro con el mismo radio de la base que el radio de la esfera y cuya altura es el diámetro de la esfera.

Si llamamos *R* al radio de la esfera:

$$A_T = (2\pi R)\cdot(2R) = 4\pi R^2$$

El área de una esfera equivale al área de cuatro círculos máximos.

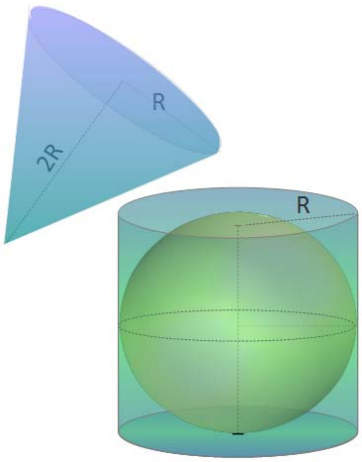
Actividades propuestas

26. Una esfera tiene 4 *m* de radio. Calcula:

a) La longitud de la circunferencia máxima;

b) El área de la esfera.

Volumen de la esfera



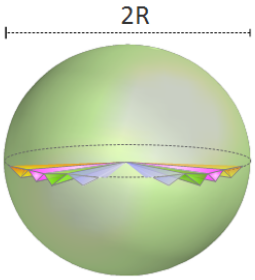
Volvamos a pensar en una esfera de radio *R* y en el cilindro que la circunscribe. Para rellenar con agua el espacio que queda entre el cilindro y la esfera, se necesita una cantidad de agua igual a un tercio del volumen total del cilindro circunscrito.

Se deduce entonces que la suma de los volúmenes de la esfera de radio *R* y del cono de altura *2R* y radio de la base *R*, coincide con el volumen del cilindro circunscrito a la esfera de radio *R*. Por tanto:

$$\text{Volumen}_{\text{esfera}} = \text{Volumen}_{\text{cilindro}} - \text{Volumen}_{\text{cono}} \Rightarrow$$

$$\text{Volumen}_{\text{esfera}} = \pi R^2(2R) - \frac{\pi R^2(2R)}{3} = \frac{6\pi R^3 - 2\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF



Existen demostraciones más rigurosas que avalan este resultado experimental que hemos descrito. Así por ejemplo, el volumen de la esfera se puede obtener como suma de los volúmenes de pirámides que la recubren, todas ellas de base triangular sobre la superficie de la esfera y con vértice en el centro de la misma.

Actividades propuestas

27. (CDI Madrid 2008) El depósito de gasoil de la casa de Irene es un cilindro de 1 *m* de altura y 2 *m* de diámetro. Irene ha llamado al suministrador de gasoil porque en el depósito solamente quedan 140 litros.

a. ¿Cuál es, en dm^3, el volumen del depósito? (Utiliza 3,14 como valor de π).
b. Si el precio del gasoil es de 0,80 € cada litro, ¿cuánto deberá pagar la madre de Irene por llenar el depósito?

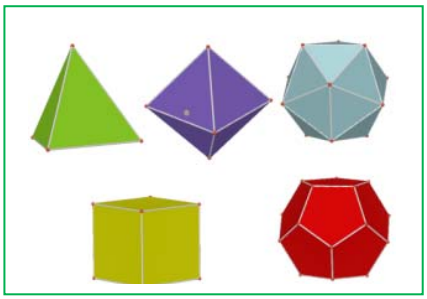
28. Comprueba que el volumen de la esfera de radio 4 *dm* sumado con el volumen de un cono del mismo radio de la base y 8 *dm* de altura, coincide con el volumen de un cilindro que tiene 8 *dm* de altura y 4 *dm* de radio de la base.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

2.4. Longitudes, áreas y volúmenes de poliedros regulares

Recuerda que:

Un poliedro regular es un poliedro en el que todas sus caras son polígonos regulares iguales y en el que sus ángulos poliedros son iguales.

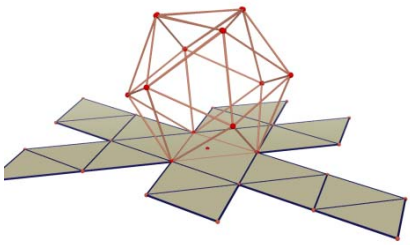


Hay cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro

Área total de un poliedro regular.

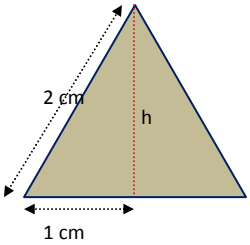
Como las caras de los poliedros regulares son iguales, el cálculo del área total de un poliedro regular se reduce a calcular el área de una cara y después multiplicarla por el número de caras.

Actividades resueltas



Calcula el área total de un icosaedro de 2 cm de arista.

Todas sus caras son triángulos equiláteros de 2 *cm* de base. Calculamos la altura *h* que divide a la base en dos segmentos iguales



$$h^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow h^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow h = \sqrt{3}\ cm$$

Luego el área de una cara es:

$$A_{triángulo} = \frac{b.h}{2} = \frac{2.\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\ cm^2 \text{ y por tanto Área icosaedro} = 20\ cm^2$$

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

3. INICIACIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

3.1. Puntos y vectores

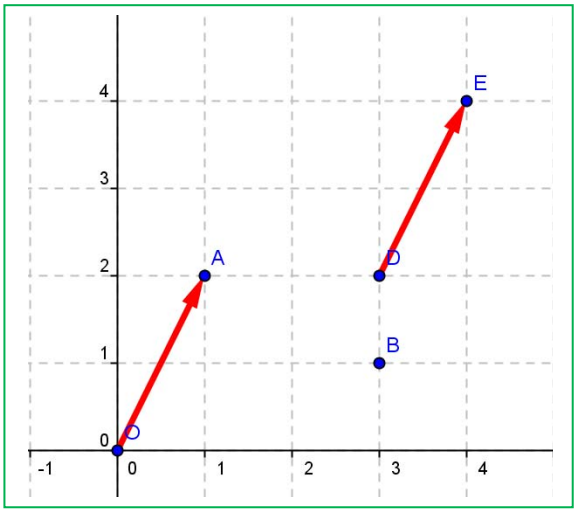
En el plano

Ya sabes que

Un conjunto formado por el **origen** *O*, los dos **ejes de coordenadas** y la **unidad de medida** es un **sistema de referencia cartesiano**.

Las **coordenadas** de un **punto** *A* son un par ordenado de números reales **(*x*, *y*)**, siendo "***x***" la primera coordenada o **abscisa** e "***y***" la segunda coordenada u **ordenada**.

Dados dos puntos, $D(d_1, d_2)$ y $E(e_1, e_2)$, las componentes del vector de origen *D* y extremo *E*, ***DE***, vienen dadas por $\boldsymbol{DE} = (e_1 - d_1, e_2 - d_2)$.



Ejemplo:

Las coordenadas de los puntos, de la figura son:

O(0, 0), *A*(1, 2), *B*(3, 1), *D*(3, 2) y *E*(4, 4)

Las componentes del vector ***DE*** son

$$\boldsymbol{DE} = (4 - 3, 4 - 2) = (1, 2)$$

Las componentes del vector ***OA*** son:

$$\boldsymbol{OA} = (1 - 0, 2 - 0) = (1, 2).$$

DE y ***OA*** son representantes del mismo vector libre de componentes (1, 2).

En el espacio de dimensión tres

Las **coordenadas** de un **punto** *A* son una terna ordenada de números reales **(*x*, *y*, *z*)**, siendo "***z***" la altura sobre el plano *OXY*.

Dados dos puntos, $D(d_1, d_2, d_3)$ y $E(e_1, e_2, e_3)$, las componentes del vector de origen *D* y extremo *E*, ***DE***, vienen dadas por $\boldsymbol{DE} = (e_1 - d_1, e_2 - d_2, e_3 - d_3)$.

Ejemplo:

Las coordenadas de puntos en el espacio son:

O(0, 0, 0), *A*(1, 2, 3), *B*(3, 1, 7), *D*(3, 2, 1) y *E*(4, 4, 4)

Las componentes del vector ***DE*** son: $\boldsymbol{DE} = (4 - 3, 4 - 2, 4 - 1) = (1, 2, 3)$

Las componentes del vector ***OA*** son: $\boldsymbol{OA} = (1 - 0, 2 - 0, 3 - 0) = (1, 2, 3)$.

DE y ***OA*** son representantes del mismo vector libre de componentes (1, 2, 3)

Actividades propuestas

29. Representa en un sistema de referencia en el espacio de dimensión tres los puntos:

O(0, 0, 0), *A*(1, 2, 3), *B*(3, 1, 7), *D*(3, 2, 1) y *E*(4, 4, 4) y vectores: ***DE*** y ***OA***.

30. El vector de componentes ***u*** = (2, 3) y origen *A* = (1, 1), ¿qué extremo tiene?

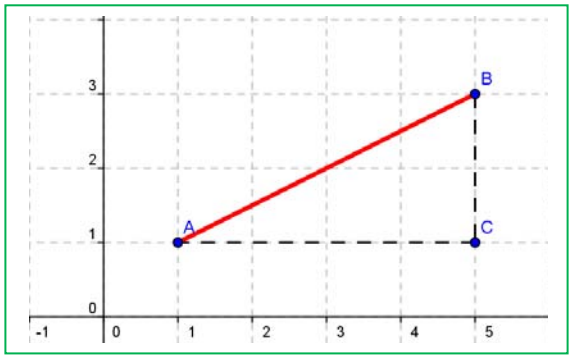
Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

3.2. Distancia entre dos puntos

En el plano

La distancia entre dos puntos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ es:

$$D = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$



Ejemplo:

Por el Teorema de *Pitágoras* sabemos que la distancia al cuadrado entre los puntos $A = (1, 1)$ y $B = (5, 3)$ es igual a:

$$D^2 = (5 - 1)^2 + (3 - 1)^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

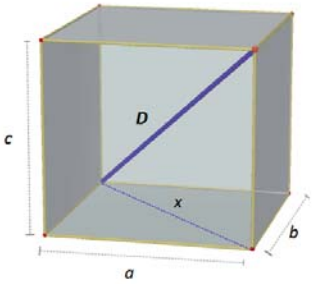
ya que el triángulo *ABC* es rectángulo de catetos 4 y 2.

Luego $D \approx 4{,}47$.

En el espacio de dimensión tres

La distancia entre dos puntos $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$ es igual a:

$$D = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$



Ejemplo:

La distancia al cuadrado entre los puntos $A = (1, 1, 2)$ y $B = (5, 3, 8)$ es igual, por el Teorema de *Pitágoras* en el espacio, a

$D^2 = (5 - 1)^2 + (3 - 1)^2 + (8 - 2)^2 = 4^2 + 2^2 + 6^2 = 16 + 4 + 36 = 56$.

Luego $D \approx 7{,}5$.

Actividades propuestas

31. Calcula la distancia entre los puntos $A(6, 2)$ y $B(3, 9)$.

32. Calcula la distancia entre los puntos $A(6, 2, 5)$ y $B(3, 9, 7)$.

33. Calcula la longitud del vector de componentes $\boldsymbol{u} = (3, 4)$

34. Calcula la longitud del vector de componentes $\boldsymbol{u} = (3, 4, 1)$.

35. Dibuja un cuadrado de diagonal el punto $O(0, 0)$ y $A(3, 3)$. ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cuadrado? Calcula la longitud del lado y de la diagonal de dicho cuadrado.

36. Dibuja un cubo de diagonal $O(0, 0, 0)$ y $A(3, 3, 3)$. ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cubo? Ya sabes, son 8 vértices. Calcula la longitud de la arista, de la diagonal de una cara y de la diagonal del cubo.

37. Sea $X(x, y)$ un punto genérico del plano, y $O(0, 0)$ el origen de coordenadas, escribe la expresión de todos los puntos X que distan de O una distancia D.

38. Sea $X(x, y, z)$ un punto genérico del espacio, y $O(0, 0, 0)$ el origen de coordenadas, escribe la expresión de todos los puntos X que distan de O una distancia D.

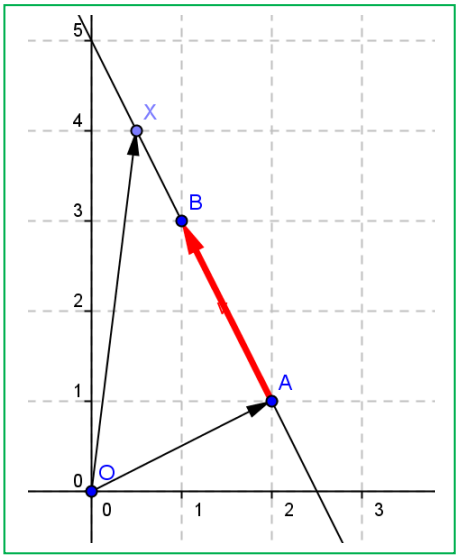
Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

3.3. Ecuaciones y rectas y planos

Ecuaciones de la recta en el plano.

Ya sabes que la **ecuación de una recta** en el plano es: $y = mx + n$. Es la expresión de una recta como función. Esta ecuación se denomina **ecuación explícita** de la recta.

Si pasamos todo al primer miembro de la ecuación, nos queda una ecuación: $ax + by + c = 0$, que se denomina **ecuación implícita** de la recta.



Ecuación vectorial: También una recta queda determinada si conocemos un punto: $A(a_1, a_2)$ y un vector de dirección $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$. Observa que el vector $\boldsymbol{OX}$ puede escribirse como suma del vector $\boldsymbol{OA}$ y de un vector de la misma dirección que $\boldsymbol{v}$, $t\boldsymbol{v}$. Es decir:

$$\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OA} + t\boldsymbol{v},$$

donde a t se le denomina parámetro. Para cada valor de t, se tiene un punto distinto de la recta. Con coordenadas quedaría:

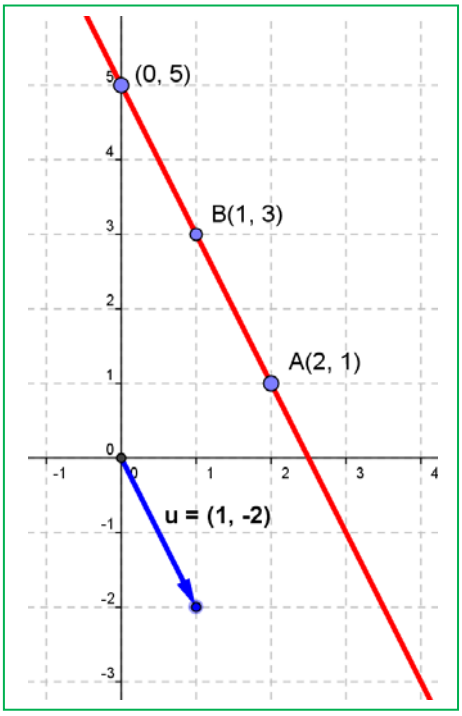
$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$$

que es la **ecuación paramétrica** de la recta.

Paralelismo: Dos rectas $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ son paralelas si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$, y dos rectas r: $\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OA} + t\boldsymbol{v}$ y r: $\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OB} + t\boldsymbol{w}$ son paralelas si $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{w}$ pues en ambos casos, así tienen la misma dirección.

Perpendicularidad: Dos rectas $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ son perpendiculares si $a \cdot a' + b \cdot b' = 0$, y dos rectas r: $\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OA} + t\boldsymbol{v}$ y r: $\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OB} + t\boldsymbol{w}$ son perpendiculares si $v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 = 0$, pues en esos casos puedes comprobar gráficamente que sus direcciones son ortogonales.

Actividades resueltas



- *De la recta de ecuación explícita* $y = -2x + 5$, conocemos la pendiente, -2, y la ordenada en el origen, 5. La pendiente nos da un vector de dirección de la recta, en general $(1, m)$, y en este ejemplo: $(1, -2)$. La ordenada en el origen nos proporciona un punto, en general, el $(0, n)$, y en este ejemplo, $(0, 5)$. La ecuación paramétrica de esta recta es:

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 5 - 2t \end{cases}$$

  Su ecuación implícita es: $-2x - y + 5 = 0$.

- *Escribe la ecuación paramétrica de la recta* que pasa por el punto $A(2, 1)$ y tiene como vector de dirección $\boldsymbol{v} = (1, 2)$.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

- *Escribe la ecuación de la recta* que pasa por los puntos *A*(2, 1) y *B*(1, 3). Podemos tomar como vector de dirección el vector ***AB*** = (1 – 2, 3 – 1) = (–1, 2), y escribir su ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

La recta es, en los tres ejemplos, la misma, la de la figura. Con ello podemos observar que una recta puede tener muchas ecuaciones paramétricas dependiendo del punto y del vector de dirección que se tome. Pero eliminando el parámetro y despejando "*y*" llegamos a una única ecuación explícita.

Actividades propuestas

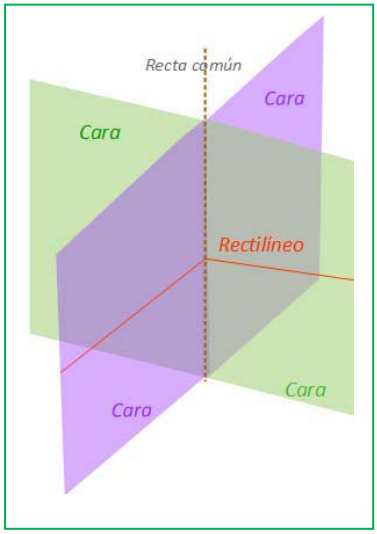
39. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A*(6, 2) y *B*(3, 9), de forma explícita, implícita y paramétrica. Represéntala gráficamente.

40. Representa gráficamente la recta *r*: –2*x* – *y* + 5 = 0. Comprueba que el vector (–2, –1) es perpendicular a la recta. Representa gráficamente la recta *s*: *x* – 2*y* = 0 y comprueba que es perpendicular a *r*.

41. Representa gráficamente la recta *r*: –2*x* – *y* + 5 = 0. Representa gráficamente las rectas: –2*x* – *y* = 0, –2*x* – *y* = 1, y comprueba que son paralelas a *r*.

Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio.

La ecuación **implícita de un plano** es: *ax* + *by* + *cz* + *d* = 0. Observa que es parecida a la ecuación implícita de la recta pero con una componente más.



La **ecuación vectorial de una recta** en el espacio es: ***OX*** = ***OA*** + *t**v***, aparentemente igual a la ecuación vectorial de una recta en el plano, pero al escribir las coordenadas, ahora puntos y vectores tiene tres componentes:

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$$

Una recta también puede venir dada como intersección de dos planos:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Dos puntos determinan una recta y tres puntos determinan un plano.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- *Escribe la ecuación de la recta en el espacio que pasa por los puntos A(1, 2, 3) y B(3, 7, 1).*

Tomamos como vector de dirección de la recta el vector ***AB*** = (3 – 1, 7 – 2, 1 – 3) = (2, 5, –2) y como punto, por ejemplo el *A*, entonces:

$$\begin{cases} x = 1 + t2 \\ y = 2 + t5 \\ z = 3 - t2 \end{cases}$$

Podemos encontrar las ecuaciones de dos planos que se corten en dicha recta, eliminando *t* en dos ecuaciones. Por ejemplo, sumando la primera con la tercera se tiene: $x + z = 4$. Multiplicando la primera ecuación por 5, la segunda por 2 y restando, se tiene: $5x – 2y = 1$. Luego otra ecuación de la recta, como intersección de dos planos es:

$$\begin{cases} x + z = 4 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$$

- *Escribe la ecuación del plano que pasa por los puntos A y B de la actividad anterior, y C(2, 6, 2).*

Imponemos a la ecuación $ax + by + cz + d = 0$ que pase por los puntos dados:

$a + 2b + 3c + d = 0$

$3a + 7b + c + d = 0$

$2a + 6b + 2c + d = 0.$

Restamos a la segunda ecuación la primera, y a la tercera, también la primera:

$a + 2b + 3c + d = 0$

$2a + 5b – 2c = 0$

$a + 4b – c = 0$

Multiplicamos por 2 la tercera ecuación y le restamos la segunda:

$a + 2b + 3c + d = 0$

$a + 4b – c = 0$

$3b = 0$

Ya conocemos un coeficiente, $b = 0$. Lo sustituimos en las ecuaciones:

$a + 3c + d = 0$

$a – c = 0$

Vemos que $a = c$, que sustituido en la primera: $4c + d = 0$. Siempre, al tener 3 ecuaciones y 4 coeficientes, tendremos una situación como la actual, en que lo podemos resolver salvo un factor de proporcionalidad. Si $c = 1$, entonces $d = –4$. Luego $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ y $d = –4$. Es el plano de ecuación:

$$x + z = 4$$

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

plano que ya habíamos obtenido en la actividad anterior.

Actividades propuestas

42. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(6, 2, 5)$ y $B(3, 9, 7)$, de forma explícita, y como intersección de dos planos.

43. Escribe las ecuaciones de los tres planos coordenados.

44. Escribe las ecuaciones de los tres ejes coordenados en el espacio.

45. En el cubo de diagonal $O(0, 0, 0)$ y $A(6, 6, 6)$ escribe las ecuaciones de los planos que forman sus caras. Escribe las ecuaciones de todas sus aristas, y las coordenadas de sus vértices.

3.4. Algunas ecuaciones

Actividades resueltas

- ¿Qué puntos verifican la ecuación $x^2 + y^2 = 1$?

¡Depende! Depende de si estamos en un plano o en el espacio.

En el plano, podemos ver la ecuación como que el cuadrado de la distancia de un punto genérico $X(x, y)$ al origen $O(0, 0)$ es siempre igual a 1:

$$D^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

El lugar de todos los puntos del plano que distan 1 del origen es la circunferencia de centro $O(0, 0)$ y radio 1.

En el espacio el punto genérico $X(x, y, z)$ tiene tres coordenadas, y $O(0, 0, 0)$, también. No es una circunferencia, ni una esfera. ¿Y qué es? Lo que está claro es que si cortamos por el plano OXY, ($z = 0$) tenemos la circunferencia anterior. ¿Y si cortamos por el plano $z = 3$? También una circunferencia. Es un cilindro. El cilindro de eje, el eje vertical, y de radio de la base 1.

- ¿Qué puntos verifican la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

Ahora sí. Sí podemos aplicar la distancia de un punto genérico $X(x, y, z)$ al origen $O(0, 0, 0)$,

$$D^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Es la ecuación de la superficie esférica de centro el origen y radio 1.

Actividades propuestas

46. Escribe la ecuación del cilindro de eje el eje OZ y radio 2.

47. Escribe la ecuación de la esfera de centro el origen de coordenadas y radio 2.

48. Escribe la ecuación del cilindro de eje, la recta $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ y radio 1.

49. Escribe la ecuación de la circunferencia en el plano de centro $A(2, 5)$ y radio 2.

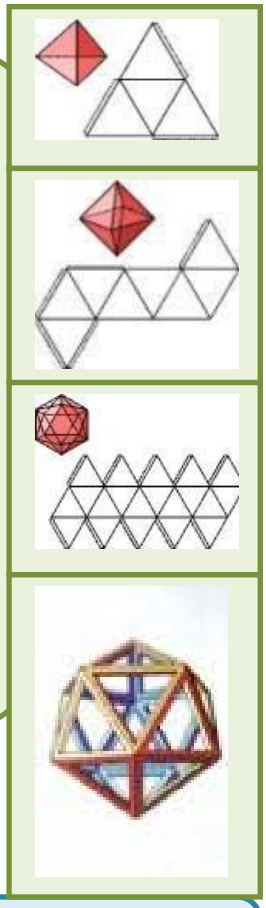
50. Al cortar a un cierto cilindro por un plano horizontal se tiene la circunferencia del ejercicio anterior. Escribe la ecuación del cilindro

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Problemas, problemas, problemas…

1. Deltaedros



En la trama de triángulos dibuja todos los diamantes-dos posibles, todos los diamantes-tres posibles y todos los diamantes-cuatro posibles. ¿Con cuáles puedo construir un cuerpo en el espacio? A estos cuerpos de caras triangulares vamos a llamarlos **DELTAEDROS**. Investiga y construye todos los deltaedros posibles. ¿Cuántos hay?.

(Podemos restringir la búsqueda a deltaedros convexos)

¿Cuáles son también poliedros regulares? ¿Qué orden tienen sus vértices?

¿Hay deltaedros con menos de cuatro caras? ¿Hay deltaedros convexos con un número impar de caras? ¿Hay deltaedros con más de veinte caras?

Haz un cuadro con los resultados obtenidos: Nº caras, Nº vértices, Nº aristas, Nº vértices de orden tres, de orden cuatro, de orden cinco, descripción de los posibles deltaedros: bipirámides, esquinas, bandas...

2. Estudia las maneras de dividir un cuadrado en cuatro partes iguales en forma y en área.

3. Construye figuras de cartulina que mediante un solo corte se puedan dividir en cuatro trozos iguales.

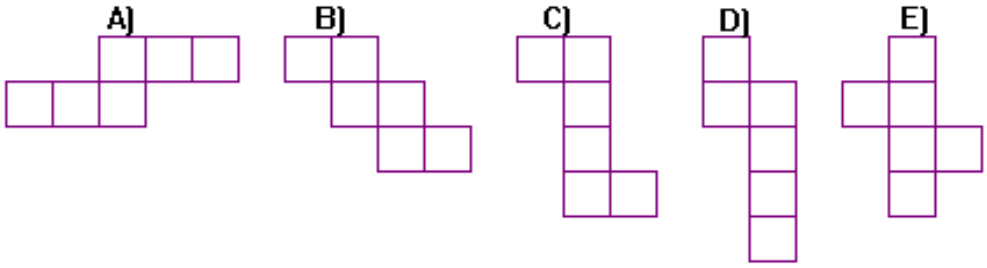
4. El radio de la Tierra es de 6.240 km aproximadamente. Rodeamos la Tierra con un cable. ¿Cuánto deberíamos aumentar la longitud del cable para que se separase por el ecuador una distancia de dos metros? ¿Menos de 15 m? ¿Más de 15 m y menos de 15 km? ¿Más de 15 km?

Para empezar hazlo más fácil. Piensa en la Tierra como una manzana que tiene un radio de 3 cm.

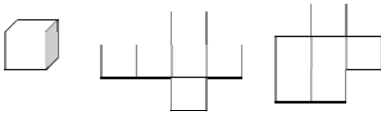
5. ¿Cómo podemos construir cuatro triángulos equiláteros iguales con seis palillos con la condición de que el lado de cada triángulo sea la longitud del palillo?

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

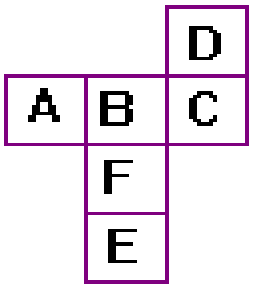
6. ¿Cuál de las siguientes figuras no representa el desarrollo de un cubo?



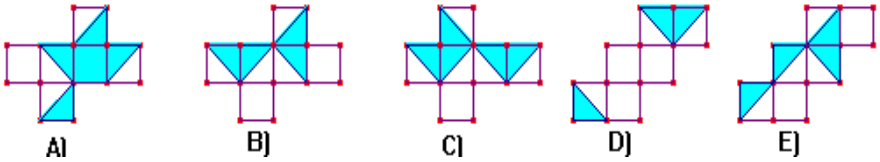
7. Utiliza una trama de cuadrados o papel cuadriculado, y busca todos los diseños de seis cuadrados que se te ocurran. Decide cuáles pueden servir para construir un cubo



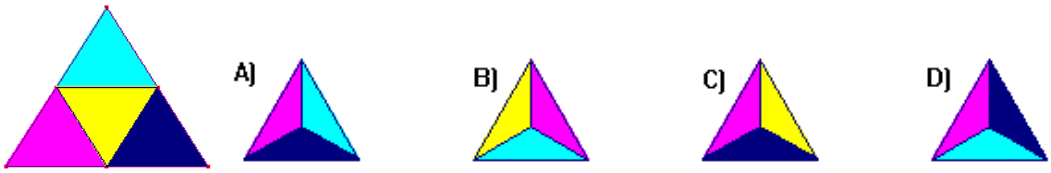
8. Al formar un cubo con el desarrollo de la figura, ¿cuál será la letra opuesta a F?



9. A partir de uno de estos desarrollos bicolores, se puede fabricar un cubo, de forma que los colores sean los mismos en las dos partes de cada una de las aristas. ¿Cuál de ellos lo verifica?

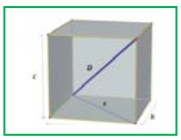
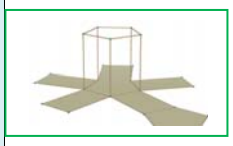
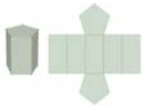
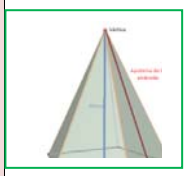


10. El triángulo de la figura se ha plegado para obtener un tetraedro. Teniendo en cuenta que el triángulo no está pintado por detrás. ¿Cuál de las siguientes vistas en perspectiva del tetraedro es falsa?



Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

RESUMEN

		Ejemplos
Teorema de Pitágoras en el espacio	$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$ 	a= 2, b = 3, c = 4, entonces $D^2 = 4 + 9 + 16 = 29$ D = $\sqrt{29}$ = 5,4.
Teorema de Tales:	Dadas dos rectas, *r* y *r'*, que se cortan en el punto *O*, y dos rectas paralelas entre sí, *a* y *b*. Si la recta *a* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *A* y *C*, y la recta *b* corta a las rectas *r* y *r'* en los puntos *B* y *D*, entonces los segmentos correspondientes son proporcionales	
Poliedros regulares	Un poliedro regular es un poliedro en el que todas sus caras son polígonos regulares iguales y en el que sus ángulos poliedros son iguales. Hay cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro	
Prismas	 $A_{Lateral} = Perímetro_{Base} \cdot Altura$; $A_{total} = Área_{Lateral} + 2 Área_{Base}$; $Volumen = Área_{base} \cdot Altura$	
Pirámides	 $A_{Lateral} = \frac{Perímetro_{Base} \cdot Apotema_{pirámide}}{2}$ $A_{total} = Área_{Lateral} + Área_{Base}$ $Volumen = \frac{Área_{base} \cdot Altura}{3}$	
Cilindro	$A_{Lateral} = 2\pi R H$; $A_{total} = 2\pi R H + 2\pi R^2$ $Volumen = Área_{base} \cdot Altura$	
Cono	$A_{Lateral} = \pi R G$; $A_{total} = \pi R G + \pi R^2$ $Volumen = \frac{Área_{base} \cdot Altura}{3}$	
Esfera	$A_{total} = 4\pi R^2$; $Volumen = \frac{4}{3}\pi R^3$	
Ecuaciones de la recta en el plano	**Ecuación explícita:** $y = mx + n$. **Ecuación implícita:** $ax + by + c = 0$ **Ecuación paramétrica:** $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$	
Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio.	**Ecuación implícita de un plano**: $ax + by + cz + d = 0$ **Ecuación paramétrica de una recta:** $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$	

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Teorema de *Pitágoras* y teorema de *Tales*

1. Calcula el volumen de un tetraedro regular de lado 7 *cm*.

2. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 *m*.

3. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 15 *cm* y altura 6 *cm*.

4. Dibuja un paralelepípedo cuyas aristas midan 4 *cm*, 5 *cm* y 6 *cm* que no sea un ortoedro. Dibuja también su desarrollo.

5. Si el paralelepípedo anterior fuera un ortoedro, ¿cuánto mediría su diagonal?

6. Un vaso de 11 *cm* de altura tiene forma de tronco de cono en el que los radios de las bases son de 5 y 3 *cm*. ¿Cuánto ha de medir como mínimo una cucharilla para que sobresalga del vaso por lo menos 2 *cm*?

7. ¿Es posible guardar en una caja con forma de ortoedro de aristas 4 *cm*, 3 *cm* y 12 *cm* un bolígrafo de 13 *cm* de longitud?

8. Calcula la diagonal de un prisma recto de base cuadrada sabiendo que el lado de la base mide 6 *cm* y la altura del prisma 8 *cm*.

9. Si un ascensor mide 1,2 *m* de ancho, 1,6 *m* de largo y 2,3 *m* de altura, ¿es posible introducir en él una escalera de 3 *m* de altura?

10. ¿Cuál es la mayor distancia que se puede medir en línea recta en una habitación que tiene 6 *m* de ancho, 8 *m* de largo y 4 *m* de altura?

11. Calcula la longitud de la arista de un cubo sabiendo que su diagonal mide 3,46 *cm*.

12. Calcula la distancia máxima entre dos puntos de un tronco de cono cuyas bases tienen radios 5 *cm* y 2 *cm*, y altura 10 *cm*.

13. En una pizzería la pizza de 15 *cm* de diámetro vale 2 € y la de 40 *cm* vale 5 €. ¿Cuál tiene mejor precio?

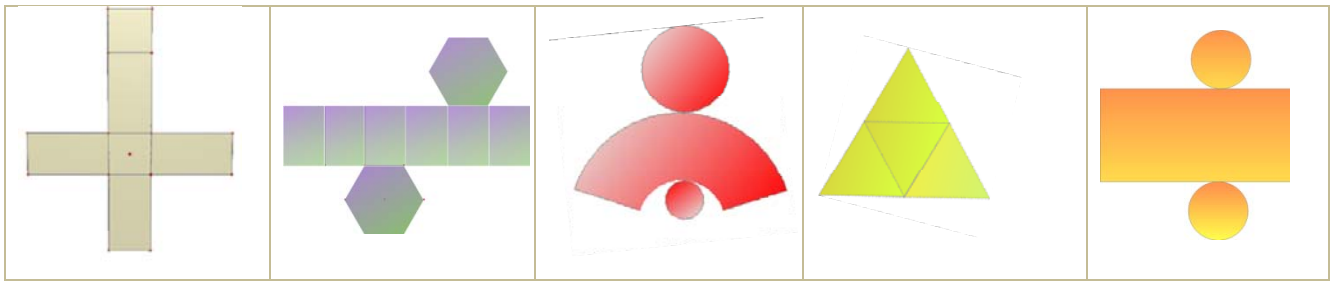
14. Vemos en el mercado una merluza de 30 *cm* que pesa un kilo. Nos parece un poco pequeña y pedimos otra un poco mayor, que resulta pesar 2 kilos. ¿Cuánto medirá?

15. En un día frío un padre y un hijo pequeño van exactamente igual abrigados, ¿Cuál de los dos tendrá más frío?

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

Longitudes, áreas y volúmenes

16. Identifica a qué cuerpo geométrico pertenecen los siguientes desarrollos:

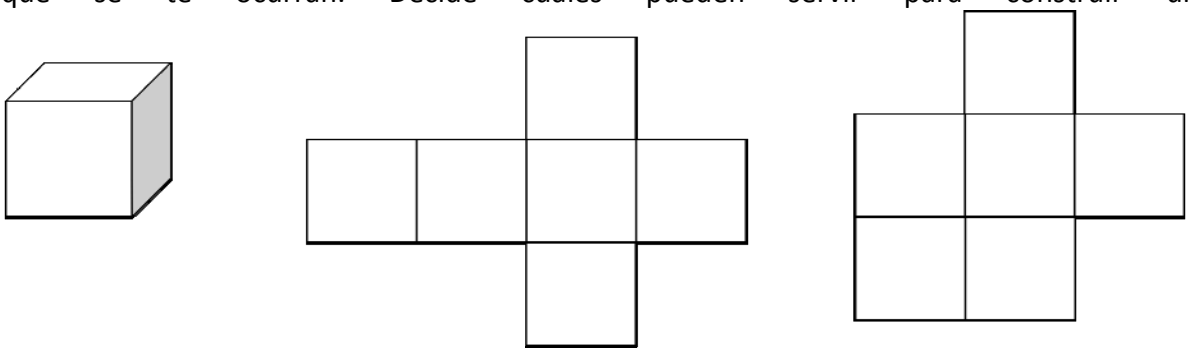


17. ¿Podrá existir un poliedro regular cuyas caras sean hexagonales? Razona la respuesta.

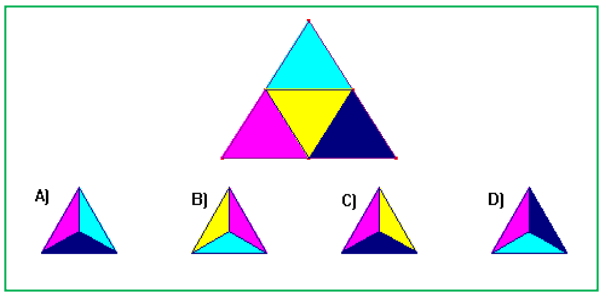
18. ¿Cuántas diagonales puedes trazar en un cubo? ¿Y en un octaedro?

19. ¿Puedes encontrar dos aristas paralelas en un tetraedro? ¿Y en cada uno de los restantes poliedros regulares?

20. Utiliza una trama de cuadrados o papel cuadriculado, y busca todos los diseños de seis cuadrados que se te ocurran. Decide cuáles pueden servir para construir un cubo



21. El triángulo de la figura se ha plegado para obtener un tetraedro. Teniendo en cuenta que el triángulo no está pintado por detrás, ¿cuál de las siguientes vistas en perspectiva del tetraedro es falsa?



22. Un prisma de 8 *dm* de altura tiene como base un triángulo rectángulo de catetos 3 *dm* y 4 *dm*. Calcula las áreas lateral y total del prisma.

23. Dibuja un prisma hexagonal regular que tenga 3 *cm* de arista basal y 0.9 *dm* de altura y calcula las áreas de la base y total.

24. Un prisma pentagonal regular de 15 *cm* de altura tiene una base de 30 cm^2 de área. Calcula su volumen.

25. Calcula el área total de un ortoedro de dimensiones 2,7 *dm*, 6,2 *dm* y 80 *cm*.

26. Calcula la superficie total y el volumen de un cilindro que tiene 7 *m* de altura y 3 *cm* de radio de la base.

27. Calcula el área total de una esfera de 7 *cm* de radio.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

28. Calcula el apotema de una pirámide regular sabiendo que su área lateral es de 150 cm^2 y su base es un hexágono de 4 *cm* de lado.

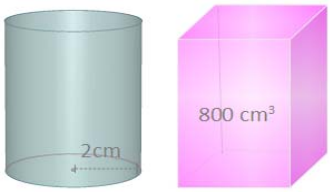
29. Calcula el apotema de una pirámide hexagonal regular sabiendo que el perímetro de la base es de 36 *dm* y la altura de la pirámide es de 6 *dm*. Calcula también el área total y el volumen de esta pirámide.

30. Un triángulo rectángulo de catetos 12 *cm* y 16 *cm* gira alrededor de su cateto menor generando un cono. Calcula el área lateral, el área total y el volumen.

31. Tres bolas de metal de radios 15 *dm*, 0,4 *m* y 2 *m* se funden en una sola, ¿Cuál será el diámetro de la esfera resultante?

32. ¿Cuál es la capacidad de un pozo cilíndrico de 1,50 *m* de diámetro y 30 *m* de profundidad?

33. ¿Cuánto cartón necesitamos para construir una pirámide cuadrangular regular si queremos que el lado de la base mida 12 *cm* y que su altura sea de 15 *cm*?



34. Calcula el volumen de un cilindro que tiene 2 *cm* de radio de la base y la misma altura que un prisma cuya base es un cuadrado de 4 *cm* de lado y 800 cm^3 de volumen.

35. ¿Cuál es el área de la base de un cilindro de 1,50 *m* de alto y 135 dm^3 de volumen?

36. El agua de un manantial se conduce hasta unos depósitos cilíndricos que miden 10 *m* de radio de la base y 20 *m* de altura. Luego se embotella en bidones de 2,5 litros. ¿Cuántos envases se llenan con cada depósito?

37. Calcula la cantidad de cartulina necesaria para construir un anillo de 10 tetraedros cada uno de los cuales tiene un centímetro de arista.

38. Al hacer el desarrollo de un prisma triangular regular de 5 *dm* de altura, resultó un rectángulo de un metro de diagonal como superficie lateral. Calcula el área total.

39. Determina la superficie mínima de papel necesaria para envolver un prisma hexagonal regular de 2 *cm* de lado de la base y 5 *cm* de altura.

40. El ayuntamiento de Madrid ha colocado unas jardineras de piedra en sus calles que tienen forma de prisma hexagonal regular. La cavidad interior, donde se deposita la tierra, tiene 80 *cm* de profundidad y el lado del hexágono interior es de 60 *cm*. Calcula el volumen de tierra que llenaría una jardinera por completo.

41. Una habitación tiene forma de ortoedro y sus dimensiones son directamente proporcionales a los números 2, 4 y 8. Calcula el área total y el volumen si además se sabe que la diagonal mide 17,3 *m*.

42. Un ortoedro tiene 0,7 *dm* de altura y 8 dm^2 de área total. Su longitud es el doble de su anchura, ¿cuál es su volumen?

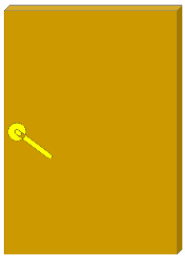
43. Si el volumen de un cilindro de 15 *cm* de altura es de 424 cm^3, calcula el radio de la base del cilindro.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

44. (**CDI Madrid 2011**) Han instalado en casa de Juan un depósito de agua de forma cilíndrica. El diámetro de la base mide 2 metros y la altura es de 3 metros. a) Calcula el volumen del depósito en m^3. b) ¿Cuántos litros de agua caben en el depósito?

45. (**CDI Madrid 2012**) Un envase de un litro de leche tiene forma de prisma, la base es un cuadrado que tiene 10 *cm* de lado. a) ¿Cuál es, en cm^3, el volumen del envase? b) Calcula la altura del envase en cm.

46. Una circunferencia de longitud 18,84 *cm* gira alrededor de uno de sus diámetros generando una esfera. Calcula su volumen.



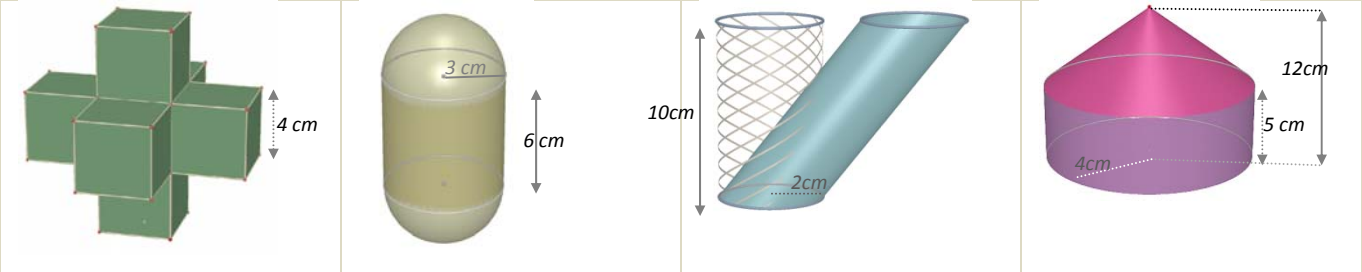
47. Una puerta mide 1,8 *m* de alto, 70 *cm* de ancho y 3 *cm* de espesor. El precio de instalación es de 100 € y se cobra 5 € por m^2 en concepto de barnizado, además del coste de la madera, que es de 280 € cada m^3. Calcula el coste de la puerta si sólo se realiza el barnizado de las dos caras principales.

48. El agua contenida en un recipiente cónico de 21 *cm* de altura y 15 *cm* de diámetro de la base se vierte en un vaso cilíndrico de 15 *cm* de diámetro de la base. ¿Hasta qué altura llegará el agua?

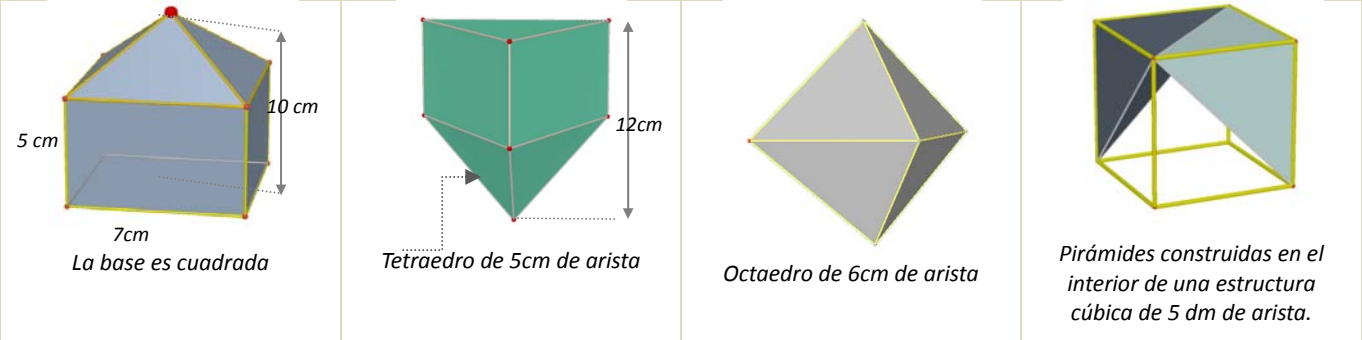
49. Según Arquímedes, ¿qué dimensiones tiene el cilindro circunscrito a una esfera de 7 *cm* de radio que tiene su misma área? Calcula esta área.

50. ¿Cuál es el volumen de una esfera en la que la longitud de una circunferencia máxima es 251,2 *m*?

51. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos



52. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos

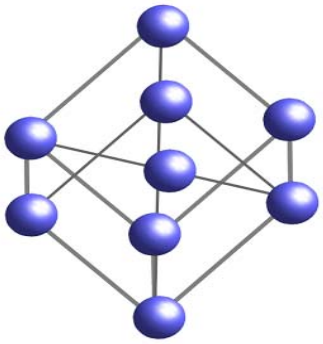


53. En la construcción de un globo aerostático esférico de un metro de radio se emplea lona que tiene un coste de 300 €/m^2. Calcula el importe de la lona necesaria para su construcción.

54. Calcula el radio de una esfera que tiene 33,51 dm^3 de volumen.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

55. El Atomium es un monumento de Bruselas que reproduce una molécula de hierro. Consta de 9 esferas de acero de 18 m de diámetro que ocupan los vértices y el centro de una estructura cúbica de 103 m de diagonal, realizada con cilindros de 2 metros de diámetro. Si utilizamos una escala 1:100 y tanto las esferas como los cilindros son macizos, ¿qué cantidad de material necesitaremos?

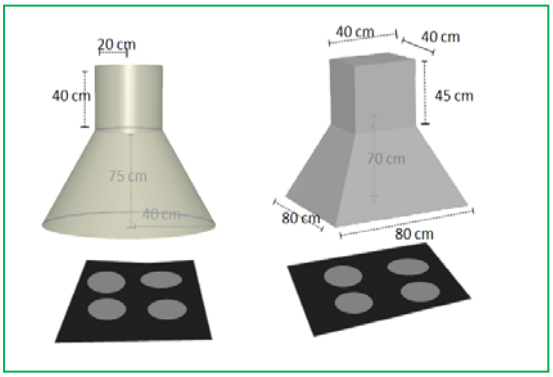


56. Se ha pintado por dentro y por fuera un depósito sin tapadera de 8 dm de alto y 3 dm de radio. Teniendo en cuenta que la base sólo se puede pintar por dentro, y que se ha utilizado pintura de 2€/dm^2, ¿cuánto dinero ha costado en total?

57. Una piscina mide 20 m de largo, 5 m de ancho y 2 m de alto.

a. ¿Cuántos litros de agua son necesarios para llenarla?

b. ¿Cuánto costará recubrir el suelo y las paredes con PVC si el precio es de 20 €/ m^2?

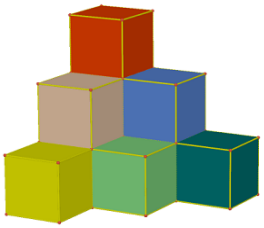


58. ¿Cuál de las dos campanas extractoras de la figura izquierda tiene un coste de acero inoxidable menor?

59. En una vasija cilíndrica de 3 *m* de diámetro y que contiene agua, se introduce una bola. ¿Cuál es su volumen si después de la inmersión sube 0,5 *m* el nivel del agua?

60. El precio de las tejas es de 12,6 €/*m*^{2} ¿Cuánto costará retejar una vivienda cuyo tejado tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 1,5 *m* de altura y 15 m de lado de la base?

61. Se enrolla una cartulina rectangular de lados 40 *cm* y 26 *cm* formando cilindros de las dos formas posibles, haciendo coincidir lados opuestos. ¿Cuál de los dos cilindros resultantes tiene mayor volumen?



62. Cada uno de los cubos de la figura tiene 2 *cm* de arista. ¿Cuántos hay que añadir para formar un cubo de 216 *cm*^{3} de volumen?

63. Un tubo de ensayo tiene forma de cilindro abierto en la parte superior y rematado por una semiesfera en la inferior. Si el radio de la base es de 1 *cm* y la altura total es de 12 *cm*, calcula cuántos centilitros de líquido caben en él.

64. El lado de la base de la pirámide de Keops mide 230 *m*, y su altura 146 *m*. ¿Qué volumen encierra?

65. La densidad de un tapón de corcho es de 0,24, ¿cuánto pesan mil tapones si los diámetros de sus base miden 2,5 *cm* y 1,2 *cm*, y su altura 3 *cm*?

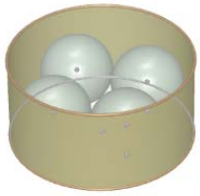
66. Comprueba que el volumen de una esfera es igual al de su cilindro circunscrito menos el del cono de igual base y altura.

67. Calcula el volumen de un octaedro regular de arista 2 *cm*.

68. Construye en cartulina un prisma cuadrangular regular de volumen 240 *cm*^{3}, y de área lateral 240 *cm*^{2}.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

69. El cristal de una farola tiene forma de tronco de cono de 40 *cm* de altura y bases de radios 20 y 10 *cm*. Calcula su superficie.



70. Un bote cilíndrico de 15 *cm* de radio y 30 *cm* de altura tiene en su interior cuatro pelotas de radio 3,5 *cm*. Calcula el espacio libre que hay en su interior.

71. Un embudo cónico de 15 *cm* de diámetro tiene un litro de capacidad, ¿cuál es su altura?

72. En un depósito con forma de cilindro de 30 *dm* de radio, un grifo vierte 15 litros de agua cada minuto. ¿Cuánto aumentará la altura del agua después de media hora?

73. La lona de una sombrilla abierta tiene forma de pirámide octogonal regular de 0,5 *m* de altura y 40 *cm* de lado de la base. Se fija un mástil en el suelo en el que se encaja y el vértice de la pirámide queda a una distancia del suelo de 1,80 *m*. En el momento en que los rayos de sol son verticales, ¿qué área tiene el espacio de sombra que determina?

74. Una pecera con forma de prisma recto y base rectangular se llena con 65 litros de agua. Si tiene 65 *cm* de largo y 20 *cm* de ancho, ¿cuál es su profundidad?

75. En un helado de cucurucho la galleta tiene 12 *cm* de altura y 4 *cm* diámetro. ¿Cuál es su superficie? Si el cucurucho está completamente lleno de helado y sobresale una semiesfera perfecta, ¿cuántos cm^3 de helado contiene?

Iniciación a la Geometría Analítica

76. Calcula la distancia entre los puntos $A(7, 3)$ y $B(2, 5)$.

77. Calcula la distancia entre los puntos $A(7, 3, 4)$ y $B(2, 5, 8)$.

78. Calcula la longitud del vector de componentes $\boldsymbol{u} = (4, 5)$.

79. Calcula la longitud del vector de componentes $\boldsymbol{u} = (4, 5, 0)$.

80. El vector $\boldsymbol{u} = (4, 5)$ tiene el origen en el punto $A(3, 7)$. ¿Cuáles son las coordenadas de su punto extremo?

81. El vector $\boldsymbol{u} = (4, 5, 2)$ tiene el origen en el punto $A(3, 7, 5)$. ¿Cuáles son las coordenadas de su punto extremo?

82. Dibuja un cuadrado de diagonal el punto $A(2, 3)$ y $C(5, 6)$. ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cuadrado? Calcula la longitud del lado y de la diagonal de dicho cuadrado.

83. Dibuja un cubo de diagonal $A(1, 1, 1)$ y $B(4, 4, 4)$. ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cubo? Ya sabes, son 8 vértices. Calcula la longitud de la arista, de la diagonal de una cara y de la diagonal del cubo.

84. Sea $X(x, y)$ un punto del plano, y $A(2, 4)$, escribe la expresión de todos los puntos X que distan de A una distancia 3.

85. Sea $X(x, y, z)$ un punto del espacio, y $A(2, 4, 3)$, escribe la expresión de todos los puntos X que distan de A una distancia 3.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

86. Escribe la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto *A*(2, 7) y tiene como vector de dirección ***u*** = (4, 5). Represéntala gráficamente.

87. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A*(2, 7) y *B*(4, 6), de forma explícita, implícita y paramétrica. Represéntala gráficamente.

88. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A*(2, 4, 6) y *B*(5, 2, 8), de forma explícita, y como intersección de dos planos.

89. En el cubo de diagonal *A*(1, 1, 1) y *B*(5, 5, 5) escribe las ecuaciones de los planos que forman sus caras. Escribe también las ecuaciones de todas sus aristas, y las coordenadas de sus vértices.

90. Escribe la ecuación del cilindro de eje $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ y radio 3.

91. Escribe la ecuación de la esfera de centro *A*(2, 7, 3) y radio 4.

92. Escribe la ecuación del cilindro de eje, la recta $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ y radio 2.

93. Escribe la ecuación de la circunferencia en el plano de centro *A*(3, 7) y radio 3.

94. Al cortar a un cierto cilindro por un plano horizontal se tiene la circunferencia del ejercicio anterior. Escribe la ecuación del cilindro.

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. Las longitudes de los lados del triángulo de vértices $A(2, 2)$ $B(1, 4)$ y $C(0, 3)$ son:

a) 2, 5, 5 b) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$

2. En el triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 *cm* se multiplican por 10 todas sus longitudes. El área del nuevo triángulo es:

a) 6 m^2 b) 6 dm^2 c) 60 cm^2 d) 0,6 m^2

3. La altura de un prisma de base cuadrada es 20 *cm* y el lado de la base es 5 *cm*, su área total es:

a) 450 cm^2 b) 45 dm^2 c) 425 cm^2 d) 0,45 m^2

4. Un depósito de agua tiene forma de prisma hexagonal regular de 5 *m* de altura y lado de la base 1 *m*. El volumen de agua que hay en él es:

a) $60\sqrt{2}\ m^3$ b) $45\sqrt{2}\ m^3$ c) $30000\sqrt{2}\ dm^3$ d) $90\sqrt{2}\ m^3$

5. El tejado de una caseta tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 0,5 *m* de altura y 1000 *cm* de lado de la base. Si se necesitan 15 tejas por metro cuadrado para recubrir el tejado, se utilizan un total de:

a) 1051 tejas. b) 150 tejas. c) 245 tejas. d) 105 tejas.

6. Una caja de dimensiones 30, 20 y 15 *cm*, está llena de cubos de 1 *cm* de arista. Si se utilizan todos para construir un prisma recto de base cuadrada de 10 *cm* de lado, la altura medirá:

a) 55 *cm* b) 65 *cm* c) 75 *cm* d) 90 *cm*

7. El radio de una esfera que tiene el mismo volumen que un cono de 5 *dm* de radio de la base y 120 *cm* de altura es:

a) $5\sqrt{3}$ *dm* b) $\sqrt[3]{75}$ *dm* c) 150 *cm* d) $\sqrt[3]{2250}$ *cm*

8. Se distribuyen 42,39 litros de disolvente en latas cilíndricas de 15 *cm* de altura y 3 *cm* de radio de la base. El número de envases necesario es:

a) 100 b) 10 c) 42 d) 45

9. La ecuación de una recta en el plano que pasa por los puntos $A(2, 5)$ y $B(1, 3)$ es:

a) $y = -2x + 1$ b) $3y - 2x = 1$ c) $y = 2x + 1$ d) $y = -2x + 9$.

10. La ecuación de la esfera de centro A(2, 3, 5) y radio 3 es:

a) $x^2 - 2x + y^2 - 3y + z^2 - 5z + 29 = 0$ b) $x^2 - 4x + 3y^2 - 6y + 5z^2 - 10z + 29 = 0$

c) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 38 = 0$ d) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 29 = 0$

Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo y David Hierro
Ilustraciones: Milagros Latasa/Banco de Imágenes de INTEF
Textos Marea Verde

Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas:

4ºB de ESO

Capítulo 10:
Funciones y gráficas

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-045276

Fecha y hora de registro: 2014-06-10 18:21:08.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Andrés García y Javier Sánchez

Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos

Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

Índice

1. FUNCIONES REALES

1.1. CONCEPTO DE FUNCIÓN

1.2. GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

1.3. DISTINTAS MANERAS DE DEFINIR UNA FUNCIÓN
- FUNCIONES DADAS POR TABLAS
- FUNCIONES DADA POR UNA EXPRESIÓN
- FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

1.4. DOMINIO Y RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN

2. CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN

2.1. CONTINUIDAD Y DISCONTINUIDADES

2.2. MONOTONÍA: CRECIMIENTO, DECRECIMIENTO, MÁXIMOS Y MÍNIMOS

2.3. CURVATURA: CONCAVIDAD, CONVEXIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

2.4. SIMETRÍAS

2.5. PERIODICIDAD

2.6. COMPORTAMIENTO EN INFINITO

2.7. RECOPILATORIO:
- CÓMO DIBUJAR UNA FUNCIÓN
- CÓMO ESTUDIAR UNA FUNCIÓN

2.8 AMPLIACIÓN: TRASLACIONES

3. VALORES ASOCIADOS A LAS FUNCIONES

3.1. TASA DE VARIACIÓN Y TASA DE VARIACIÓN MEDIA

3.2. TASA DE CRECIMIENTO

Resumen

Uno de los conceptos más importantes que aparecen en las Matemáticas es la idea de *función*. Intuitivamente, una función es cualquier proceso por el que se transforma un número en otro. Más formalmente, una función f es una correspondencia que a un número x le asigna un único número y, tal que $y = f(x)$.

No es difícil encontrar ejemplos de funciones. El espacio recorrido en función del tiempo, el peso de una persona en función de su altura, lo que pagamos de teléfono en función de los minutos que hablamos.

En este capítulo aprenderemos cómo tratar de manera rigurosa la idea intuitiva de función y cómo estudiar las funciones. Veremos cómo describir sus características y estudiaremos la manera de hacer un modelo matemático de algunas situaciones de la vida real que nos ayude a tomar mejores decisiones. Prácticamente cualquier situación real puede ser estudiada con ayuda de funciones. Tenemos pues mucho campo…

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

1. FUNCIONES REALES

1.1. Concepto de función

Una ***función*** es una relación o correspondencia entre dos magnitudes, tales que a cada valor de la variable independiente, *x*, le corresponde ***un solo*** valor de la dependiente, *y*.

Para indicar que la variable (*y*) depende o es función de otra, (*x*), se usa la notación ***y = f(x),*** que se lee *"y es función de x"*.

Las funciones son como máquinas a las que se les mete un elemento, *x*, y devuelve otro valor, $y = f(x)$. Por ejemplo, en la función $f(x) = x^2$, se introduce valores de *x*, y nos devuelve sus cuadrados.

Es MUY IMPORTANTE que tengamos un solo valor de *y* (variable dependiente) para cada valor de *x* (variable independiente). En caso contrario no tenemos una función.
Las funciones se introdujeron para estudiar procesos. Si haciendo lo mismo nos pueden salir cosas distintas, no se puede estudiar del mismo modo.

Ejemplos:

- *Pensemos en la factura de teléfono. Si sabemos cuántos minutos hemos hablado (suponiendo, claro, que cuesten lo mismo todos) también sabemos cuánto nos toca pagar. El dinero que pagamos es función del tiempo.*

- *Vamos al casino y apostamos a rojo o negro. Si apostamos un euro, podemos ganar dos o no ganar nada. Si decimos cuánto apostamos no sabemos cuánto vamos a ganar. Por tanto, las ganancias en un casino NO son una función de la apuesta.*

Actividades resueltas

- Indica si las siguientes situaciones representan una función o no
  a. El espacio recorrido por un coche y el tiempo.
  b. Las ganancias en la Bolsa en función de lo invertido.
  c. El cuadrado de un número.

Solución:

Son funciones la a) y la c). La b) no lo es porque no sabemos cuánto ganamos.

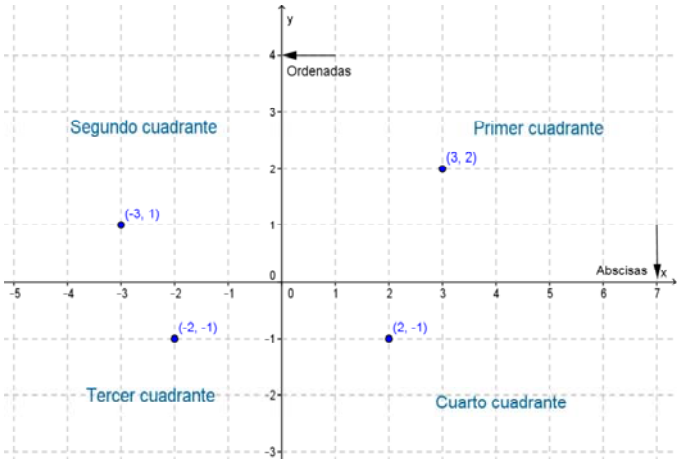
Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

1.2. Gráfica de una función

En muchas ocasiones, la manera más sencilla de ver cómo se comporta una función es dibujarla en el plano cartesiano. Vamos a recordar muy brevemente qué era el plano cartesiano (cartesiano, viene de *Cartesio*, que era el nombre con el que firmaba su inventor, *Renè Descartes*).

Un **sistema de referencia cartesiano** consiste en dos rectas numéricas perpendiculares, llamadas **ejes**. El punto en el que se cortan los ejes es el origen del sistema, también llamado **origen de coordenadas.**

Normalmente lo representamos con un eje vertical y el otro horizontal. Al eje horizontal lo denominamos **eje de abscisas** o también eje X y al vertical **eje de ordenadas** o eje Y.



Sistema de referencia cartesiano

Al cortarse los dos ejes, el plano queda dividido en cuatro zonas, que se conocen como **cuadrantes**:

- Primer cuadrante: Zona superior derecha
- Segundo cuadrante: Zona superior izquierda
- Tercer cuadrante: Zona inferior izquierda
- Cuarto cuadrante: Zona inferior derecha.

Para representar puntos, sólo hay que recordar que la primera componente (o abscisa) es x, por lo que debe ir al eje X (eje de abscisas). La segunda componente (u ordenada) es y, por tanto va al eje Y (eje de ordenadas).

El sentido positivo es a la derecha y arriba. Si alguna de las componentes es negativa, entonces se coloca en sentido contrario.

Para representar una gráfica, lo que debemos hacer es simplemente tomar valores (x, y) o, lo que es lo mismo (x, $f(x)$) puesto que $y = f(x)$. Luego los unimos, bien con líneas rectas, bien ajustando "a ojo" una línea curva. Naturalmente, ahora nos aparecen dos cuestiones:

- ¿Cuántos valores hay que dar?
- ¿Qué valores le damos?

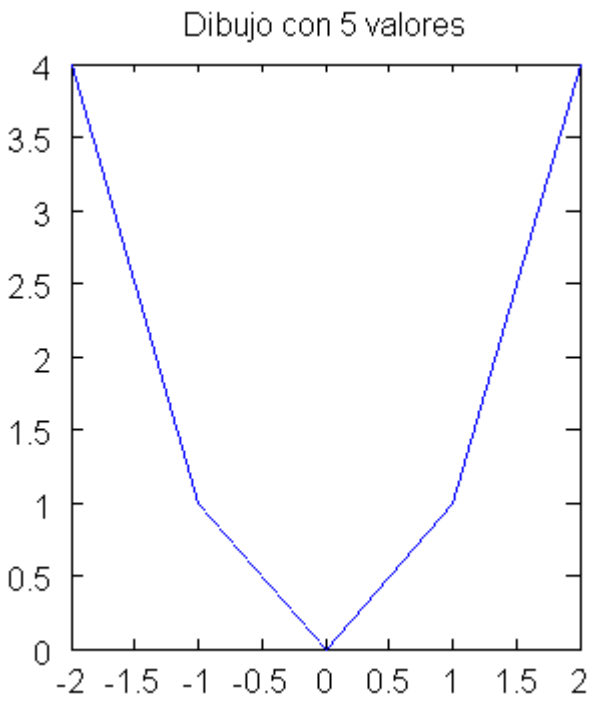
En general, no hay una respuesta clara a esas preguntas, aparte de la obvia "cuánto más, mejor". Si una gráfica se dibuja con ordenador, normalmente se le da un intervalo y el número de valores que queremos que represente. Típicamente, un ordenador da MUCHOS valores: 500, 1000, ….

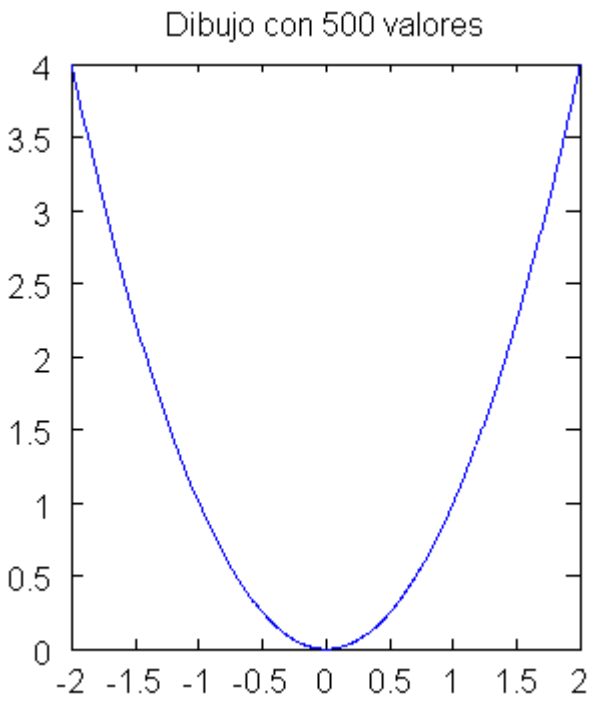
Ejemplo:

- *Dibujamos la función* $y = x^2$ en el intervalo [–2, 2] con un ordenador (este dibujo está hecho con el programa *Octave*, que es código abierto y puedes descargar libremente).

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

Hacemos dos gráficas, una dando 5 valores y la otra 500. Observa la diferencia entre los dos dibujos. Observa también que el ordenador une los puntos con segmentos de rectas.



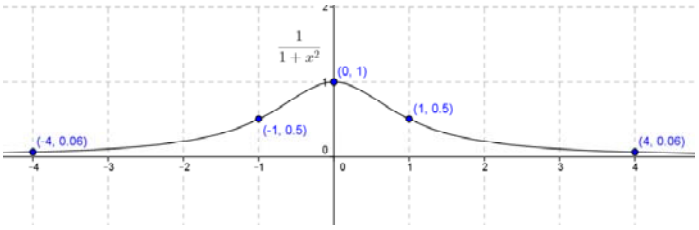


Actividad resuelta

- *Dibujar la función* $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

Más tarde indicaremos los valores que es recomendable tomar. De momento, nos limitaremos a dar unos pocos y unir puntos. Por ninguna razón en especial, tomamos –4, –1, 0, 1 y 4. Recordemos que al sustituir se usan SIEMPRE paréntesis. Así $\dfrac{1}{(-4)^2+1}=\dfrac{1}{16+1}=\dfrac{1}{17}=0'06$. Obtenemos entonces la tabla de valores y basta unir los puntos (dándoles "a ojo" un poco de curva).

x	f (x)
–4	0'06
–1	0'5
0	1
1	0'5
4	0'06

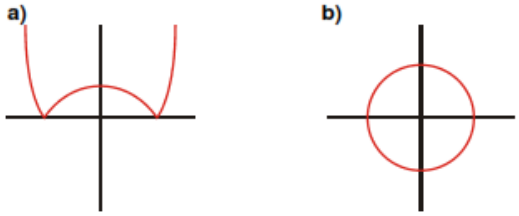


Una cuestión a reseñar de las gráficas es el hecho de que, directamente a partir de un dibujo podemos ver si corresponde a una función o no. Para verlo, basta fijarse en si hay algún valor de *x* que corresponda a más de un valor de *y*. Si NO lo hay, es una función. Observamos que el ejemplo anterior es una función.

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

Actividad resuelta

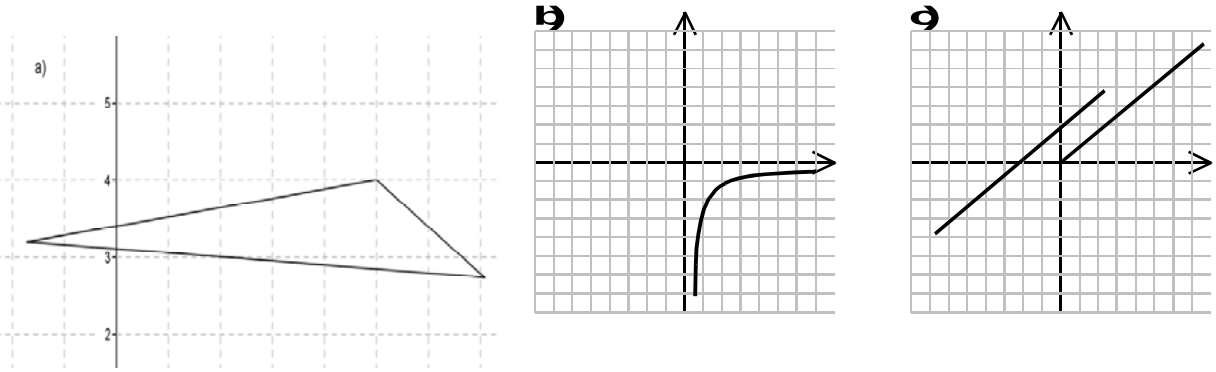
- *Indica cuáles de las siguientes representaciones corresponden a la gráfica de una función:*



La gráfica a) es una función. La gráfica b) NO lo es porque, por ejemplo el punto $x = 0$ tiene dos valores de y.

Actividad propuesta

1. De las siguientes gráficas indica cuáles de ellas corresponden a funciones.



1.3. Diferentes maneras de expresar una función

Recordemos, una vez más, que una función es la descripción de cómo se relacionan dos magnitudes. Así pues, esta descripción la podemos saber de varias maneras.

Funciones dadas por tablas

Probablemente, la manera más sencilla en la que se puede dar una función es con una tabla de valores. Es además la manera más experimental: observamos un proceso y medimos las cantidades que nos salen. Así tenemos una idea de cómo se relacionan.

Dibujar su gráfica no puede ser más sencillo. Basta poner los puntos y, en su caso, unirlos.

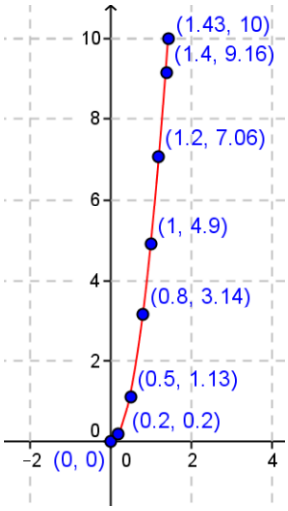
Ejemplo:

- *Soltamos una pelota desde 10 m de altura y medimos el espacio recorrido (en segundos). Obtenemos entonces la tabla siguiente:*

Espacio (m)	0	0,2	0,5	0,8	1	1,2	1,4	1,43
Tiempo (s)	0	0,2	1,13	3,14	4,9	7,06	9,16	10,00

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

Es muy sencillo dibujar su gráfica. Basta representar los puntos y unirlos (esta gráfica está hecha con el programa *Geogebra*, también de código abierto):



Date cuenta que tiene sentido "*rellenar*" el espacio entre puntos. Aunque no lo hayamos medido, la pelota no puede teletransportarse, por lo que seguro se puede hablar de dónde está en el instante 0'7, por ejemplo. Y obviamente, el espacio recorrido estará entre 1'13 (que corresponde a 0'5 segundos) y 3'14 (que corresponde a 0'8 segundos).

La cuestión que nos planteamos es la siguiente: ¿es siempre así? ¿Puede haber funciones donde NO TENGA SENTIDO poner valores intermedios?

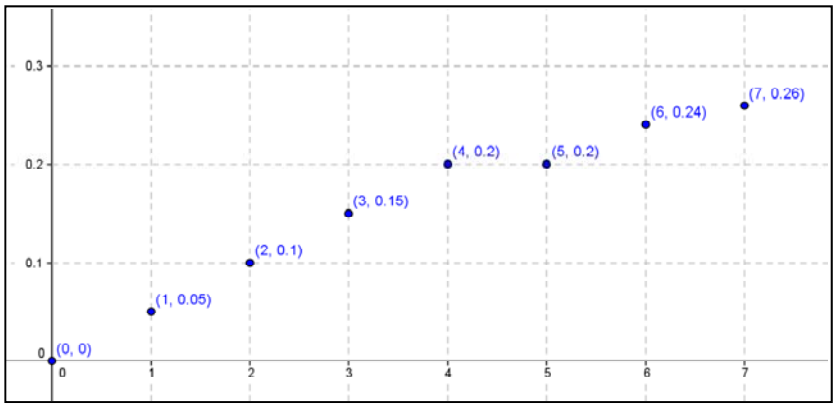
A poco que pienses, te darás cuenta de que sí las hay. Veamos un ejemplo:

Ejemplo:

- *En una librería, han puesto la siguiente tabla con el precio de las fotocopias, dependiendo del número de copias:*

Nº de copias	0	1	2	3	4	5	6	7
Precio (euros)	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,2	0,24	0,28

Se puede construir la representación gráfica dibujando estos puntos.



La cuestión de si podemos dibujar puntos intermedios entre los anteriores se responde por sí sola.

No se pueden hacer 1'5 copias. Solamente puedes hacer un número entero de copias.

Por tanto, no tiene sentido plantearse siquiera dar valores intermedios ni dibujarlos.

Funciones dadas por una expresión

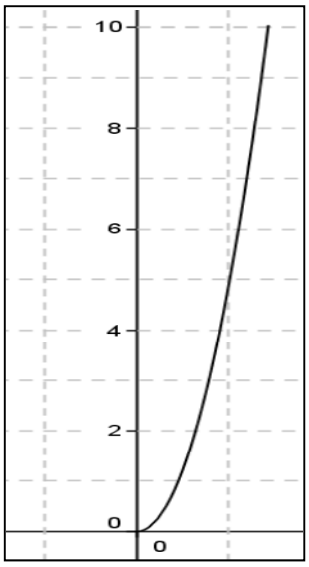
En muchísimas ocasiones, sabemos suficiente de la relación entre dos magnitudes como para conocer exactamente una expresión que las relaciona. Vamos a empezar con un ejemplo.

Ejemplo:

- *Volvamos al caso que vimos antes, donde soltábamos una pelota.*

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

No necesitamos medir los tiempos y los espacios. Es un cuerpo en caída libre y por tanto lo que en Física se llama movimiento uniformemente acelerado. En este caso $e = \frac{1}{2}at^2$ donde *e* es el espacio, *t* es el tiempo y *a* es la aceración. Además, *a* es conocida pues es la gravedad, es decir 9'8 m/s^2.



Por tanto, las dos magnitudes, espacio y tiempo, están relacionadas por la ecuación $e = \frac{1}{2}9'8t^2$. En Matemáticas es más usual poner *x* e *y*, por lo que sería $y = \frac{1}{2}9'8x^2$ pero es exactamente lo mismo.

Y, como tenemos todos los puntos que queramos, podemos dibujar la función sin ningún problema con sus puntos intermedios. O indicarle a un ordenador que la dibuje.

El resultado, naturalmente, es el mismo.

Actividades propuestas

2. Un ciclista bebe 1/2 litro de agua cada 10 km de recorrido. Si en el coche de equipo llevan un bidón de 40 litros, haz una tabla que indique su variación y escribe la función que la representa.

3. Un ciclista participa en una carrera recorriendo 3 km cada minuto. Teniendo en cuenta que no partió del origen sino 2 km por detrás representa en una tabla el recorrido durante los tres primeros minutos. Escribe la función que expresa los kilómetros en función del tiempo en minutos y dibújala.

Funciones definidas a trozos

- *Piensa en la siguiente situación para la tarifa de un teléfono móvil. Se paga un fijo de 10 € al mes y con eso son gratis los 500 primeros minutos. A partir de allí, se paga a 5 céntimos por minuto.*

Es evidente que es diferente el comportamiento antes de 500 minutos y después.

Una **función definida a trozos** es aquella que viene dada por una expresión distinta para diferentes intervalos.

En el ejemplo anterior, es fácil ver que $f(x) = \begin{cases} 10 + 0'05(x - 500) & x > 500 \\ 10, & x \le 500 \end{cases}$.

Veamos brevemente por qué. Para valores menores que 500, el gasto es siempre 10 €. Para valores mayores, los minutos que gastamos POR ENCIMA DE 500 son (x – 500) y por tanto lo que pagamos por los minutos es 0'05(x – 500) pues lo medimos en euros. Hay que sumarle los 10 € que pagamos de fijo.

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

Actividades propuestas

4. Representa las siguientes funciones a trozos. Se indican los puntos que tienes que calcular.

a. $f(x)=\begin{cases} x-1, & si\ \ x<-3 \\ -x+1, & si\ \ -3\le x<0 \\ 3, & si\ \ 0\le x<\infty \end{cases}$ Puntos: –5, –3'1, –3, –1, –0'1, 0, 1.

b. $g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & si\ \ x<-2 \\ 3, & si\ \ -2\le x<1 \\ \sqrt{x}, & si\ \ 1\le x \end{cases}$ Puntos: –3, –2'1, –2, 0, 0'9, 1, 4, 9.

1.4. Dominio y recorrido de una función

Hasta ahora, no nos hemos preocupado de qué valores pueden tener la *x* y la *y*. Pero es evidente que no siempre pueden tomar todos los valores de la recta real. Por ejemplo, si una función nos da la altura con respecto del peso no vamos a poder tener valores negativos. Para ello existen los conceptos de dominio y recorrido.

El **dominio** de una función es el conjunto de valores que la variable independiente (*x*) puede tomar. Se escribe *Dom f* o *Dom*(*f*).

El **recorrido** o **rango** de una función es el conjunto de valores que la variable dependiente (*y*) puede tomar. Se escribe *Rgf* o *Rg*(*f*).

Normalmente, el recorrido es más directo de calcular. Simplemente, miramos la gráfica y vemos qué valores puede tomar la variable dependiente (*y*).

El dominio suele ser un asunto bastante más complicado. En general, existen dos razones por las que un valor de *x* NO pertenezca al dominio.

1. La función no tiene sentido para esos valores. Por ejemplo, si tenemos una función que represente el consumo de electricidad a cada hora del día, es evidente que *x* debe estar entre 0 y 24. ¡¡Un día tiene 24 horas!! De ninguna manera podemos hablar siquiera de lo que hemos gastado la hora 25.

2. La operación que nos da *f*(*x*) no puede hacerse. Por ejemplo, no se puede dividir entre 0, por lo que la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ tiene como dominio el conjunto $\{x\in\Re; x\neq 0\}$, es decir $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

El primer caso viene dado por la aplicación práctica y nuestro sentido común. El segundo es el que tiene más dificultad y por eso vamos a dedicarle un poco más de tiempo.

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

Cálculo de dominios

Existen dos operaciones que NO están permitidas.

a. Dividir entre 0.

b. Hacer raíces cuadradas o de índice par de números negativos. Ten en cuenta que la raíz cuadrada de 0 SÍ está definida (vale 0).

En capítulos futuros veremos alguna operación más, pero por ahora, sólo esas dos operaciones. Vamos a ver un método sistemático para calcular el dominio.

Método para calcular el dominio

1. Recuadra TODAS las operaciones problemáticas.
2. Para TODAS esas operaciones, plantea una ecuación igualándola a 0. Resuelve dicha ecuación.
3. Representa en una recta todas las soluciones de todas las ecuaciones.
4. Da valores a la función. Un valor en cada intervalo y los valores límite. Si la operación se puede hacer, es que el punto o el intervalo pertenece al dominio. Si no, pues no. Puedes ver si una operación vale, o no, haciéndola con la calculadora. Si sale error, es que no se puede. Marca con un X los valores que no valen y con un tick (V) si se pueden hacer.
5. Representa la solución con intervalos. Si el punto del extremo está, es un corchete como [] y si no, un paréntesis.

Así visto, puede parecer un poco complicado. Vamos a ver un par de ejemplos.

Actividades resueltas

- *Calcula el dominio de las siguientes funciones:*

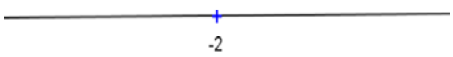
  a. $x+\sqrt{2x+4}$

  b. $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-1}$

Apartado a

Vamos a seguir el procedimiento punto por punto.

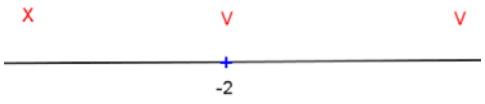
1. El único posible problema es la raíz cuadrada de $2x+4$
2. Igualamos a 0 y resolvemos: $2x+4=0 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2$
3. Representamos en la recta los valores.



Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

4. Tenemos que dar un valor a la izquierda de –2, el valor –2 y un valor a la derecha. Por ejemplo, el –3, el –2 y el 0. Los marcamos en la recta

X	–3	–2	0
¿Es válido?	NO	SÍ	SÍ



5. El dominio es $[-2,+\infty)$ (el infinito SIEMPRE es abierto, nunca llegamos).

Apartado b

1. Tenemos dos posibles problemas. La raíz cuadrada de $x+2$ y el denominador $\sqrt{x+2}-1$.
2. Tenemos que igualar LOS DOS a cero. $x+2=0 \Rightarrow x=-2$.

Por otra parte $\sqrt{x+2}-1=0 \Rightarrow \sqrt{x+2}=1$. Elevando al cuadrado $x+2=1^2 \Rightarrow x=-1$.

3. Representamos en la recta los valores.

4. Tenemos que dar un valor a la izquierda de –2, el valor –2, un valor entre –2 y –1, el valor –1 y un valor a la derecha de –1. Por ejemplo, el –3, el –2, el –1'5, el –1 y el 0. Los marcamos en la recta

X	–3	–2	–1'5	–1	0
¿Es válido?	NO	SÍ	SÍ	NO	SÍ

5. El dominio es $[-2,-1)\cup(-1,+\infty)$.

Actividades propuestas

5. Indica el dominio de las siguientes funciones:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ **b)** $\sqrt{x+\dfrac{1}{x+2}}$

6. Indica el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

a) $y = 14x + 2$ **b)** $y=\dfrac{1}{x-1}$ **c)** $y=\sqrt{2+x}$

7. Representa las siguientes funciones e indica su dominio y recorrido:

a) $f(x)=\begin{cases} x, \text{ si } x\in[-3,0) \\ 2, \text{ si } x\in[0,2] \end{cases}$ **b)** $g(x)=\begin{cases} -x, \text{ si } x\in[-2,1] \\ x, \text{ si } x\in(1,2] \end{cases}$

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

2. CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN

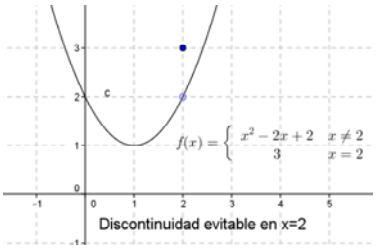
Recuerda que: En tercero ya estudiaste las características de una función. Es muy importante. Por eso vamos a insistir en ello.

2.1. Continuidad

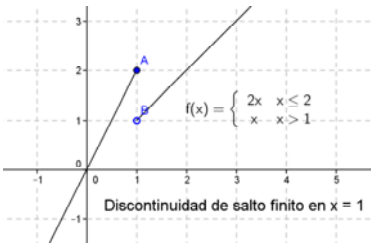
Intuitivamente, una función es continua si su gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. En caso contrario, se producen "saltos" en determinados valores de la variable independiente que reciben el nombre de discontinuidades.

Una discontinuidad puede ser de tres tipos:

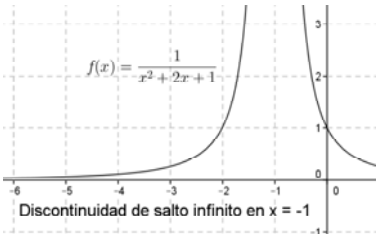
1. **Evitable**: En la función sólo "falla" un punto, que "no está donde debería estar". Más formalmente, si nos aproximamos al punto por la derecha y por la izquierda, nos aproximamos a un valor que no es el de la función. En este caso, la función sería continua sin más que cambiar la definición de la función en el punto que nos da problemas.



2. **De salto finito:** En un punto, la función tiene dos ramas diferentes a derecha e izquierda del punto. Estas ramas se aproximan a valores distintos (pero finitos) para cada lado. El punto de discontinuidad puede estar en una cualquiera de las ramas o incluso fuera de ellas. Da lo mismo, la discontinuidad sigue siendo de salto finito.

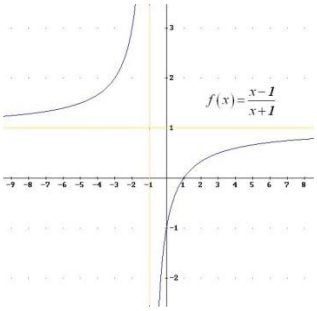


3. **De salto infinito:** Como en salto finito, en un punto la función tiene dos ramas diferentes. Pero en este caso, al menos una de las dos ramas (posiblemente las dos) se hace inmensamente grande o inmensamente negativa (en términos más informales "se va a infinito").

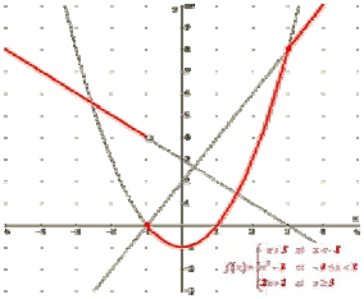


Actividades resueltas

- *Indica en estas funciones el/los valor/es de la variable independiente donde se produce la discontinuidad e indica el tipo de discontinuidad.*



Salto infinito en x = –1



Salto finito en x = –1

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

2.2. Monotonía: Crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos

Las siguientes definiciones quizás te resulten conocidas de 3º de ESO.

Una función es **constante** en un intervalo cuando tome el valor que tome la variable independiente, la dependiente toma siempre el mismo valor. En símbolos, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, para todo x_1 y x_2.

Una función es **estrictamente creciente** en un intervalo cuando al aumentar el valor de la variable independiente aumenta también el de la dependiente. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, para todo x_1 y x_2.

Una función es **creciente (en sentido amplio)** en un intervalo si es estrictamente creciente o constante. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, para todo x_1 y x_2. Puede también decirse que, al aumentar el valor de la variable independiente, el valor de la dependiente NO disminuye.

Una función es **estrictamente decreciente** en un intervalo cuando al aumentar el valor de la variable independiente disminuye también el de la dependiente. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, para todo x_1 y x_2.

Una función es **decreciente (en sentido amplio)** en un intervalo si es estrictamente decreciente o constante. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, para todo x_1 y x_2. Puede también decirse que, al aumentar el valor de la variable independiente, el valor de la dependiente NO aumenta.

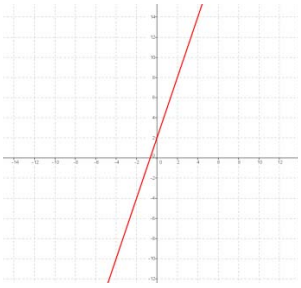
Una función es **estrictamente monótona** en un intervalo cuando es estrictamente creciente o decreciente en dicho intervalo.

Una función es **monótona (en sentido amplio)** en un intervalo cuando es creciente o decreciente (en sentido amplio) en dicho intervalo.

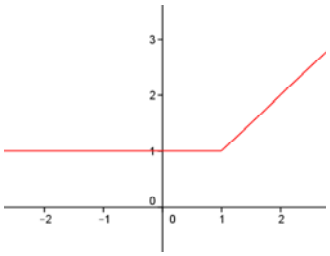
Como indican las definiciones, la monotonía o no de una función se da en un intervalo, es decir, para un conjunto de números reales. Por tanto, una función puede ser creciente para una serie de valores, para otros ser decreciente o constante, luego puede volver a ser creciente o decreciente o constante…

Ejemplos:

- *En las funciones siguientes estudia el crecimiento y el decrecimiento.*



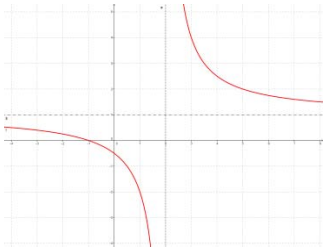
CRECIENTE siempre



CONSTANTE hasta x = 1

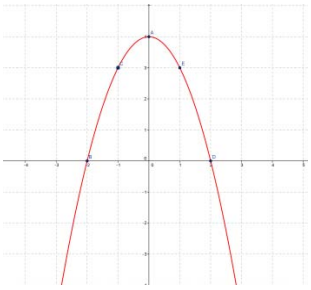
CRECIENTE desde x = 1

CRECIENTE(EN SENTIDO AMPLIO) siempre



DECRECIENTE hasta x = 2

DECRECIENTE desde x = 2



CRECIENTE hasta x=0

DECRECIENTE desde x = 0

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

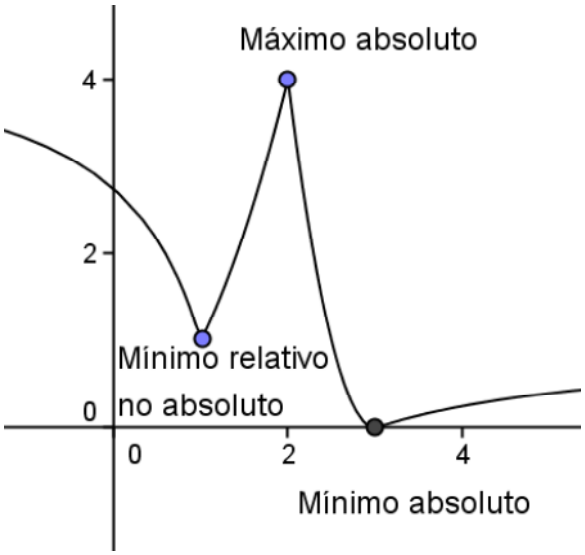
Extremos: máximos y mínimos

Una función presenta un **máximo relativo** en un punto cuando la imagen de la función en dicho punto es mayor que en cualquiera de los valores que están a su alrededor (en su *entorno*). Si, además, la imagen es mayor que en cualquier otro punto de la función, se dice que la función alcanza un **máximo absoluto** en él.

Una función presenta un **mínimo relativo** en un punto cuando la imagen de la función en dicho punto es menor que en cualquiera de los valores que están a su alrededor (en su *entorno*). Si, además, la imagen es menor que en cualquier otro punto de la función, se dice que la función alcanza un **mínimo absoluto** en él.

Si una función presenta un máximo o un mínimo en un punto, se dice que tiene un **extremo** en dicho punto, que podrá ser relativo o absoluto.

Ejemplo:

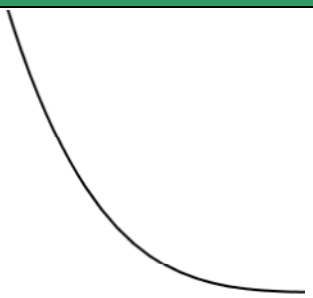
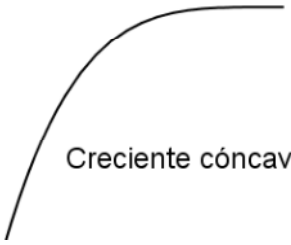
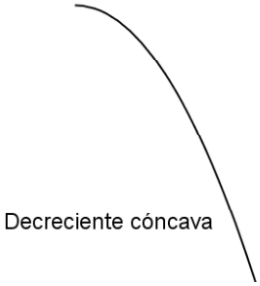


Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

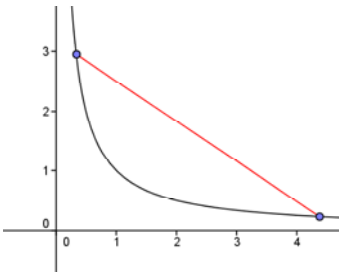
2.3. Curvatura: concavidad, convexidad y puntos de inflexión

Una función es **convexa** si al unir dos puntos de su gráfica el segmento queda por encima de dicha gráfica. Se dice **cóncava** si al hacer la misma operación queda por debajo. Un punto donde se cambia de cóncava a convexa o viceversa se llama **punto de inflexión**.

Una imagen vale más que mil palabras. Así que vamos a dibujar los cuatro tipos de funciones que tenemos:

	Creciente	**Decreciente**
Convexa	Creciente convexa	 Decreciente convexa
Cóncava	 Creciente cóncava	 Decreciente cóncava

Puedes comprobar fácilmente que se cumple la definición. Si unes dos puntos, el segmento que forman está por encima o por debajo de la gráfica, según corresponde. Aquí a la derecha puedes ver un ejemplo con un tramo decreciente y convexo. Observa cómo el segmento queda por encima de la gráfica de la función.



Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

2.4. Simetrías.

Una **función par** es aquella en la que se obtiene lo mismo al sustituir un número y su opuesto:

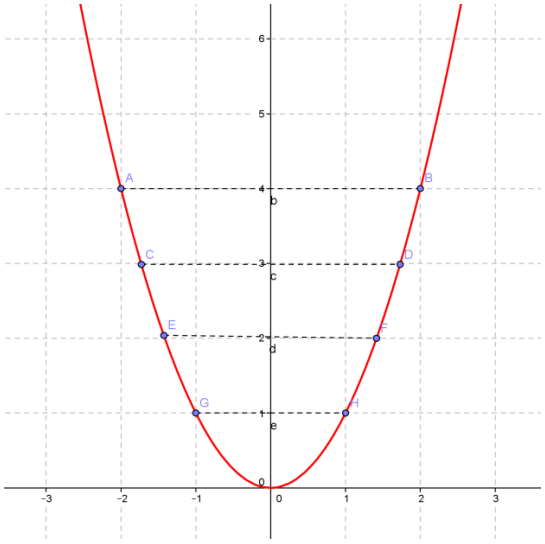
$$f(-x) = f(x)$$

Esta propiedad se traduce en que la función es simétrica respecto al eje de ordenadas, es decir, si doblamos el papel por dicho eje, la gráfica de la función coincide en ambos lados.

Ejemplo:

- *La función cuadrática* $f(x) = x^2$ *es par:*

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$



Una **función impar** es aquella en la que se obtiene lo opuesto al sustituir un número y su opuesto:

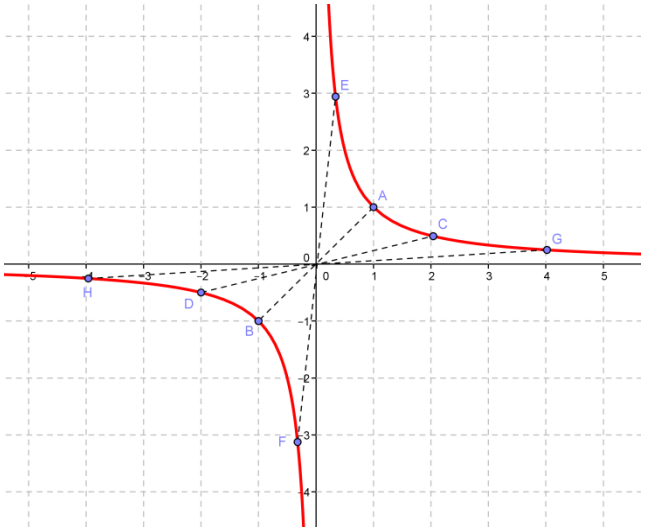
$$f(-x) = -f(x)$$

Esta propiedad se traduce en que la función es simétrica respecto al origen de coordenadas, es decir, si trazamos un segmento que parte de cualquier punto de la gráfica y pasa por el origen de coordenadas, al prolongarlo hacia el otro lado encontraremos otro punto de la gráfica a la misma distancia.

Ejemplo:

La función de proporcionalidad inversa $f(x) = \frac{1}{x}$ es impar porque:

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)} = \frac{-1}{x} = -f(x)$$



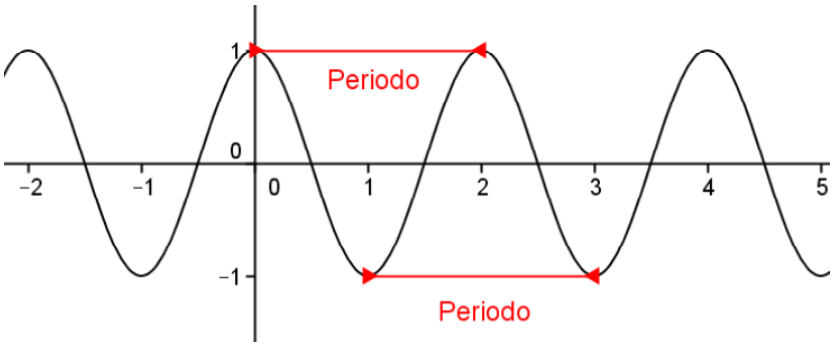
Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

2.5. Periodicidad

Una **función periódica** es aquella en la que las imágenes de la función se repiten conforme se le añade a la variable independiente una cantidad fija, llamada *periodo.*

Ejemplo:

Es muy claro que la siguiente función es periódica de periodo 2. Observa que el periodo se puede medir entre dos "picos" o entre dos "valles". De hecho se puede medir entre dos puntos equivalentes cualesquiera.



2.6. Comportamiento en el infinito

El infinito es, por propia definición, inalcanzable. Pero nos dice mucho de una función saber cómo es para valores muy grandes. Por eso, se recomienda, al dibujar una gráfica, dar un valor (o varios) positivo muy grande y un valor (o varios) muy negativo.

En algunas funciones simplemente ocurre que obtenemos valores muy grandes y "nos salimos de la tabla". Esto simplemente nos da una idea de hacia dónde va la función.

Pero en otras, y esto es lo interesante, nos aproximamos a un número finito. Eso significa que, para valores muy grandes de *x*, la función es aproximadamente una recta horizontal. Esta recta se llama **asíntota**.

Actividad resuelta

- *Dibuja la función* $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$ *dando valores muy grandes y muy negativos.*

Damos valores muy grandes y vemos que nos aproximamos a 1:

$$f(10)=\frac{10^2+2}{10^2+1}=1'0099,\ f(100)=\frac{100^2+2}{100^2+1}=1'0001,\ f(1000)=\frac{1000^2+2}{1000^2+1}=1'000001$$

Si damos valores muy negativos, pasa lo mismo:

$$f(-10)=\frac{(-10)^2+2}{(-10)^2+1}=1'0099,\ f(-100)=\frac{(-100)^2+2}{(-100)^2+1}=1'0001,$$

$$f(-1000)=\frac{(-1000)^2+2}{(-1000)^2+1}=1'000001$$

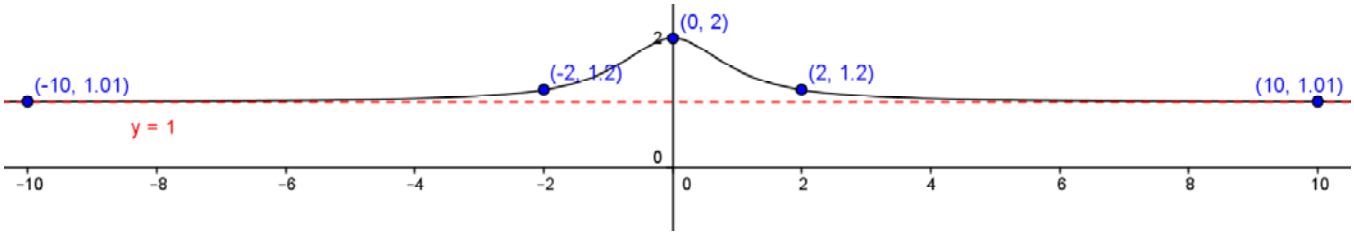
Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

Podríamos haber visto directamente que los valores iban a ser los mismos porque la función es claramente par $f(-x) = f(x)$ y por tanto $f(-10) = f(10)$, $f(-100) = f(100)$ etc.

Eso nos da una idea de que la recta a la que nos aproximamos (asíntota) es la recta horizontal $y = 1$.

Vamos a dar unos valores más y dibujamos la función. Los valores negativos son iguales que los positivos. Hemos redondeado 1'0099 a 1'01

x	–10	–2	0	2	10
y	1'01	1'2	2	1'2	1'01



Observa la línea horizontal que es la asíntota dibujada en rojo a trazos.

2.7. Recopilatorio

Vamos a repasar lo que hemos visto hasta ahora y cómo utilizarlo para las dos cuestiones más importantes de este capítulo.

Cómo dibujar una función

Dibujar una función es esencialmente unir puntos. Vamos, de todas maneras, a repasar los diferentes casos.

1. Lo primero, miramos si la función está definida por una tabla o por una expresión. Si es una tabla no hay nada que hacer más que dibujar y (si tienen sentido los valores intermedios) unir los puntos que nos den y hemos terminado. Pasamos en ese caso al paso 2.
2. Si está definida a trozos, damos el punto o puntos donde cambia la definición y algunos puntos próximos. Típicamente el punto crítico +0'1 y –0'1. Por ejemplo, si cambia en 1, daríamos 1, 0'9 y 1'1.
3. En general, intentamos dar un valor muy grande y otro negativo, muy grande en valor absoluto. Si vemos que se estabiliza, los ponemos, es una asíntota.
4. Damos dos o tres puntos más cualesquiera.
5. Unimos los puntos (si tienen sentido los valores intermedios).

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

Actividades propuestas

8. Indica el dominio y recorrido de las siguientes funciones y dibújalas:

a. $\dfrac{1}{2x+6}$ b. $x+\dfrac{1}{3x-6}$ c. x^3-3x

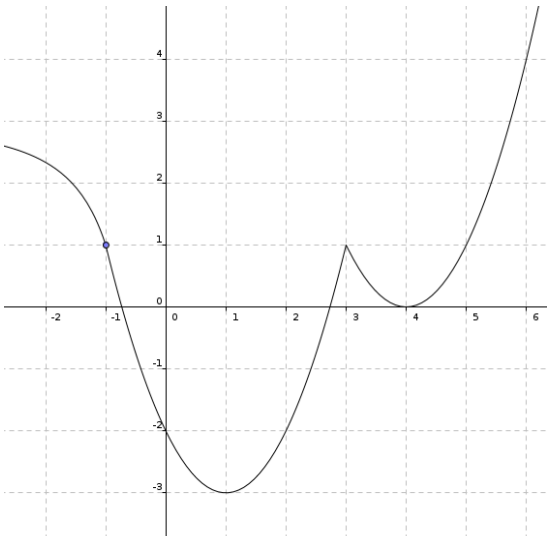
Cómo describir una función

Si nos dan la gráfica de una función y nos piden describirla, es sencillo:

1. Miramos los valores de *x* donde cambia el comportamiento.
2. Describimos cada uno de los tramos
3. Describimos los máximos y mínimos indicando si son relativos o absolutos.

Actividad resuelta

- *Describir la función*



Lo primero, la función es continua. Los puntos donde "pasa algo" son $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$ y $x = 4$. Pasamos a describir los tramos:

En $(-\infty, -1)$ decreciente cóncavo. En $(-1, 1)$ decreciente convexo. En $(1, 3)$ creciente convexo. En el intervalo $(3, 4)$ decreciente convexo. En $(4, +\infty)$ creciente convexo.

A veces se pone separado el crecimiento y la curvatura:

Creciente en $(1, 3) \cup (4, +\infty)$

Decreciente en $(-\infty, 1) \cup (3, 4)$

Cóncava en $(-\infty, -1)$. Convexa en $(-1, 3) \cup (3, +\infty)$

Finalmente hay un máximo relativo en $x = 3$. Hay mínimos relativos en $x = 1$ y $x = 4$. No hay máximo absoluto y en $x = 1$ hay un mínimo absoluto.

No hay asíntotas. Cuando *x* se hace muy grande la *y* tiende a $+\infty$, y cuando la *x* se acerca a $-\infty$ la *y* tiende también a $+\infty$.

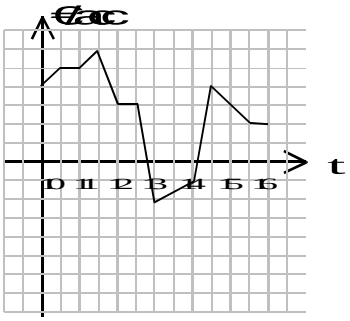
Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

Actividades propuestas

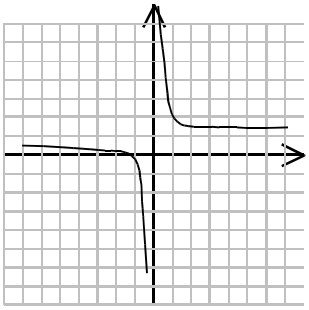
9. Dibuja las siguientes funciones e indica sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) $y = x^3$ **b)** $y = x^5$ **c)** $y = \frac{1}{x^2}$

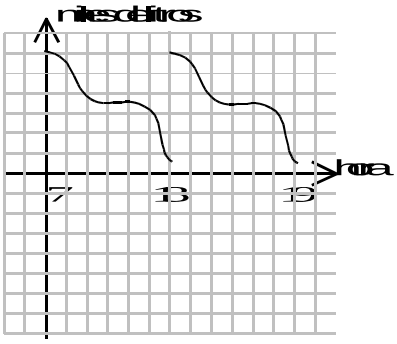
10. La gráfica que se da a continuación indica la evolución de un valor de la bolsa (en el eje vertical en miles de euros por acción) durante una jornada. Estudia su dominio, recorrido, puntos de corte, simetría, periodicidad, crecimiento, continuidad, máximos y mínimos.



11. Estudia la siguiente gráfica, indicando: dominio, recorrido, puntos de corte con los ejes, simetría, periodicidad, crecimiento, continuidad, máximos y mínimos.



12. La gráfica que se da a continuación representa el volumen de combustible en el depósito de una gasolinera al cabo de un día. Estudia su dominio, recorrido, puntos de corte, simetría, periodicidad, crecimiento, continuidad, máximos y mínimos.



Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

2.8. Ampliación: Traslaciones

Con lo que hemos visto anteriormente, ya podemos dibujar cualquier función. Lo que vamos a describir ahora es una manera de ahorrarnos trabajo en algunas ocasiones.

A veces, hemos dibujado una función y nos piden dibujar otra similar. Por ejemplo, si estudiamos un cuerpo en caída libre, el espacio recorrido es $y=\frac{1}{2}9'8x^2$. Pero, si el cuerpo ya había recorrido un espacio de 10 m, sería $y=10+\frac{1}{2}9'8x^2$. Si la quisiéramos dibujar, en principio deberíamos volver a dar todos los valores. Pero, ¿no podremos evitarnos esfuerzos y aprovechar la gráfica que YA tenemos?

Sí, podemos. Vamos a verlo ahora.

Traslaciones verticales.

Trasladar verticalmente K unidades una función *f*(*x*) es sumarle a la variable dependiente *y* = *f*(*x*) la constante K. En otras palabras, movemos la función hacia arriba o abajo.

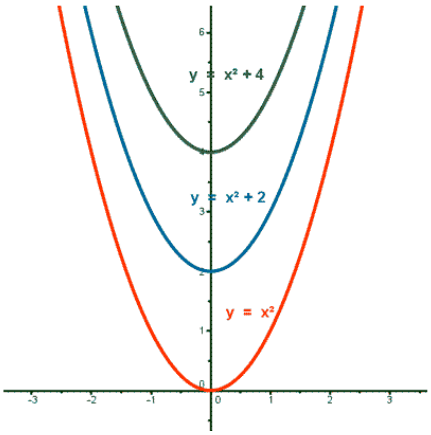
Se obtiene la función: ***y* = *f*(*x*) + K**

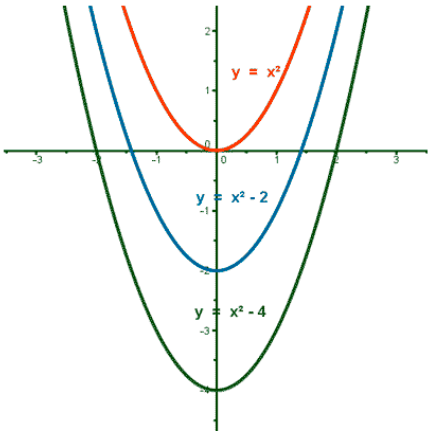
- Si K > 0 la función se traslada **hacia arriba**.

- Si K < 0 la función se traslada **hacia abajo**.

Ejemplo:

Representa, mediante la realización previa de una tabla de valores, la función $f(x)=x^2$. A continuación, mediante traslación, la de las funciones $f(x)=x^2+2$, $f(x)=x^2+4$, $f(x)=x^2-2$ y $f(x)=x^2-4$.





Traslaciones horizontales.

Trasladar horizontalmente K unidades una función *f*(*x*) es sumarle a la variable independiente *x* la constante K.

Se obtiene la función *y* = *f*(*x* + K)

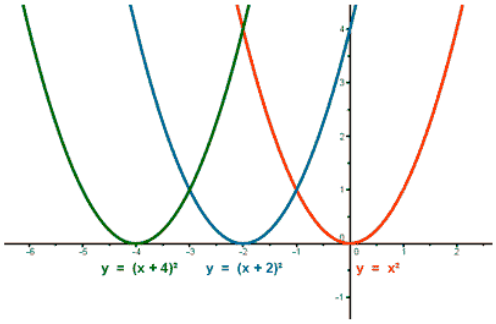
- Si K > 0 la función se traslada **hacia la izquierda**.

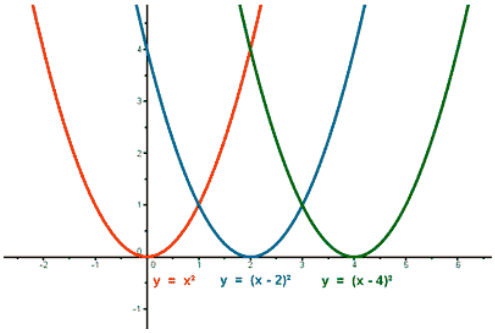
- Si K < 0 la función se traslada **hacia la derecha.**

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

Ejemplo:

- *Representa las funciones* $f(x)=x^2$, $f(x)=(x+2)^2$, $f(x)=(x+4)^2$, $f(x)=(x-2)^2$ *y* $f(x)=(x-4)^2$.





Actividades propuestas

13. Representa la función $y=10+\frac{1}{2}9'8x^2$ que poníamos como ejemplo e interpreta su sentido físico.

14. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y=x^2+2$ b. $y=2-x^2$ c. $y=2x^2$ d. $y=-2x^2$

15. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y=\frac{1}{x}+5$ b. $y=\frac{5}{x}$ c. $y=\frac{1}{x}-2$ d. $y=\frac{2}{x}+3$

16. Representa la función $f(x) = 4 - x^2$ y, a partir de ella, dibuja las gráficas de las funciones:

17. y = $f(x) - 3$ b. y = $f(x) + 3$ c. y = $f(x - 3)$ d. y = $f(x + 3)$

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

3. VALORES ASOCIADOS A LAS FUNCIONES

Muchas veces, nos interesa el comportamiento de una función en un valor concreto y alguna medida sobre ella. Por ejemplo, si consideramos el espacio que recorre un coche, lo que nos puede interesar no es todo el recorrido, sino sólo la velocidad al pasar junto a un radar. Las medidas más importantes vamos a describirlas ahora.

3.1. Tasa de variación y tasa de variación media (velocidad)

La **tasa de variación** de una función entre dos puntos *a* y *b* es la diferencia entre el valor de la función para *x* = *a* y el valor para *x* = *b*. En símbolos:

$$TV[a,b] = f(b) - f(a)$$

La **tasa de variación media** (**velocidad media**) de una función entre dos puntos *a* y *b* es el cociente entre la tasa de variación entre los mismos y la diferencia *a* y *b*. En símbolos:

$$TVM[a,b] = \frac{TVM[a,b]}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Estos conceptos pueden parecerte raros al principio. Pero realmente son cosas que se aplican mucho en la vida diaria. Pensemos en un coche que se mueve. El espacio que recorre entre dos momentos de tiempo es la tasa de variación. La velocidad media a lo que los ha recorrido es la tasa de variación media.

Actividad resuelta

- *El coche en que circulamos recorre 100 Km a 50 Km/h y luego otros 100 Km a 100 Km/h. En consecuencia, el espacio recorrido viene dado por la función* $f(t) = \begin{cases} 50t, & t \le 2 \\ 100 + 100(t-2), & t > 2 \end{cases}$. *Se pide:*

  1. Justificar la función que da el espacio recorrido.
  2. Calcular e interpretar las tasas de variación TV[0, 3], TV[1, 2], TV[2'5, 3]
  3. Calcular e interpretar las tasas de variación medias TVM[0, 3], TVM[1, 2], TVM[2'5, 3]
  4. ¿Por qué la velocidad media NO han sido 75 Km/h, que es la media de las velocidades?

Apartado 1.

Para justificar la función, sólo tenemos que recordar la superconocida fórmula $e = vt$. Lo único que hay que ver es cuándo cambia la velocidad.

Si el coche va a 50 km/h, obviamente en 2 h llega a los 100 km y cambia la velocidad. Hasta entonces, el espacio recorrido es 50*t* (velocidad por tiempo). A partir de allí, sería 100(*t* – 2) puesto que contamos el tiempo desde el instante 2. A ello se le debe sumar el espacio ya recorrido, que son 100.

Apartado 2. La tasa de variación no es más que el espacio recorrido. Basta con aplicar la definición. Como ya hemos dicho antes, no nos tiene que dar ningún miedo las funciones definidas a trozos. Simplemente sustituimos donde corresponda y punto.

$TV[0,3] = f(3) - f(0) = [100 + 100 \cdot (3-2)] - 50 \cdot 0 = 200$. Entre 0 y 3 horas hemos recorrido 200 Km.

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

$TV[1,2] = f(2) - f(1) = 50 \cdot 2 - 50 \cdot 1 = 50$. Entre 1 y 2 horas hemos recorrido 50 Km.

$TV[2'5,3] = f(3) - f(2'5) = [100 + 100 \cdot (3-2)] - [100 + 100 \cdot (2'5-2)] = 100 \cdot (3-2'5) = 50$. Hemos recorrido 50 Km entre las 2'5 horas y las 3.

Apartado 3. La tasa de variación media es lo que en el lenguaje de la calle se llama velocidad (media). Y para calcularla se divide el espacio entre el tiempo, sin más.

$TVM[0,3] = \frac{f(3)-f(0)}{3-2} = \frac{[100+100\cdot(3-2)]-50\cdot 0}{3-0} = 66'67$ Km/h. Entre 0 y 3 horas nuestra velocidad media ha sido de 66'67 Km/h, una media (ajustada por el tiempo) de las velocidades.

$TVM[1,2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{50}{2-1} = 50$. Entre 1 y 2 horas nuestra velocidad ha sido de 50 Km/h, como planteaba de hecho el problema.

$TVM[2'5,3] = \frac{f(3)-f(2'5)}{3-2'5} = \frac{50}{3-2'5} = 100$. Entre 2'5 y 3 horas nuestra velocidad ha sido, como era de esperar, de 100 Km/h

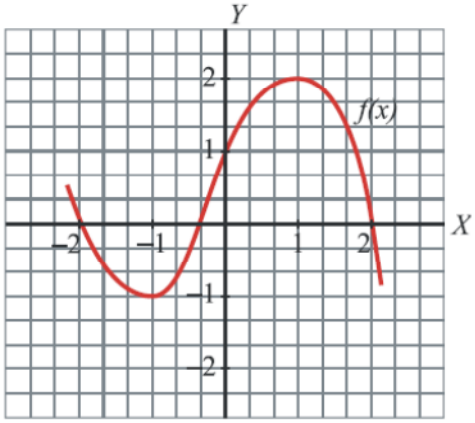
Apartado 4. Pues porque hemos pasado más tiempo circulando a 50 Km/h que a 100 Km/h y por tanto nuestra velocidad media debe estar más cerca de 50 que de 100.

Actividades propuestas

18. Dada la función $f(x) = (x-1)^3$, calcula la tasa de variación media en el intervalo [0, 1]. ¿Es creciente o decreciente la función en dicho intervalo?

19. Dada la función $f(x) = \frac{3}{x}$, calcula la tasa de variación media en el intervalo [–3, –1]. ¿Es creciente o decreciente la función en dicho intervalo?

20. Calcula la TVM de esta función *f*(*x*) en los siguientes intervalos: a) [–1, 0] y b) [1, 2].



21. Consideremos la función $f(x) = \frac{x^2-1}{2}$. Halla la tasa de variación media en el intervalo [0, 2] e indica si es creciente o decreciente en ese intervalo.

22. Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = 2x^2 - 3x$ en el intervalo [1, 2] e indica si *f*(*x*) crece o decrece en ese intervalo.

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

3.2. Tasa de crecimiento

"… la afiliación al Régimen General de la Seguridad Social, donde hay 13,1 millones de trabajadores, apenas repuntó en 16.852 personas respecto a febrero del 2013, un 0,13 % más" (Diario El Mundo, edición digital, 04/03/2014).

Seguro que has leído (o visto en la tele) noticias como ésta un montón de veces. La medida que están utilizando es lo que se conoce como la tasa de crecimiento. Vamos a proceder a definirla.

La **tasa de crecimiento** de una función entre dos puntos *a* y *b* es el cociente entre la tasa de variación y el valor de la función en *x* = *a*. En símbolos: $T_{Crec}[a,b]=\frac{f(b)-f(a)}{f(a)}$ o bien $T_{Crec}[a,b]=\frac{TV[a,b]}{f(a)}$.

Se suele expresar en tanto por cierto, por lo que normalmente se multiplica por 100. Las fórmulas pasan a ser entonces $T_{Crec}[a,b]=\frac{f(b)-f(a)}{f(a)}\cdot 100$ o $T_{Crec}[a,b]=\frac{TV[a,b]}{f(a)}\cdot 100$

Si *f*(*a*) = 0 la tasa de crecimiento **no está definida**. NO SE PUEDE DIVIDIR ENTRE 0.

Observa que la tasa de crecimiento puede ser negativa, indicando una disminución. Crecer al –5 % significa haber perdido el 5 %.

Ejemplo:

- *Vamos a comprobar que en el periódico han calculado bien la tasa de crecimiento.*

Los instantes del tiempo no son importantes. En el instante inicial es $f(a)=13.100.000$ trabajadores. En el instante final hay que sumarle el aumento $f(b)=13100000+16852$ = 13.116.852.

Aplicando la fórmula

$$T_{Crec}[a,b]=\frac{f(b)-f(a)}{f(a)}\cdot 100=\frac{13.116.852-13.100.000}{13.100.000}\cdot 100=0'1286\ \%$$

que se redondea al 0'13 %. Está bien calculado.

Observa que la tasa de variación es 16852 por lo que lo podíamos haber calculado directamente con la otra fórmula:

$$T_{Crec}[a,b]=\frac{TV[a,b]}{f(a)}\cdot 100=\frac{16852}{13.100.000}\cdot 100=0'1286\ \%$$

y, obviamente, sale lo mismo.

Actividades propuestas

23. Dada la función $f(x)=(x+1)^3$, calcula la tasa de crecimiento en el intervalo [0, 1].

24. La función $f(x)=1000\cdot(1'03)^x$ representa el resultado de ingresar 1000 € en el banco (*x* = 0 es el estado inicial y, naturalmente, vale 1000 €). Calcula su tasa de crecimiento entre 0 y 1, entre 1 y 2 y entre 2 y 3. ¿Qué relación hay entre ellas? ¿Puedes dar una explicación de por qué?

25. La siguiente tabla representa la población mundial (estimada) en millones de personas. Calcula la tasa de crecimiento para cada intervalo de 5 años. ¿Qué observas?

Año	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
Población	3692	4068	4435	4831	5264	5674	6071	6456	6916

26. ¿Podrías dar un ejemplo de una función cuya tasa de crecimiento sea constantemente 2?

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

CURIOSIDADES. REVISTA

Dice el premio Nobel de 1963 EUGENE WIGNER:

"La enorme utilidad de las Matemáticas en las ciencias naturales es algo que roza lo misterioso, y no hay explicación para ello. No es en absoluto natural que existan "leyes de la naturaleza", y mucho menos que el ser humano sea capaz de descubrirlas. El milagro de lo apropiado que resulta el lenguaje de las Matemáticas para la formulación de leyes de la Física es un regalo maravilloso que no comprendemos ni nos merecemos".

Las funciones se han utilizado para hacer modelos matemáticos de las situaciones reales más diversas. Antes de la época de los ordenadores las funciones que solían utilizarse eran las funciones lineales (que ya conoces pero que estudiarás detenidamente en el próximo capítulo). Se *linealizaban* los fenómenos. Al usar otras funciones, como por ejemplo parábolas pueden complicarse mucho las cosas. Incluso puede aparecer el caos.

¿Sabes qué es el caos?

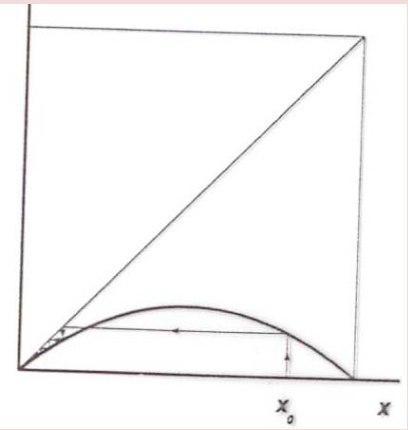
Vamos a estudiar un ejemplo en el que aparece el caos: La **ecuación logística**. Es un modelo matemático propuesto por P. F. Verhulst en 1845 para el estudio de la dinámica de una población. Explica el crecimiento de una especie que se reproduce en un entorno cerrado sin ningún tipo de influencia externa. Se consideran valores x entre 0 y 1 de la población.

$$y = r(x(1 - x))$$

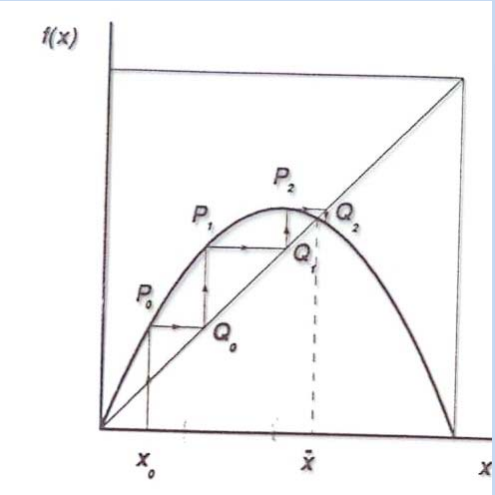
Si nos quedamos con el primer término, $y = rx$ sería un modelo lineal, y nos indica el crecimiento de la población, pero tiene un término de segundo grado que hace que sea un polinomio de segundo grado. Si en algún momento $y = x$ la población se mantendrá siempre estable para ese valor. Por ejemplo, si $x = 0$ entonces $y = 0$, y siempre habrá una población de tamaño 0. Estos valores que hacen que $y = x$ se denominan **puntos fijos**.

El comportamiento es distinto según los valores que tome r. Por ejemplo, para $r < 1$, se extingue la especie.

Dibujamos la parábola para $r = 0{,}9$. Imaginamos que en el instante inicial hay una población x_0. Buscamos, cortando verticalmente a la parábola, el valor de y. Para transformarlo en el nuevo x, cortamos a la diagonal del primer cuadrante. Observa que la población cada vez es menor y que va hacia la extinción. Observa con cuidado ese proceso de ir cortando a la parábola y a la diagonal, para volver a cortar a la parábola y así sucesivamente.



Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez



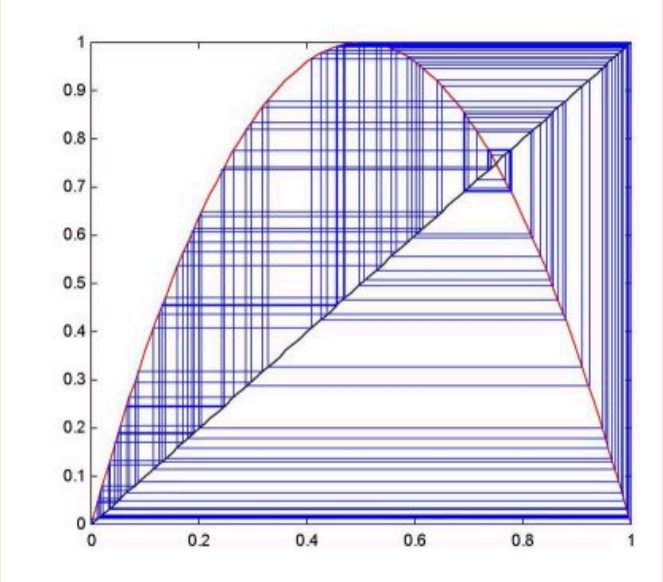
Para valores de r comprendidos entre 1 y 3: $1 < r < 3$, entonces la población se estabiliza, tiende a un punto fijo.

Hemos dibujado la parábola para $r = 2{,}5$, e igual que antes partimos de un valor inicial cualquiera, en este caso x_0, que se convierte en $y = P_0$. Ese valor lo tomamos como abscisa: $x = Q_0$, y calculamos el nuevo valor de $y = P_1$… Observa cómo la población se estabiliza hacia el valor de intersección de la parábola con la diagonal.

Para valores entre 3 y 3,56994546 las cosas empiezan a complicarse, hasta que …

Para r mayor o igual a 3,56994546 tenemos sensibilidad extrema a las condiciones iniciales, tenemos **caos**.

No sabemos qué puede ocurrir. La población fluctúa constantemente. Y ese comportamiento tan errático es debido a ¡una función polinómica de segundo grado!



El término **caótico** va a indicar que puntos próximos en el instante inicial puedan tener comportamientos dispares en el futuro.

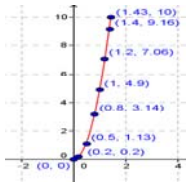
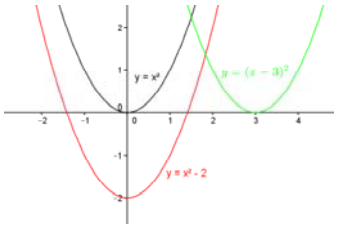
El meteorólogo americano *Edward N. Lorenz* utilizó el término de **efecto mariposa** para explicar por qué el tiempo atmosférico no es predecible a largo plazo, es decir para explicar que existía una dependencia sensible a las condiciones iniciales: *"El **aleteo de una mariposa** en Brasil, ¿podría provocar un tornado en Texas?"*

¿Lo habías oído?

Este es un ejemplo de caos dibujado con el ordenador. Hay 5 órbitas bien definidas, pero un punto de la frontera entre órbitas no sabemos en cuál terminará.

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

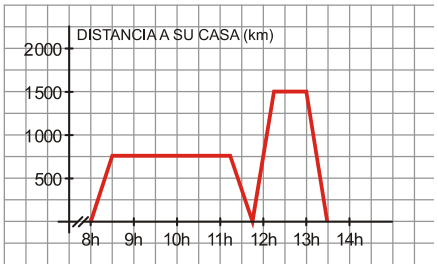
RESUMEN

		Ejemplos
Función	Una relación o correspondencia entre dos magnitudes, tales que a cada valor de la variable independiente, *x*, le corresponde ***un solo*** valor de la dependiente, *y*.	$y = 2x + 3$, $y = \dfrac{1}{x^2+1}$
Gráfica de una función	Son los (normalmente infinitos) puntos por los que pasa. Es decir, todos los valores $(x, f(x))$ puesto que $y = f(x)$.	
Maneras de describir una función.	- **Dando una tabla de valores.** Como en la columna de al lado - **Dando una expresión**. $y = 2^x$ - **A trozos**: Varias expresiones. $y = \begin{cases} x+1, x > 2 \\ x,\ x \le 2 \end{cases}$	*X* / *Y* –3 / 2 –2 / 0 2 / 3
Dominio y recorrido.	- **Dominio.** Son los valores de "*x*" donde la función tenga sentido. - **Recorrido**. Son los valores de "*y*" que se alcanzan.	El dominio de la función $\sqrt{2-x}$ es $(-\infty, 2)$ y su recorrido $[0, +\infty)$
Características de una función	Debemos estudiar su continuidad, crecimiento, máximos y mínimos, curvatura, simetrías y comportamiento en el infinito.	$y = x^2 + 2$ es continua, creciente en $(-\infty, 0)$, decreciente en $(0, \infty)$, tiene un mínimo absoluto en 0 y es siempre convexa
Traslaciones	- **Vertical.** $y = f(x) + K$. En sentido de K: Si K es positivo hacia arriba, si no hacia abajo. - **Horizontal**. $y = f(x + K)$. En sentido **contrario** de K: Si K es positivo hacia la izquierda, si no hacia la derecha.	
Valores asociados	- **Tasa de variación (TV):** $f(b) - f(a)$ - **Tasa de variación media (TVM):** $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ - **Tasa de crecimiento T_{crec}:** $\dfrac{f(b) - f(a)}{f(a)}$	$y = x + 2$ $TV[3,5] = 2$ $TVM[3,5] = \dfrac{2}{5-3} = 1$ $T_{crec}[3,5] = \dfrac{2}{5} = 40\%$

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

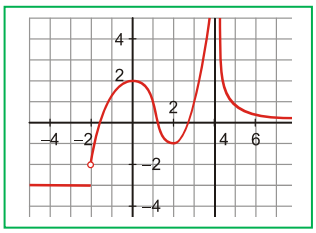
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Pablo salió de su casa a las 8 de la mañana para ir al instituto. En el recreo, tuvo que volver a su casa para ir con su padre al médico. La siguiente gráfica refleja la situación:



a. ¿A qué hora comienzan las clases y a qué hora empieza el recreo?
b. ¿A qué distancia de su casa está el instituto? ¿Qué velocidad lleva cuando va a clase?
c. ¿A qué distancia de su casa está el consultorio médico? ¿Qué velocidad llevan cuando se dirigen allí?
d. ¿Cuánto tiempo ha estado en clase? ¿Y en el consultorio médico?

2. Dada la función a través de la siguiente gráfica:



a) Indica cuál es su dominio de definición.

b) ¿Es continua? Si no lo es, indica los puntos de discontinuidad.

c) ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y cuáles los de decrecimiento de la función? ¿Qué ocurre en el intervalo $(-\infty, -2]$?

3. Dibuja las gráficas de estas hipérbolas y determina sus dominios, calcula sus asíntotas y los puntos de corte con los ejes de coordenadas:

a. $y = \dfrac{2x}{x-2}$ b. $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$ c. $y = \dfrac{4x}{2x+1}$

4. Dibuja la gráfica de $f(x) = \begin{cases} 1-x & si \quad x \le 1 \\ x^2 - 4x & si \quad 1 < x \end{cases}$ y explica si es continua en $x = 1$.

5. Tres kilos de peras nos han costado 4,5 €; y, por siete kilos, habríamos pagado 10,5 €. Encuentra la ecuación de la recta que nos da el precio total, "y", en función de los kilos que compremos, "x". Represéntala gráficamente.

6. Describe las siguientes funciones cuadráticas y haz un boceto de su gráfica:

a. $y = 4x^2 + 8x - 5$ b. $y = x^2 + 3x - 4$ c. $y = 8 - 2x - x^2$

7. Calcula los puntos de corte con los ejes y el vértice de las siguientes parábolas y utiliza estos datos para representarlas gráficamente

a. $y = x^2 + 5x + 6$ b. $y = -x^2 + 4x + 5$

8. La altura sobre el suelo de un proyectil lanzado desde lo alto de una muralla viene dada, en función del tiempo, por $h(t) = -5t^2 + 15t + 20$, donde t se expresa en segundos, y h, en metros. Dibuja la gráfica de esta función y calcula:

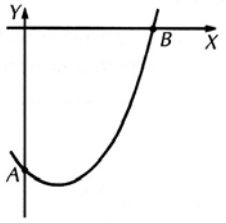
a. La altura de la muralla.

b. La altura máxima alcanzada por el proyectil y el tiempo que tarda en alcanzarla.

c. El tiempo que tarda en impactar contra el suelo.

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

9. La gráfica muestra el dibujo aproximado de la curva $y = x^2 - 2x - 8$. Calcula:



a. Las coordenadas de los puntos A y B.

b. La ecuación de una recta que pase por los puntos A y B.

10. Representa las siguientes funciones:

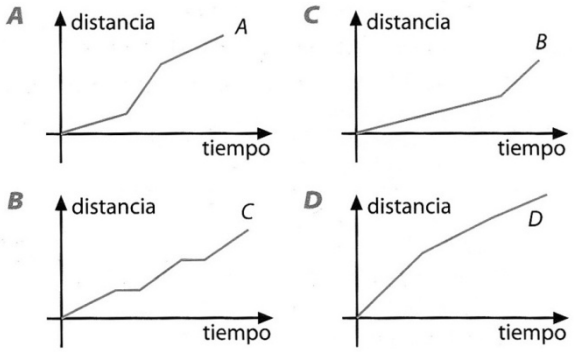
a. $y = 3/x$ b. $y = 4/x - 5$ c. $y = \sqrt{x+4}$

d. $y = \sqrt{x-2}$ e. $y = \begin{cases} x+3 & si \quad x < -1 \\ 2 & si \quad -1 \le x < 4 \\ x^2 - 10 & si \quad 4 \le x \end{cases}$

11. El coste diario de fabricación, en euros, de *x* artículos se expresa con la igualdad $C = 40x + 250$, y el ingreso diario de su venta, mediante $V = -2x^2 + 100x$. ¿Qué cantidad de artículos se deben fabricar al día para que su venta reporte un beneficio máximo? *Nota*: el beneficio es la diferencia entre el ingreso y el coste.

12. La base y la altura de un triángulo suman 4 centímetros. ¿Qué longitud deben tener ambas para que el área del triángulo sea máxima?

13. Asigna las gráficas al recorrido efectuado por los siguientes estudiantes en su camino diario al Instituto:



a) Emilio es el que vive más lejos del Instituto.

b) Ana debe recoger a dos amigas por el camino y siempre le toca esperar.

c) Felipe es el que menos tiempo tarda.

d) Isabel es dormilona; siempre le toca correr en el último tramo, aunque es la que vive más cerca del Instituto.

14. Un rectángulo tiene un perímetro de 14 cm. Suponiendo que la base del mismo tiene una longitud de *x* cm,

a. Probar que el área del mismo *A* está dada por la función .

b. Dibuja la gráfica correspondiente a esta función, tomando para ello valores de *x* de 0 a 7. Utilizando la gráfica, calcula los siguientes apartados.

c. El área del rectángulo cuando

d. Las dimensiones del rectángulo cuando su área es 9

e. El área máxima del rectángulo.

f. Las dimensiones del rectángulo correspondientes a esa área máxima.

15. La velocidad *v* en m/s de un misil *t* segundos después de su lanzamiento viene dada por la ecuación . Utilizando la gráfica de esta función, calcula:

a. La máxima velocidad que alcanza el misil.

b. El tiempo que necesita para acelerar hasta conseguir una velocidad de 52 m/s.

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

c. El intervalo (aproximado, resuelve gráficamente) de tiempo en el cual el misil vuela a más de 100 m/s.

16. El precio del viaje de fin de curso de un grupo de alumnos es de 200 euros por persona si van 30 alumnos o menos. En cambio, si viajan más de 30 y menos de 40, rebajan un 5 % por cada alumno que sobrepase el número de 30, y si viajan 40 o más, el precio por persona es de 100 euros. Halla la expresión y dibuja la gráfica de la función que hace corresponder al número de viajeros el precio del viaje.

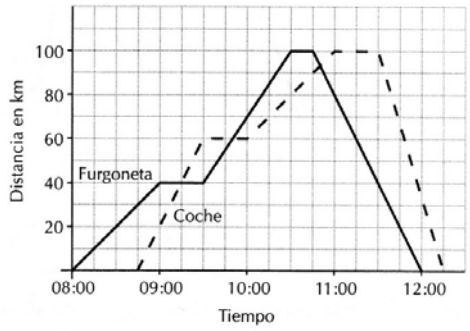
17. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a. $y = \frac{5x-3}{4x-1}$ c. $y = \sqrt{3x+6}$ e. $y = \frac{4x^2-3x}{1+5x-6x^2}$

b. $y = 2x^4 - 3x^2 + 1$ d. $y = 2 - \frac{3}{x^2-3x}$ f. $y = \sqrt[3]{x^2+2x}$

18. La siguiente gráfica muestra los viajes hechos por una furgoneta y un coche saliendo desde Teruel hacia la población de Alcañiz, ida y vuelta.

a. ¿Cuánto tiempo se detuvo la camioneta durante el trayecto?
b. ¿A qué hora adelantó el coche a la furgoneta?
c. ¿Qué velocidad llevaba la camioneta entre las 9:30 y las 10:00?
d. ¿Cuál fue la mayor velocidad alcanzada por el coche durante el viaje?
e. ¿Cuál fue la velocidad media del coche en el viaje completo?



19. Representa gráficamente la siguiente función: . Una vez representada estudia las zonas de crecimiento-decrecimiento, los extremos (máximos-mínimos) y su continuidad.

20. Representa gráficamente una función, *f*, que cumpla las siguientes condiciones:

a. Dom (*f*) = [–5, 6]
b. Crece en los intervalos (–5, –3) y (0, 6); decrece en el intervalo (–3, 0).
c. Es continua en su dominio.
d. Corta al eje X en los puntos (–5, 0), (–1, 0) y (4, 0).
e. Tiene un mínimo en (0, –2) y máximos en (–3, 3) y (6, 3).

21. Construye una gráfica que represente la audiencia de una determinada cadena de televisión durante un día, sabiendo que:

a. A las 0 horas había, aproximadamente, 0'5 millones de espectadores.
b. Este número se mantuvo prácticamente igual hasta las 6 de la mañana.
c. A las 7 de la mañana alcanzó la cifra de 1'5 millones de espectadores.
d. La audiencia descendió de nuevo hasta que, a las 13 horas, había 1 millón de espectadores.
e. Fue aumentando hasta las 21 horas, momento en el que alcanzó el máximo: 6'5 millones de espectadores.
f. A partir de ese momento, la audiencia fue descendiendo hasta las 0 horas, que vuelve a haber, aproximadamente, 0'5 millones de espectadores.

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica cuál de las siguientes expresiones algebraicas es una función real:

a) $x^2 + y^2 = 1$ b) $y = -2x^5 + x^4 - x^3 + 5x - 1$ c) $y = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$ d) $y^2 = x + 1$

2. Estamos confeccionando una tabla de valores de la función $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Indica qué punto no debería estar en la tabla:

a) (0, 1) b) (1/2, 2) c) (2, 1/5) d) (1, 0)

3. El dominio de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ es:

a) La recta real b) $\{x \in \Re \mid x < 1\}$ c) $\{x \in \Re \mid x \geq 1\}$ d) $\{x \in \Re \mid x \geq 0\}$

4. Indica que tipo de discontinuidad o continuidad presenta la función $f(x) = \begin{cases} -x, \ si \ x \in [-2,1] \\ x, \ si \ x \in (1,2] \end{cases}$ en el punto $x = 1$:

a) Es continua b) Tiene una discontinuidad evitable

c) Tiene un salto finito de tamaño 2 d) Tiene un salto infinito

5. Señala la función que tiene simetría par:

a) $y = x$ b) $y = x^2 + 3$ c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x, \ si \ x \in [-2,1] \\ x, \ si \ x \in (1,2] \end{cases}$

6. Señala la función que tiene como asíntota horizontal a la recta y = 1:

a) $y = x$ b) $y = x^2 + 3$ c) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x, \ si \ x \in [-2,1] \\ x, \ si \ x \in (1,2] \end{cases}$

7. La tasa de variación de la función $f(x) = \begin{cases} -x, \ si \ x \in [-2,1] \\ x, \ si \ x \in (1,2] \end{cases}$ entre –1 y 2 es igual a:

a) TV[–1, 2] = 1 b) TV[–1, 2] = 2 c) TV[–1, 2] = 3 d) TV[–1, 2] = 0

8. La tasa de variación media de la función $f(x) = \begin{cases} -x, \ si \ x \in [-2,1] \\ x, \ si \ x \in (1,2] \end{cases}$ entre –1 y 2 es igual a:

a) TV[–1, 2] = 1/3 b) TV[–1, 2] = 2/3 c) TV[–1, 2] = 1 d) TV[–1, 2] = 3

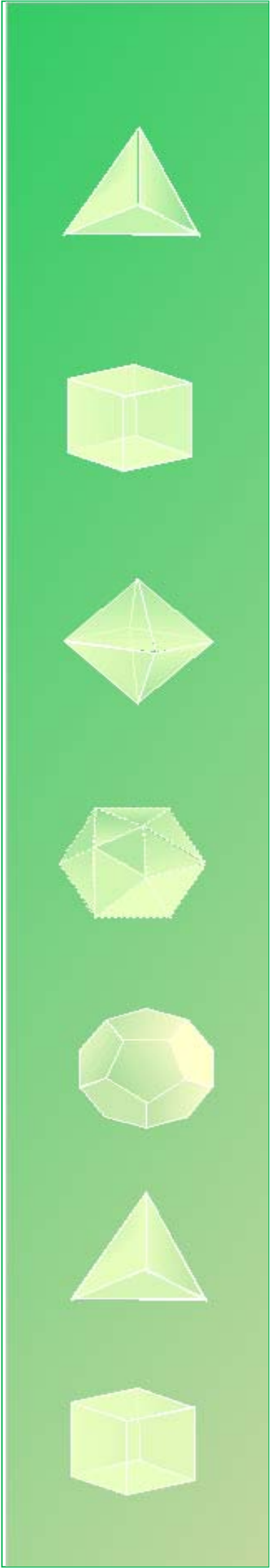
9. La tasa de crecimiento de la función $f(x) = \begin{cases} -x, \ si \ x \in [-2,1] \\ x, \ si \ x \in (1,2] \end{cases}$ entre –1 y 2 es igual a:

a) T_{crec} [–1, 2] = 3 b) T_{crec} [–1, 2] = 2 c) T_{crec} [–1, 2] = 0 d) T_{crec} [–1, 2] = 1

10. La función $y = x^2 + 3$ tiene un mínimo absoluto en el punto:

a) (1, 4) b) (0, 0) c) (0, 3) d) (3, 0)

Autores: Andrés García y Javier Sánchez
Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos
Ilustraciones: Andrés García y Javier Sánchez



Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas:

4ºB ESO

Capítulo 11

Funciones polinómicas, definidas a trozos y de proporcionalidad inversa

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-045277

Fecha y hora de registro: 2014-06-10 18:22:45.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: David Miranda Suárez

Revisora: María Molero

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

1. FUNCIONES POLINOMICAS DE PRIMER GRADO

1.1. PROPORCIONALIDAD DIRECTA

1.2. FUNCIÓN LINEAL. RECTAS DE LA FORMA $y = m \cdot x$

1.3. ESTUDIO DE LA PENDIENTE

1.3. RECTAS DE LA FORMA $y = m \cdot x + n$

2. FUNCIONES POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO

2.1. FUNCIONES POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO. PARÁBOLA $y = a \cdot x^2$

2.2. TRASLACIONES EN EL PLANO.

2.3. FUNCIÓN CUADRÁTICA. PARÁBOLAS DE LA FORMA $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

3. FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

3.1. FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD INVERSA $y = \frac{k}{x}$

3.2. LA HIPÉRBOLA $y = \frac{k}{x-b} + a$

4. FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

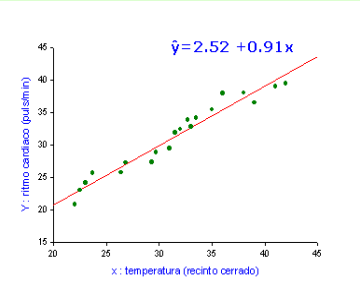
Resumen

En nuestra vida diaria hacemos uso continuamente de las relaciones de proporcionalidad, como cuando vamos a comprar cualquier producto al supermercado, o si queremos comparar dos tarifas de luz distintas para saber cuál nos conviene elegir. En estos casos, la representación gráfica nos facilita la toma de decisiones. El lanzamiento de objetos a ciertas distancias, como lanzar un papel a la basura, llenar el vaso de agua o dar un salto: la trayectoria que describe es una curva que recibe el nombre de *parábola*.

En este capítulo estudiaremos las propiedades más importantes de las *relaciones de proporcionalidad directa e inversa* y las *funciones polinómicas*, así como sus elementos y representaciones gráficas en el plano cartesiano.

Comprender estas funciones es muy útil para la ciencia, ya que se utilizan para comparar datos y para saber si esos datos tienen alguna relación lineal (los datos se comportan como una recta) o de otro tipo (polinómica, exponencial,…).

Al estudio de estos datos y sus curvas se dedica la estadística mediante *el análisis de regresión*. Con la aproximación de datos a rectas o curvas conocidas, se realizan estudios y predicciones, de ahí su importancia para la vida real.



Ejemplo de Recta de regresión

Antes de comenzar

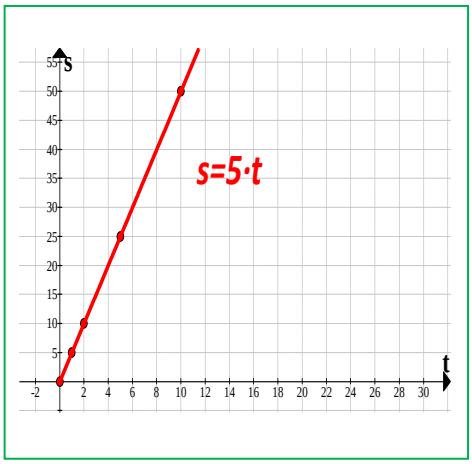
Actividades resueltas

Antes de comenzar, vamos a representar mediante gráficas las siguientes situaciones:

- *Situación 1:* La gráfica s-t de un movimiento rectilíneo uniforme: el espacio recorrido, en función del tiempo, por un ciclista que se desplaza con una velocidad de 5 m/s.

Al tratarse de un movimiento rectilíneo uniforme, podemos describir el espacio recorrido en función del tiempo mediante la fórmula $s = v \cdot t$ donde v = 5 m/s.

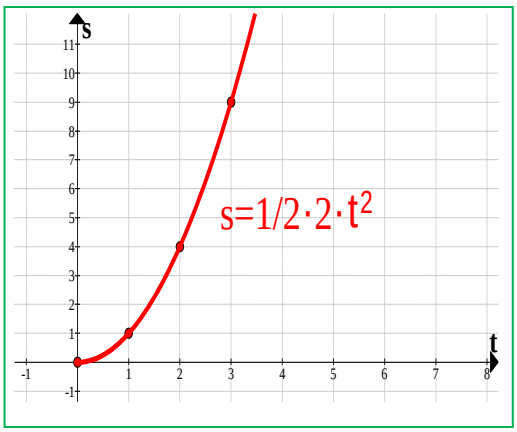
Tiempo (t)	Espacio (s)
0	0
1	5
2	10
5	25
10	50



- *Situación 2*: La gráfica v-t de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado: el espacio recorrido por un ciclista que se desplaza con una aceleración de 2 m/s^2.

En este caso se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, luego podemos describir el espacio recorrido por la fórmula $s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$, donde el espacio inicial y la velocidad inicial son 0. Representamos la función $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$.

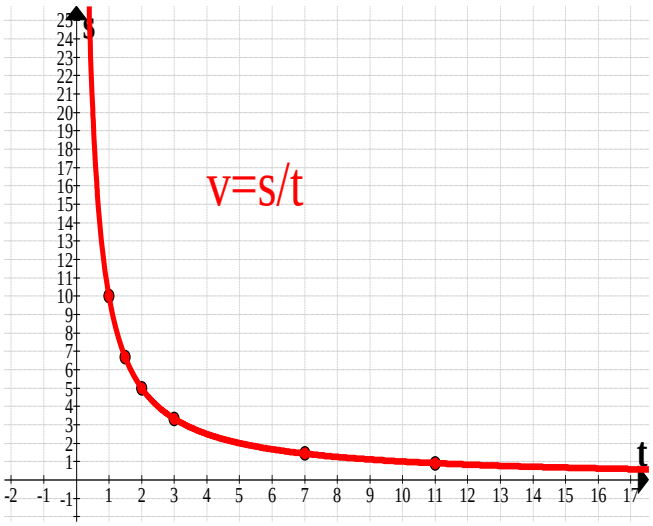
Tiempo (t)	Espacio (s)
0	0
1	1
2	4
3	9



- *Situación 3*: Representamos la velocidad de un ciclista con respecto al tiempo, cuando recorre un espacio de 10 m.

El movimiento que describe es un movimiento rectilíneo uniforme, luego la fórmula que representamos es $v = \frac{s}{t}$, y como el espacio que recorre el ciclista es de 10 metros, $v = \frac{10}{t}$

Tiempo (t)	Velocidad (v)
1	10
1.5	6.67
2	5
3	3.33
5	2
7	1.43
11	0.91



1. FUNCIONES POLINOMICAS DE PRIMER GRADO

1.1. Proporcionalidad directa

Recuerda que dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Al realizar el cociente de cualquiera de los valores de una variable y los correspondientes de la otra, obtenemos la **razón de proporcionalidad directa *k***.

Ejemplo:

- En la situación 1, las magnitudes espacio y tiempo son directamente proporcionales

Tiempo (*t*)	0	1	2	5	10
Espacio (*s*)	0	5	10	25	50

y la razón de proporcionalidad es $k = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{25}{5} = \frac{50}{10} = 5$

Si observamos su gráfica, podemos comprobar que se trata de una semirrecta cuyo origen es el origen de coordenadas. En esta situación no es interesante considerar tiempos negativos, razón por la cual la representación es una semirrecta.

La representación gráfica en el plano cartesiano de dos **magnitudes directamente proporcionales** es una **recta** que pasa por el origen de coordenadas.

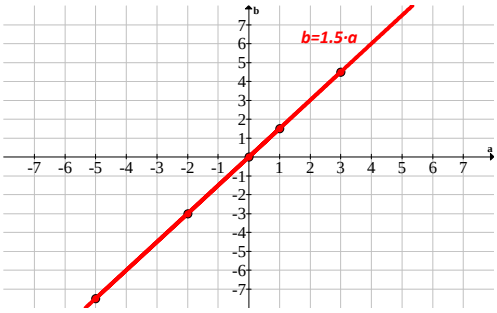
Se puede escribir la relación entre la magnitud A (a) y la magnitud B (b) como $b = k \cdot a$ donde *k* es la **razón de proporcionalidad**.

Para representar estas relaciones de proporcionalidad directa, basta con situar los valores de cada magnitud en el plano cartesiano y unirlos mediante una recta.

Actividades resueltas

- Representa gráficamente la siguiente relación de proporcionalidad dada en la siguiente tabla:

Magnitud A (a)	–5	–2	0	1	3
Magnitud B (b)	–7,5	–3	0	1,5	4,5



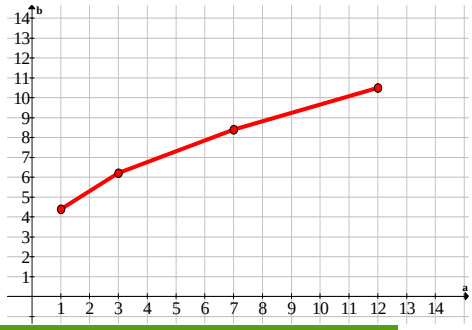
Al calcular la razón de proporcionalidad se obtiene:

$$k=\frac{-7.5}{-5}=\frac{-3}{-2}=\frac{1.5}{1}=\frac{4.5}{3}=1.5$$

La relación se define así: $b=1.5\cdot a$

- La siguiente tabla nos muestra el peso de un bebe los primeros meses de crecimiento. Utilizando una gráfica, decidir si son magnitudes directamente proporcionales.

Meses	1	3	7	12
Peso (Kg)	4,4	6,2	8,4	10,5



Al representar los puntos en el plano, se observa que la gráfica no es una recta, entonces **no son directamente proporcionales**.

Actividades propuestas

1. El consumo medio de agua al día por habitante (en 2011) es de 142 litros. Representa gráficamente el consumo de una persona en una semana.

2. El agua virtual es el agua necesaria para crear un producto. Representa gráficamente las siguientes relaciones:

a. 71 litros para producir una manzana.

b. 10.850 litros para producir unos vaqueros.

c. 4.000 litros para producir una camiseta.

1.2. Función lineal. Rectas de la forma $y = m \cdot x$

La representación gráfica de dos magnitudes directamente proporcionales es una recta que pasa por el origen. Luego la relación de proporcionalidad directa es una función lineal.

Una **función lineal** es una función polinómica de primer grado. Su representación en el plano cartesiano es una recta.

Existen dos tipos de funciones lineales:

- Rectas cuya expresión algebraica es $y = m \cdot x$
- Rectas cuya función viene dada por $y = m \cdot x + n$

En este apartado vamos a estudiar las funciones lineales del primer tipo, es decir las rectas de la forma $y = m \cdot x$

Ejemplo:

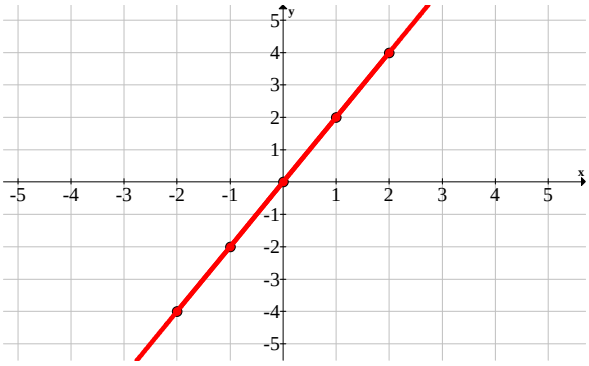
- Las proporciones se representan como rectas de la forma $b = k \cdot a$
  - donde k es la razón de proporcionalidad, $k = \frac{b}{a}$
  - a y b son los valores que toman las magnitudes A y B respectivamente.
- La relación peso – coste de cualquier producto, es una proporcionalidad y se representa con rectas de la forma $y = m \cdot x$
- Muchas de las relaciones en física son proporcionales y se representan mediante rectas como espacio – tiempo, peso – densidad , fuerza – masa, …

Actividades resueltas

- Representa la recta $y = 2 \cdot x$

  Para ello, hay que construir una tabla de valores y representar los puntos. La recta es la consecuencia de unir los puntos.

  Se puede observar, que la variable y se define dando valores a la variable x. Por esta razón x es la variable independiente (puede ser cualquier valor que se le dé) e y es la variable dependiente (depende del valor de la x).



x	−2	−1	0	1	2
y	−4	−2	0	2	4

Nota: para definir una recta es suficiente con dar dos puntos de ella.

Las rectas $y = m \cdot x$ tienen los siguientes componentes:

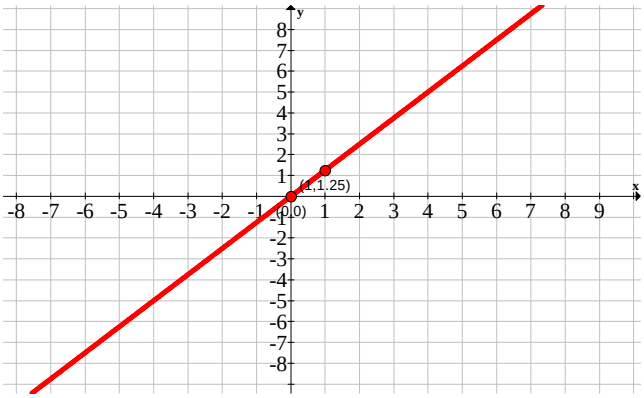
- x es la variable **independiente**.
- y es la variable **dependiente**.
- m es la **pendiente** de la recta, y es lo que diferencia una recta de otra.

Las características más importantes:

- Pasan por el origen de coordenadas, es decir, el punto (0,0) pertenece a la recta.
- Su dominio y su recorrido son todos los reales: tanto x la como la y aceptan cualquier valor.
- Son simétricas respecto al origen, o lo que es lo mismo, son funciones impares.

Actividades resueltas

- Estudia el dominio, máximos y mínimos y simetrías de la función lineal $y = 1,25 \cdot x$



Al tratarse de una recta, se puede observar que el dominio son todos los reales, puesto que se admite cualquier valor de la x.

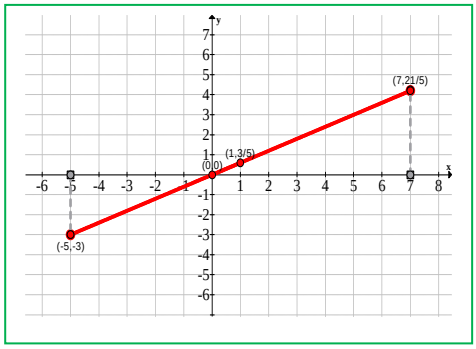
Si no se considera ningún intervalo, la recta no tiene máximos ni mínimos absolutos y relativos.

Para ver la simetría, tomamos la función $y = f(x) = 1,25 \cdot x$

$f(-x) = 1,25 \cdot (-x) = -1,25 \cdot x = -f(x) \Leftrightarrow f \text{ es impar}$

Es decir, es simétrica respecto al origen de coordenadas.

- Estudia la función $y = \frac{3}{5} \cdot x$ en el intervalo $[-5,7]$.



El dominio es todo el intervalo [-5,7].

$f(-x) = \frac{3}{5} \cdot (-x) = -\frac{3}{5} \cdot x = -f(x) \Leftrightarrow f \text{ es impar}$, simétrica respecto al origen.

En los extremos del intervalo, existen mínimo $(-5,-3)$ y máximo (7,21/5).

Actividades propuestas

3. Halla el dominio, máximos y mínimos y la simetría de las siguientes rectas:

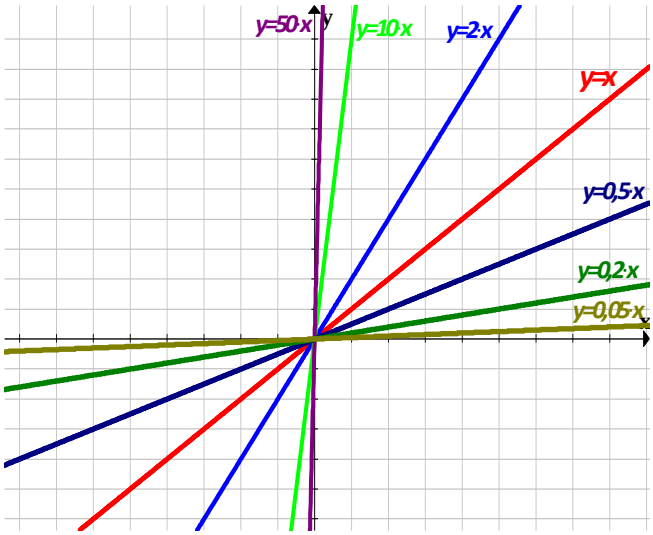
a. $y = 4 \cdot x$ b. $y = \frac{x}{3}$ c. $y = 2,65 \cdot x$

1.3. Estudio de la pendiente

Como hemos visto con anterioridad, la pendiente m es lo que diferencia unas rectas de otras. Mide la inclinación de la recta respecto al eje de abscisas.

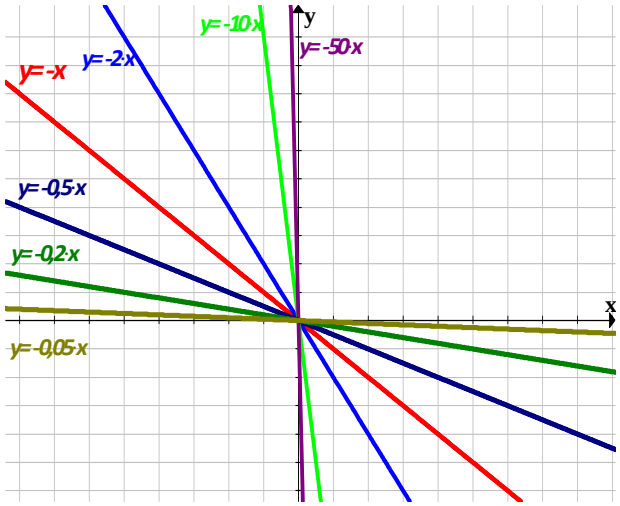
En las relaciones de proporcionalidad directa, la pendiente viene dada por la razón de proporcionalidad *k*.

Observa en el siguiente gráfico cómo varía la recta según vamos aumentando o disminuyendo la pendiente. Partimos de la recta $y=x$, donde $m=1$.



- Si aumenta m , entonces la recta se hace cada vez más vertical, hasta casi convertirse en el eje y.
- Si disminuye m , entonces la recta se hace cada vez más horizontal, hasta casi convertirse en el eje x

Ahora observa lo que ocurre cuando la pendiente m toma valores negativos.



- Si aumenta m , entonces la recta se hace cada vez más horizontal, hasta casi convertirse en el eje x .
- Si disminuye m , entonces la recta se hace cada vez más vertical, hasta casi convertirse en el eje y.

Como se puede observar, al variar la pendiente la inclinación de la recta también varia, según se van dando valores m .

La pendiente de la recta es el valor que mide la inclinación de la recta, es decir, mide el crecimiento o decrecimiento de la función lineal:

- Si $m>0$, la recta es creciente.
- Si $m<0$, la recta es decreciente.

Textos Marea Verde

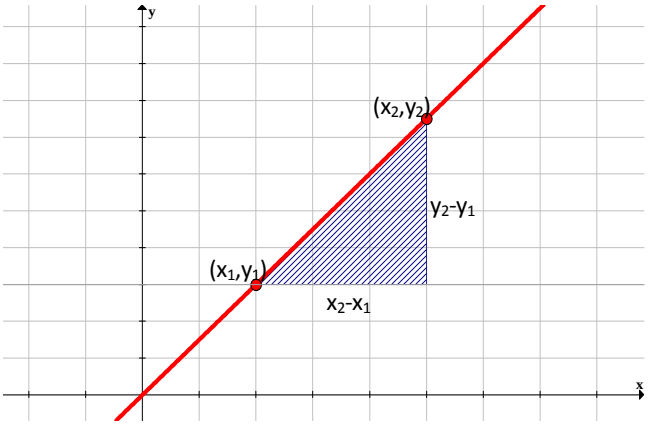
La pendiente es el coeficiente que acompaña a la variable independiente x.

Interpretación geométrica de la pendiente

La pendiente de la recta no solo indica el crecimiento y decrecimiento de la función, sino que también mide cuánto crece o cuánto decrece. Se puede decir que la pendiente mide el crecimiento de la recta en función de lo que avanza:

- Si $m > 0$:
  - Para valores altos de m la recta crece con mayor rapidez, esto es, la recta "sube" mucho y avanza poco.
  - Para valores pequeños de m la recta crece con menos rapidez, es decir, "sube" poco y avanza mucho.
- Si $m < 0$:
  - Para valores altos de m la recta decrece con menos rapidez, es decir, baja poco y avanza mucho.
  - Para valores pequeños de m la recta decrece con mayor rapidez, esto es, la recta "baja" mucho y "avanza" poco.

Una manera de calcular la pendiente, es dividiendo el valor de lo que sube la recta entre lo que avanza, como se muestra en el siguiente dibujo:



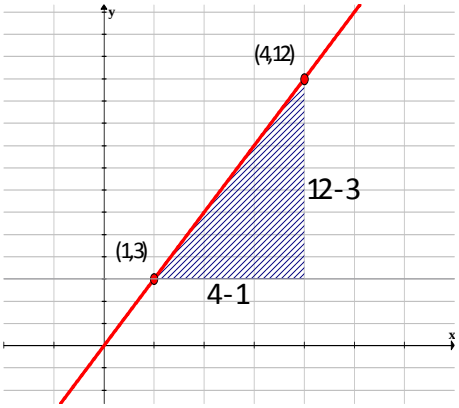
Dados dos puntos cualesquiera de la recta, la pendiente se calcula de la siguiente forma:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

es decir,

$$m = \frac{lo\ que\ sube}{lo\ que\ avanza}$$

Ejemplo:



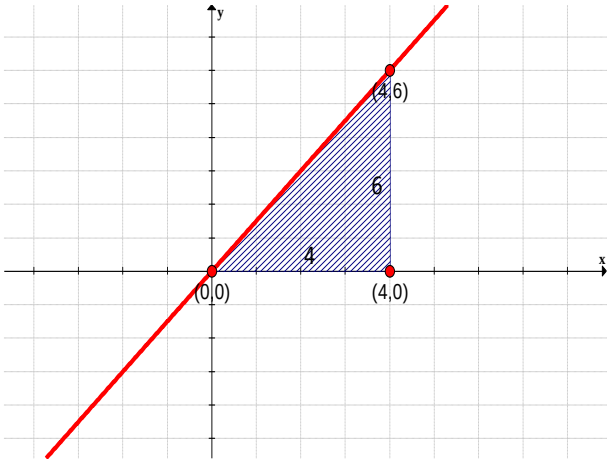
La recta sube 12 – 3 = 9 y avanza 4 – 1 = 3, entonces

$$m = \frac{12-3}{4-1} = \frac{9}{3} = 3$$

Textos Marea Verde

Actividades resueltas

- Calcula la pendiente de la siguiente recta y su expresión algebraica.



Tomamos dos puntos cualesquiera que pertenezcan a la recta, el (0,0) y el (4,6).

En este caso, la altura del triángulo sombreado nos indica el valor que sube la recta, 6, y la base es el valor que la recta avanza, 4.

Al dividir estos valores, obtenemos la pendiente y la expresión algebraica de la recta.

$$m = \frac{6}{4} = 1,5$$

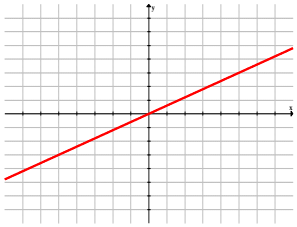
$$y = 1,5 \cdot x$$

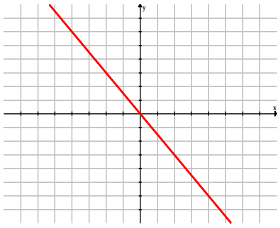
En estos ejemplos, la recta siempre sube, es decir, la función es creciente. ¿Qué ocurre si la recta fuese decreciente? Para no equivocarnos con los cálculos, siempre evaluamos la función de izquierda a derecha, es decir, el primer punto estará más a la izquierda, será más pequeño.

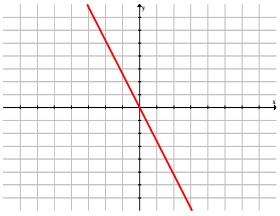
Esto es así porque la pendiente mide la cantidad de crecimiento (o decrecimiento) según la función va aumentando o lo que es lo mismo, avanzando.

Actividades propuestas

4. Halla la pendiente y la expresión algebraica de las siguientes rectas:

a. 

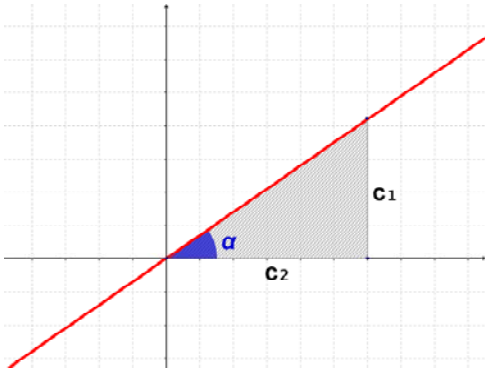
b. 

c. 

Otra expresión de la pendiente

Para hallar la pendiente se toma como referencia la base y la altura del triángulo rectángulo que forman los vértices de los puntos de la recta.

El cociente entre la altura y la base es la pendiente. Como el triángulo construido es un triángulo rectángulo, la pendiente es el cociente entre sus dos catetos, o lo que es lo mismo, la pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje horizontal.



$$\tan\alpha = \frac{C_{opuesto}}{C_{contiguo}} = \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow m = \tan\alpha = \frac{c_1}{c_2}$$

La pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de abscisas, es decir, la recta con la horizontal.

1.4. Rectas de la forma $y = m \cdot x + n$

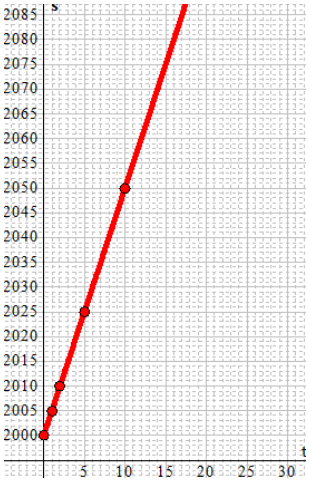
Volvamos a la situación 1 al principio del capítulo. En ese caso, queríamos hallar el espacio que recorría el ciclista. Ahora supongamos que el ciclista, antes de empezar con su ruta, se ha tenido que desplazar 2 Km hasta el inicio de su camino.

Actividades resueltas

- *Situación 1.2:* la gráfica s-t de un movimiento rectilíneo uniforme: el espacio recorrido, en función del tiempo, por un ciclista que se ha trasladado 2 Km antes de empezar el recorrido y se desplaza con una velocidad de 5 m/s.

  En este caso, la fórmula del MRU, como tenemos un espacio inicial, es $s = s_0 + v \cdot t$. Con los datos del ejercicio, la expresión queda $s = 2 + 5 \cdot t$.

  Construimos la nueva tabla y dibujamos la gráfica:



  Podemos observar que hemos tenido que adaptar los ejes para poder pintar gráfica, ya que la recta se ha desplazado 2.000 posiciones en el eje y.

  La gráfica de esta recta tiene como expresión algebraica $y = 5 \cdot x + 2.000$, donde x corresponde al tiempo t e y al espacio s , y 2.000 es el espacio inicial s_0.

  En ambos caso, el de la situación 1 y esta nueva situación, la pendiente de ambas rectas es 5. Esto es así ya que se trata de la misma recta pero desplazada 2.000 posiciones en el eje de abscisas, es decir, las dos rectas son paralelas.

Las rectas de la forma $y = m \cdot x + n$ tienen la misma pendiente que las rectas $y = m \cdot x$ pero se desplazan en el eje de abscisas (eje y) n posiciones. Por esta razón, a n se le llama **ordenada en el origen**, ya que es el valor de la recta en el punto de partida, es decir, cuando $x = 0$.

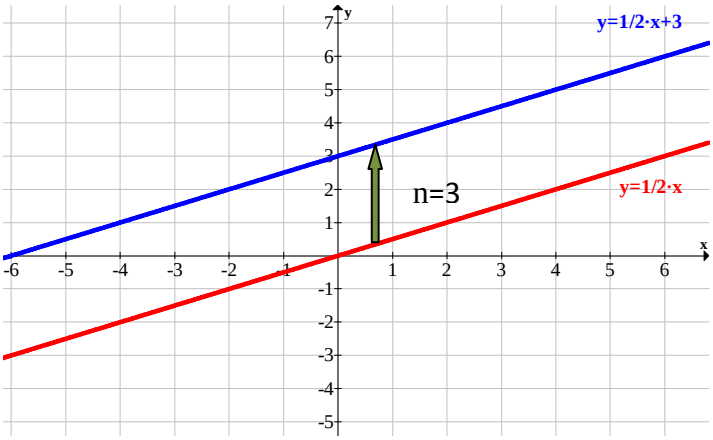
Ejemplo:

Tiempo (t)	Espacio (s)
0	2000
1	2007
2	2012
5	2027
10	2052

- Comparemos la recta $y = 1/2 \cdot x$ con la recta $y = 1/2 \cdot x + 3$

Las dos rectas tienen la misma forma, es decir, la misma inclinación o la misma pendiente. En ambos casos $m = 1/2$. Son dos rectas paralelas.

La diferencia está en el valor de la n: la recta $y = 1/2 \cdot x$ (donde $n=0$) se ha desplazado 3 posiciones en el eje y, para convertirse en la recta $y = 1/2 \cdot x + 3$ (donde $n=3$)

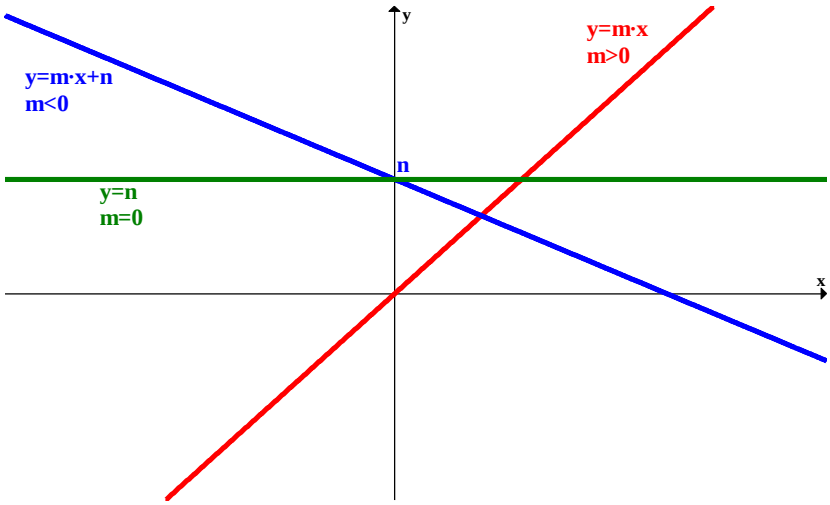


Las funciones polinómicas de primer grado, o funciones lineales, se describen algebraicamente de la forma $y = m \cdot x + n$ y se representan mediante rectas.

Además de la variable independiente x, la variable dependiente y, y la pendiente m, se añade el valor n que es la ordenada en el origen.

La recta $y = m \cdot x + n$ es paralela a la recta $y = m \cdot x$ (tienen la misma pendiente, m) desplazada verticalmente n posiciones. Por esta razón, el crecimiento o decrecimiento de estas funciones se comportan de la misma manera:

- Si $m > 0$, la función es **creciente**.
- Si $m < 0$, la función es **decreciente**.
- Si $m = 0$, la función es **constante**, ni crece ni decrece. Es paralela al eje x, y pasa por el punto $y = n$.



Las funciones $y = m \cdot x$ e $y = m \cdot x + n$ se les llama **funciones lineales**, aunque a las segundas también se les llama **funciones afines**.

Actividades propuestas

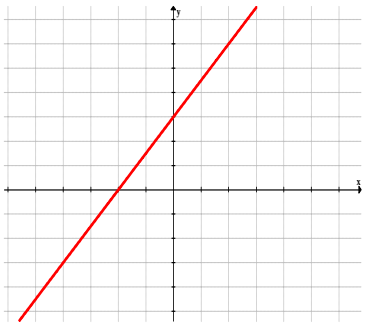
5. Representa las siguientes funciones lineales:

a. $y = 3 \cdot x + 4$ b. $y = -\frac{3}{7} \cdot x - 2$ c. $2x + \cdot 4y = 5$

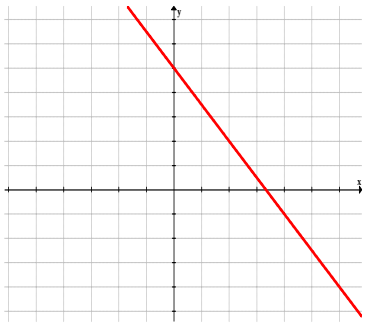
d. $y = 5$ e. $y = 0$ f. $x = 3$

6. Halla la expresión de las siguientes rectas:

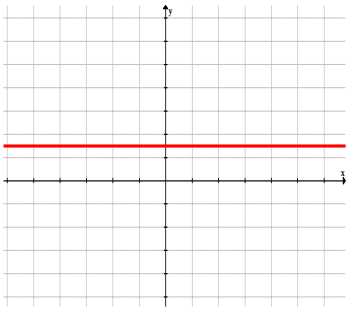
a.



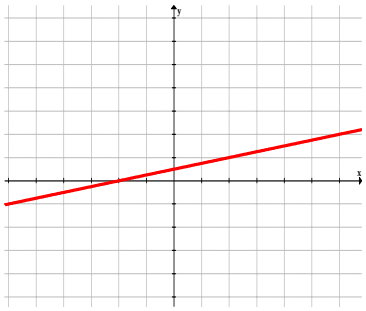
b.



c.



d.



2. FUNCIONES POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO

2.1. Funciones polinómicas de segundo grado. Parábola $y = a \cdot x^2$

En el apartado anterior hemos representado las gráficas de las funciones polinómicas de primer grado. Ahora, vamos a estudiar la representación de las funciones polinómicas de segundo grado. La gráfica de este tipo de funciones será semejante a la representación de la *situación 2* al principio del capítulo.

Las funciones polinómicas de segundo grado son aquellas que tienen como expresión algebraica un polinomio de grado 2, es decir, su expresión es de la forma $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Se representan mediante **parábolas.**

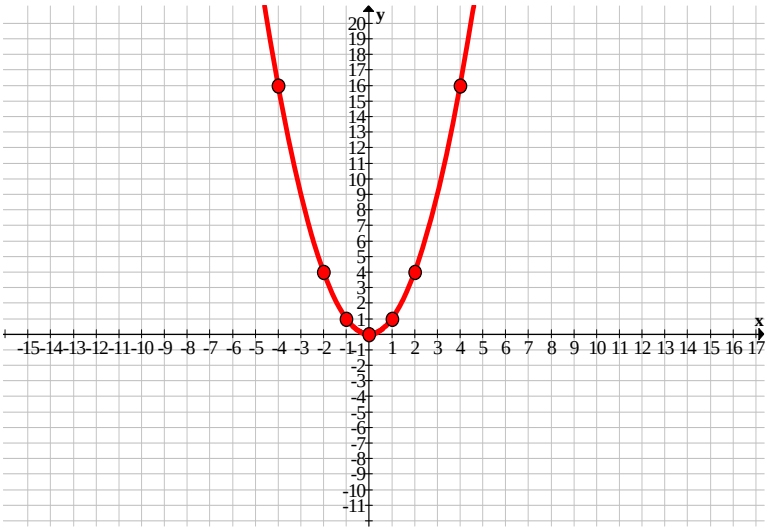
Ejemplo:

- La representación de la situación 2 es una parábola.
- En Física, la trayectoria de muchos movimientos se representan mediante parábolas, y por eso recibe el nombre de tiro parabólico: lanzar un proyectil con cierto ángulo, el aterrizaje de un avión en un portaviones, etc.

Parábola $y = a \cdot x^2$

Vamos a representar la parábola $y = x^2$. Para ello, construimos una tabla de valores y representamos los pares de puntos en el plano cartesiano.

x	*y*
–10	100
–5	25
–2	4
–1	1
0	0
1	1
2	4
5	25
10	100



En la tabla y en la gráfica se pueden observar algunas características:

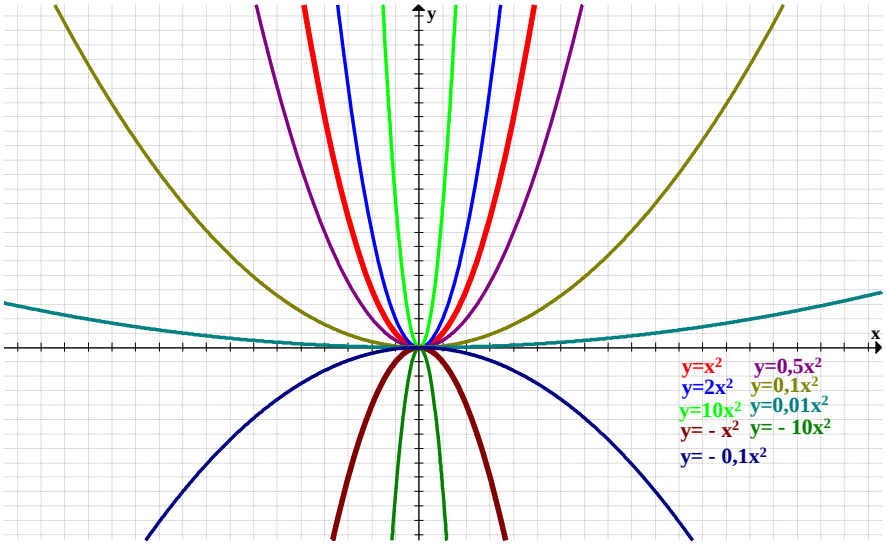
- El dominio y el recorrido son todos los reales.
- La función es continua, porque no presenta saltos.
- Es simétrica respecto al eje y, es decir, es una función par:

$$y = f(x) = x^2 \quad , \quad f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

- Es decreciente hasta el 0, y después creciente, luego tiene un mínimo absoluto en el (0, 0).

En este caso, $a=1$, y sabemos que si $a=-1$, la parábola tiene la misma forma pero está abierta hacia abajo, y en vez de un mínimo, tiene un máximo en el (0, 0).

Veamos lo que sucede cuando aumentamos o disminuimos el coeficiente a :



- Si $a>0$:
  - al aumentar a , la parábola se hace más estrecha, y se va acercando al eje y.
  - al disminuir a , la parábola se hace más ancha (plana), y se va acercando al eje x .
- Si $a<0$:
  - al aumentar a , la parábola se hace más ancha (plana), y se va acercando al eje x .
  - al disminuir a , la parábola se hace más estrecha y se va acercando al eje y.

En general, las parábolas cuya expresión algebraica es $\boldsymbol{y=a\cdot x^2}$, tienen las siguientes características:

- son **continuas** en todo el dominio
- el dominio y el recorrido son todos los reales
- si $a>0$, la parábola está abierta hacia arriba y tiene un **mínimo absoluto** en el punto (0, 0)
- si $a<0$, la parábola está abierta hacia abajo y tiene un máximo absoluto en el punto (0, 0)

  A este punto se le llama **vértice** de la parábola
- son funciones pares, es decir, simétricas respecto al eje y.

Actividades propuestas

7. A partir de la parábola $y=x^2$, dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:

a. $y=\frac{5}{3}x^2$ b. $y=-3x^2$ c. $y=-\frac{15}{3}x^2$

d. $y=4{,}12x^2$ e. $y=-\frac{6}{10}x^2$ f. $y=\frac{7}{8}x^2$

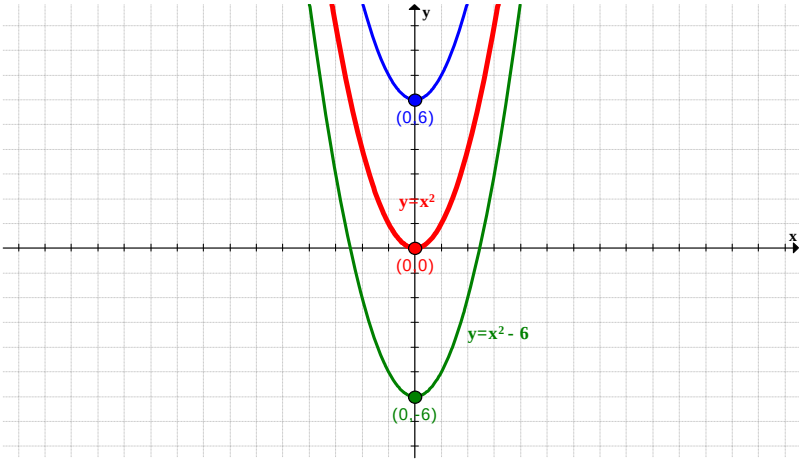
Textos Marea Verde

2.3. Traslaciones en el plano

Utilizando como plantilla la gráfica de $y=x^2$, se pueden obtener las gráficas de otras parábolas más complejas, dependiendo del tipo de desplazamiento que utilicemos.

Desplazamientos verticales: traslaciones en la dirección del eje y: $y = x^2 + k$.

En este caso, se trata de mover la parábola en dirección vertical, es decir, hacia arriba o hacia abajo. Comparemos las parábolas $y=x^2+6$ y $y=x^2-6$ con nuestra plantilla:



Se puede observar, que al sumar 6 a la parábola x^2, la gráfica es idéntica pero desplazada 6 unidades en sentido positivo en el eje y, es decir, la parábola ha subido 6 unidades. El nuevo vértice pasa a ser el punto (0, 6).

Algo parecido ocurre cuando se resta 6 unidades a x^2. En este caso la gráfica se ha desplazado 6 unidades en sentido negativo hasta el vértice (0,-6), es decir, baja 6 unidades.

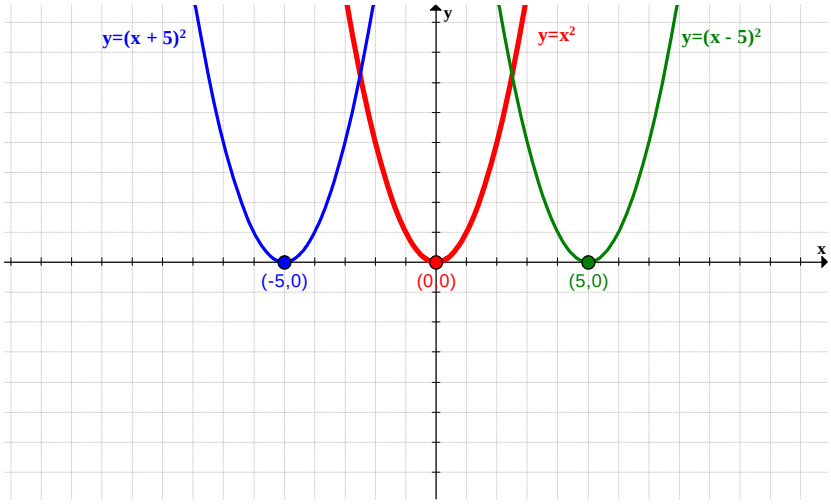
En general, la parábola $y=x^2+k$ tiene la misma gráfica que $y=x^2$ pero trasladada k unidades verticalmente en el eje y. Si k es positivo, la traslación es hacia arriba y si k es negativo, hacia abajo.

El **vértice** de la parábola se sitúa en el punto (0, k).

Desplazamientos horizontales: traslaciones en la dirección del eje x: $y = (x - q)^2$.

Ahora trasladamos la parábola en dirección horizontal. Hacia la derecha o hacia la izquierda. Comparemos las parábolas $y=(x+5)^2$ y $y=(x-5)^2$ con la plantilla:

Textos Marea Verde



En este caso, al aumentar la variable que se eleva al cuadrado, es decir, sumar 5 unidades, la gráfica se traslada horizontalmente hacia la izquierda 5 unidades, siendo el nuevo vértice el punto (-5,0). Al disminuir dicha variable, es decir, restar 5 unidades, la parábola se desplaza hacia la derecha siendo el nuevo vértice el punto (5, 0).

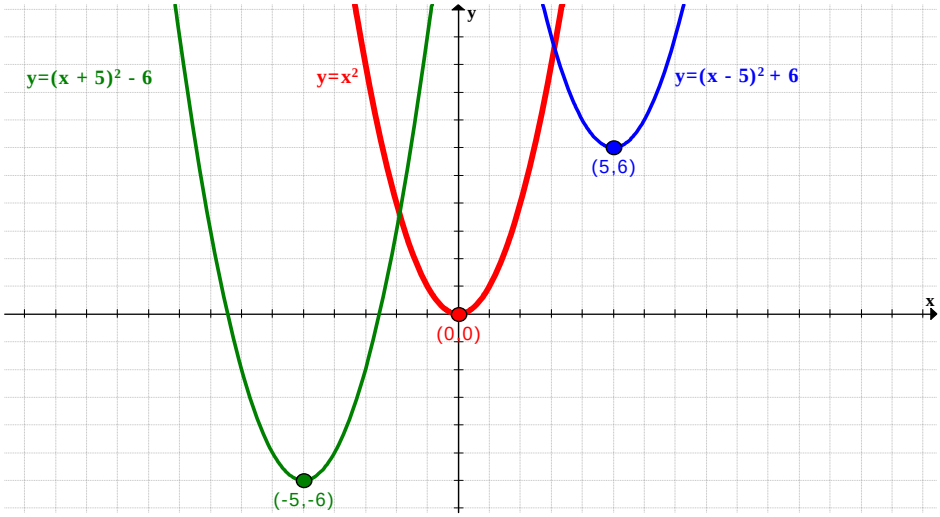
En general, la parábola $\boldsymbol{y=(x-q)^2}$ tiene la misma gráfica que $y=x^2$ trasladada $\boldsymbol{q}$ unidades en el eje x hacia la derecha si $q>0$ y hacia la izquierda si $q<0$.

El **vértice** de la parábola se sitúa en el punto $(q,0)$.

Desplazamientos oblicuos: traslaciones en ambos ejes: $\boldsymbol{y=(x-q)^2+k}$.

El último movimiento es el que combina los dos anteriores, es decir, movemos la plantilla k posiciones de manera vertical y q posiciones de manera horizontal, resultando un movimiento oblicuo en el plano.

Comparemos la parábola $y=(x-5)^2+6$ y $y=(x+5)^2-6$ con la plantilla $y=x^2$.



La parábola $y=(x-5)^2+6$ se traslada 5 unidades a la derecha y 6 unidades hacia arriba, mientras que la parábola $y=(x+5)^2-6$ se traslada 5 unidades hacia la izquierda y 6 unidades hacia abajo.

Es decir, es la combinación de los dos movimientos anteriores.

Textos Marea Verde

En general, la parábola $\boldsymbol{y=(x-q)^2+k}$ tiene la misma gráfica que $y=x^2$ trasladada de la siguiente forma:

$$q\ unidades\begin{cases}hacia\ la\ derecha\ si\ q>0\\ hacia\ la\ izquierda\ si\ q>0\end{cases}\quad;\quad k\ unidades\begin{cases}hacia\ arriba\ si\ k>0\\ hacia\ abajo\ si\ k<0\end{cases}$$

El **vértice** de la parábola se sitúa en el punto (q,k).

Representación de parábolas de la forma $\boldsymbol{y = x^2 + r\cdot x + s}$

Sabemos representar las parábolas de la forma $y=(x-q)^2+k$ mediante traslaciones. ¿Cómo podemos pintar la gráfica de las parábolas cuya expresión algebraica es $y=x^2+r\cdot x+s$? Basta con convertir esa expresión en una cuya función sepamos representar:

Actividades resueltas

- Representa la gráfica de la función cuadrática $y=x^2+6\cdot x-4$

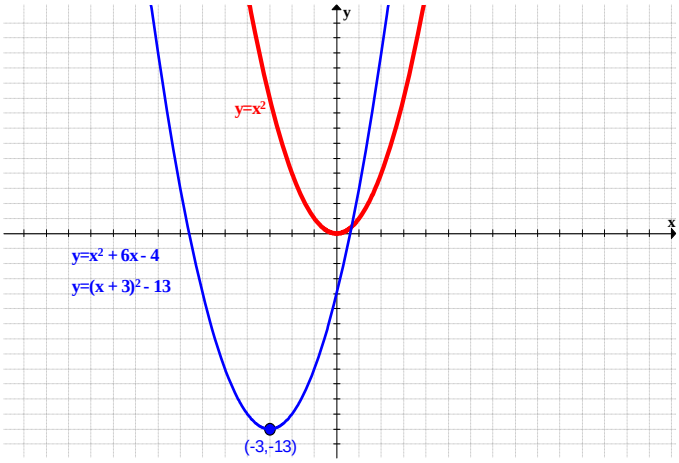
  La función viene dada de la forma $y=x^2+r\cdot x+s$, y queremos convertirla en $y=(x-q)^2+k$.

$$y=x^2+r\cdot x+s \Leftrightarrow y=(x-q)^2+k$$

  Sabemos que $(x+3)^2=x^2+6x+9$, donde ya nos aparece x^2+6x. Ahora tenemos que ajustar el resto:

$$y=x^2+6x-4=(x+3)^2+K=x^2+6x+9+K\Rightarrow K=-13\Rightarrow \boxed{y=(x+3)^2-13}$$

Con la parábola expresada de esta manera, basta con trasladar la gráfica de $y=x^2$, 3 unidades a la izquierda y 13 unidades hacia abajo, siendo el vértice el punto (–3, –13).



En general, el vértice de la parábola se encuentra en el punto $x=\dfrac{-r}{2}$. La otra coordenada se obtiene sustituyendo x en la expresión de la función.

Ejemplo:

- En el caso anterior, $y=x^2+6\cdot x-4$, el vértice está en el punto (–3, –13).

Como r = 6, la primera coordenada del vértice es $x=\frac{-r}{2}=\frac{-6}{2}=-3$. Sustituyendo el valor en la expresión: $y=(-3)^2+6\cdot(-3)-4=9-18-4=-13$

Actividades propuestas

8. Representa la gráfica de las siguientes parábolas y localiza el vértice:

a. $y=(x+4)^2-5$ b. $y=-(x-\frac{4}{5})^2+6$ c. $y=x^2-5$

d. $y=x^2-6x+16$ e. $y=x^2+4x+\frac{5}{2}$ f. $y=-x^2+12x-26$

g. $y=x^2-10x+17$ h. $y=-x^2+2x-4$ i. $y=-x^2+\frac{4}{3}x-1$

2.3. Función cuadrática. Parábolas de la forma $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$

Las funciones polinómicas de segundo grado reciben el nombre de **funciones cuadráticas**.

Hasta ahora solo hemos estudiado las funciones de tipo $y=x^2+rx+s$, que es una parábola abierta hacia arriba, o $y=-x^2+rx+s$, abierta hacia abajo.

Sabemos cómo afecta el valor del coeficiente a en la gráfica de la parábola $y=a\cdot x^2$, haciéndola más estrecha o más ancha.

Para representar las funciones cuadráticas $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ se convierte dicha expresión en una más familiar que sabemos representar:

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot(x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a})=y=a\cdot(x^2+r\cdot x+s)$$

Actividades resueltas

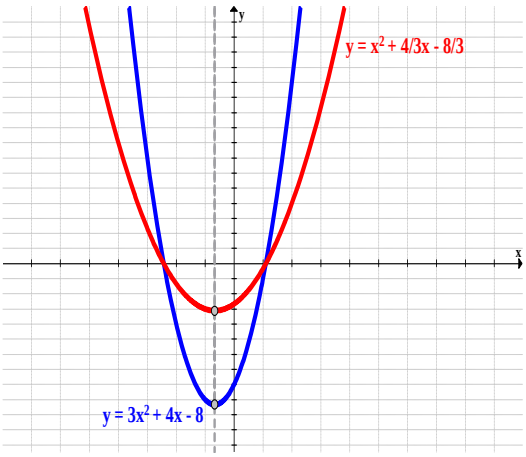
- Representa la parábola $y=3x^2+4x-8$:

  Convertimos la función en una expresión más fácil de representar:

  $$y=3x^2+4x-8=3\cdot(x^2+\frac{4}{3}x-\frac{8}{3})$$

  y la comparamos con $x^2+\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}$.

  $$x^2+\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}=(x+\frac{4}{6})^2-\frac{20}{9}$$



Las dos parábolas tienen el vértice en el mismo punto de abscisa, y la coordenada y queda

multiplicada por 3.

En cuanto a la forma, la parábola es más estrecha, como se puede ver en el punto 2.1.

En general, la representación de la función cuadrática $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ se puede aproximar representando la parábola $y=x^2+rx+s$, teniendo el vértice en el mismo punto de abscisa y la forma dependerá del valor absoluto del coeficiente a, siendo más ancha para valores grandes más estrecha para valores más pequeños.

La orientación de la parábola será:

- hacia arriba si $a>0$
- hacia abajo si $a<0$

Elementos de la parábola

Los elementos más característicos de la parábola ayudan a representar su gráfica en el plano cartesiano.

Coeficiente a:

Si $a>0$ la parábola está abierta hacia arriba.

Si $a<0$ la parábola está abierta hacia abajo.

Vértice:

El **vértice** de la parábola está en el punto $(\frac{-b}{2a},\frac{b^2-4ac}{4a})$:

Habíamos visto que para la parábola de la forma $y=x^2+rx+s$, la primera coordenada es $\frac{-r}{2}$.

La parábola en el caso general es $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot(x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a})=a\cdot(x^2+r\cdot x+s)$, es decir, $r=\frac{b}{a}$, entonces la primera coordenada del vértice es $\frac{-r}{2}=\frac{\frac{-b}{a}}{2}=\frac{-b}{2a}$.

La segunda coordenada sale al sustituir $x=\frac{-b}{2a}$ en la función cuadrática.

Puntos de corte con el eje OX:

Son los puntos donde la parábola corta al eje x, es decir, es la intersección de la parábola con la recta $y=0$. Indica cuándo la parábola es positiva o negativa.

Para calcularlos, se resuelve la ecuación de segundo grado $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$.

Punto de corte con el eje OY:

Es el punto donde la parábola corta al eje y, es decir, es la intersección de la parábola con la recta $x = 0$.

Cuando $x=0$ la parábola toma el valor de c, luego el punto de corte es el punto $(0,c)$.

Eje de simetría:

La parábola es simétrica en la recta paralela al eje y que pasa por el vértice de la parábola, es decir, el **eje de simetría** de la parábola es la recta $x=\frac{-b}{2a}$.

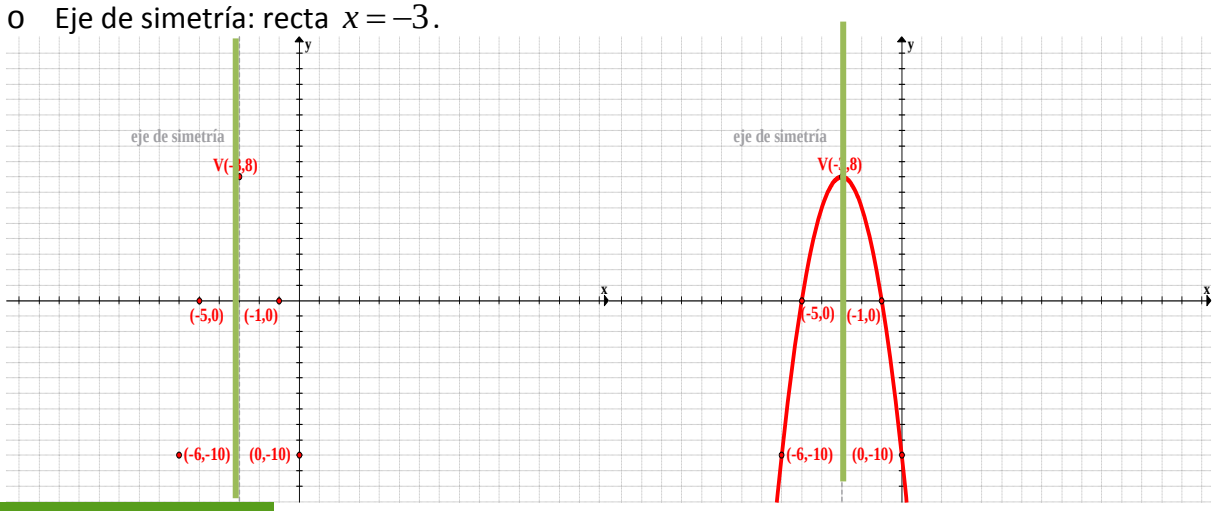
El eje de simetría también pasa por el punto medio del segmento formado por los dos puntos de corte con el eje x.

A partir de estos elementos, se puede representar la gráfica de una función cuadrática.

Actividades resueltas

- Determina los elementos de la parábola $y=-2x^2-12x-10$
  - $a=-2$, entonces la parábola está abierta hacia abajo.
  - Vértice: $\begin{cases} x=\frac{-b}{2a}=\frac{12}{2\cdot(-2)}=\frac{-12}{4}=-3 \\ y=-2\cdot(-3)^2-12\cdot(-3)-10=-18+36-10=8 \end{cases} \Rightarrow Vértice: V(-3,8)$
  - Puntos de corte:
    - Eje OX: $y=-2x^2-12x-10=0 \Leftrightarrow x=\frac{12\pm\sqrt{144-80}}{-4}=\begin{cases} x_1=-5\Rightarrow(-5,0) \\ x_2=-1\Rightarrow(-1,0) \end{cases}$
    - Eje OY: $\begin{cases} y=-2x^2-12x-10 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=-2\cdot 0^2-12\cdot 0-10=-10\Rightarrow(0,-10)$

      La parábola también pasa por su simétrico: $(-6,-10)$.
  - Eje de simetría: recta $x=-3$.



Actividades propuestas

9. Halla los elementos característicos y representa las siguientes parábolas:

a. $y=2x^2+4x-6$ b. $y=6x^2-24x$ c. $y=-2x^2+4x-2$

d. $y=2x^2+5x-12$ e. $y=3x^2+6x-9$ f. $y=-2x^2+7x+3$

g. $y=7x^2+21x-28$ h. $y=5x^2-9x+4$ i. $y=-4x^2-4x-1$

Textos Marea Verde

3. FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

3.1. Función de proporcionalidad inversa $y = \frac{k}{x}$

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda dividida o multiplicada por el mismo número. La **razón de proporcionalidad inversa** *k* es el producto de cada par de magnitudes: $k = a \cdot b = a' \cdot b'$.

Ejemplo

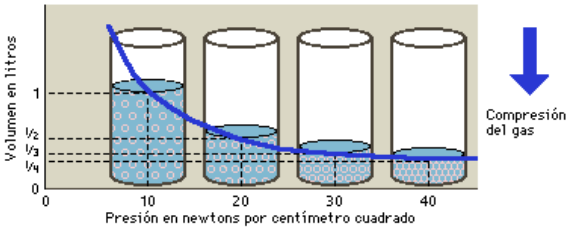
- Se puede comprobar en la *situación 3* en el inicio del capítulo, que la velocidad y el tiempo son magnitudes inversamente proporcionales. En este caso, el espacio se mantiene constante, siendo la razón de proporcionalidad inversa $s = v \cdot t$.
- En Física encontramos muchos ejemplos de magnitudes inversamente proporcionales: la densidad y el volumen, la potencia y el tiempo, la presión y la superficie,…

Actividades resueltas

- Representa en el plano la ley de Boyle-Mariotte: "a temperatura constante, el volumen de una masa fija de gas es inversamente proporcional a la presión que este ejerce."

  La fórmula que describe esta ley es $P \cdot V = k$

  Si despejamos el volumen final V, obtenemos la siguiente expresión: $V = \frac{k}{P}$.



  La gráfica describe una curva que a medida que aumenta la presión inicial, disminuye el volumen y se va aproximando al eje x, y al contrario, si disminuye la presión, el volumen que ocupa el gas es mayor.

La función de proporcionalidad inversa se define mediante la expresión $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$, donde k es la razón de proporcionalidad inversa y las variables x e y son los distintos valores que tienen las dos magnitudes.

Su representación gráfica en el plano cartesiano es una **hipérbola**.

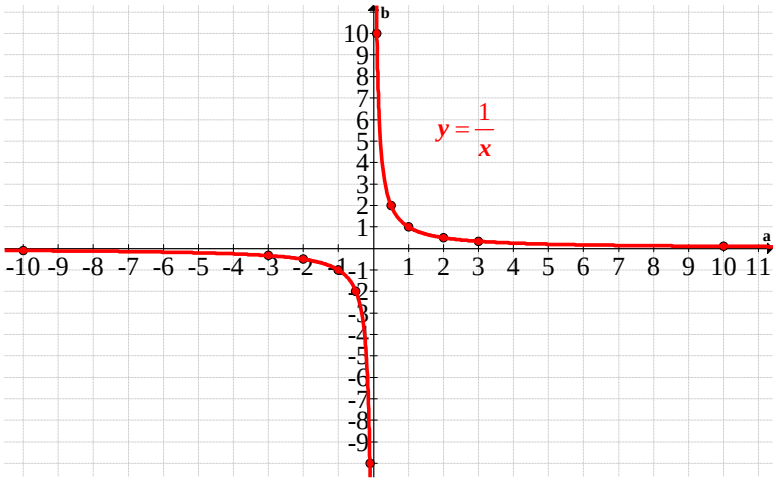
Ejemplo

- Representa la hipérbola $y = \frac{1}{x}$

  Damos una tabla de valores y representamos los puntos en el plano:

x	–3	–2	–1	–1/2	–1/10	1/10	1/2	1	2	3
y=1/x	–1/3	–1/2	–1	–2	–10	10	2	1	1/2	1/3

Textos Marea Verde



Se puede observar que la gráfica nunca corta a los ejes de coordenadas, ya que el 0 no pertenece al dominio y tampoco al recorrido de la función.

Es fácil comprobar que la función es simétrica respecto del origen, y continua en todo el dominio, es decir, en $\Re - \{0\}$.

La hipérbola $y = \frac{k}{x}$

Actividades propuestas

10. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa en el mismo sistema de coordenadas:

a. $y = \frac{-1}{x}$ b. $y = \frac{5}{x}$ c. $y = \frac{1}{2x}$

d. $y = \frac{3}{8x}$ e. $y = \frac{-5}{3x}$ f. $y = \frac{-12}{5x}$

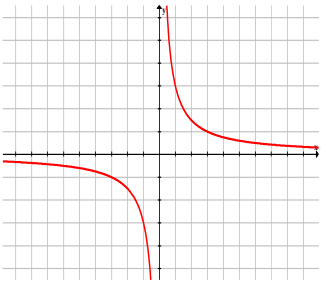
11. Describe lo que sucede cuando varía el valor de k. Ayúdate de las gráficas del ejercicio anterior.

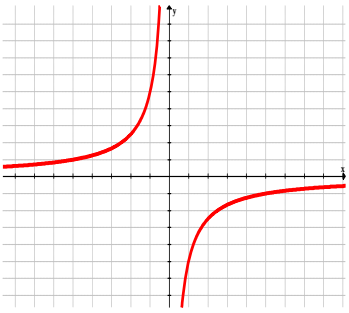
12. Halla la expresión analítica y representa la gráfica de las hipérbolas que pasa por cada uno de estos puntos. Escribe los intervalos donde la función es creciente o decreciente.

a. $(4, 2)$ b. $(3, -1)$ c. $(1/3, 5)$

d. $(12, 3)$ e. $(a, 1)$ f. $(1, b)$

13. Halla el dominio, recorrido, continuidad, máximos y mínimos y el crecimiento de las siguientes hipérbolas:


a)


b)

14. Halla el dominio, recorrido, continuidad, máximos y mínimos y el crecimiento de las siguientes hipérbolas:

a. $y=\frac{9}{2x}$ b. $y=\frac{-5}{3x}$ c. $y=\frac{-0,3}{x}$

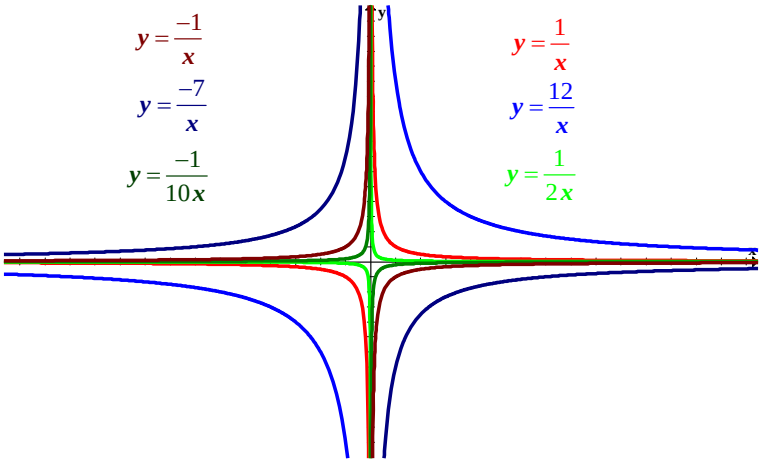
d. $(-5,2)$ e. $(4,-9)$ f. $(1,1/2)$

En general, las hipérbolas cuya expresión es $y=\frac{k}{x}$ tienen las siguientes propiedades:

- $|\boldsymbol{k}|$:
  - Si el valor absoluto de k aumenta, la curva se aleja del origen de coordenadas.
  - Si el valor absoluto de k disminuye, la curva se aproxima al origen de coordenadas.
- **Dominio:** son todos los reales menos el 0: $\Re - \{0\}$
- **Recorrido:** su recorrido son todos los reales menos el 0: $\Re - \{0\}$
- **Continuidad:** la función de proporcionalidad inversa es continua en todo su dominio, pero discontinua en la recta real, ya que el 0 no está en el dominio, y por tanto, hay un salto.
- **Simetría:** son funciones impares, esto es, son simétricas respecto al origen de coordenadas.

  Asíntotas: Cuando los valores de x y los de y se hacen muy grandes, la curva se aproxima a los ejes pero sin tocarlos, por tanto, los ejes de coordenadas son las asíntotas de las funciones de proporcionalidad inversa: las rectas $x=0$ e $y=0$.
- **Crecimiento:** depende del signo de k:
  - Si $k>0$: la función es **decreciente** en el intervalo $(-\infty,0)$ y **creciente** en el intervalo $(0,+\infty)$.
  - Si $k<0$: la función es **creciente** en el intervalo $(-\infty,0)$ y **decreciente** en el intervalo $(0,+\infty)$.

Las asíntotas dividen a la hipérbola en dos curvas, que reciben el nombre de **ramas de la hipérbola**.



3.2. La hipérbola $y = \dfrac{k}{x-a} + b$

A partir de la representación de la función $y = \dfrac{k}{x}$, ¿es posible representar otro tipo de hipérbolas? Al igual que ocurre con las parábolas, podemos trasladar las hipérbolas en el plano en dirección horizontal o vertical, según los valores que tomen los parámetros a y b.

Actividades propuestas

15. Representa en los mismos ejes de coordenadas, las siguientes hipérbolas:

a. $y = \dfrac{5}{x}$ $\quad y = \dfrac{5}{x} + 3$ $\quad y = \dfrac{5}{x} - 3$

b. $y = \dfrac{-12}{x}$ $\quad y = \dfrac{-12}{x-3}$ $\quad y = \dfrac{-12}{x+3}$

c. $y = \dfrac{3}{x}$ $\quad y = \dfrac{3}{x-1} + 5$ $\quad y = \dfrac{5x-2}{x-1}$

16. Describe lo que sucede cuando varían los parámetros a y b en las hipérbolas del ejercicio anterior.

En general, la representación gráfica de las hipérbolas cuya expresión algebraica es $y = \dfrac{k}{x-b} + a$ es una traslación el plano dependiendo de los valores de a y b.

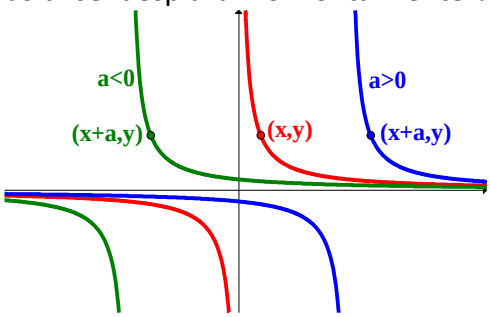
Desplazamientos horizontales

Al variar el valor de $\boldsymbol{a}$, la representación gráfica de la hipérbola se desplaza horizontalmente a unidades:

- Si $\boldsymbol{a>0}$: la hipérbola se desplaza hacia la derecha.
- Si $\boldsymbol{a<0}$: la hipérbola se desplaza hacia la izquierda.
- El punto (x, y) se convierte en el punto $(x+a, y)$:

$$(x, y) \to (x+a, y)$$

- El vector de traslación es el vector $(a, 0)$



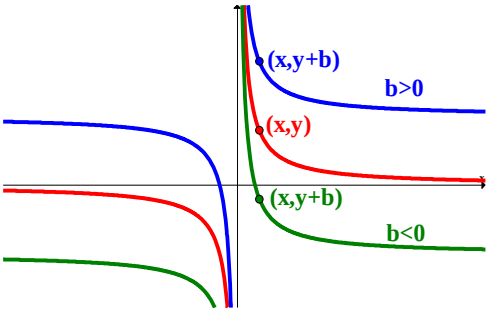
Desplazamientos verticales

Al variar el valor de $\boldsymbol{b}$, la representación gráfica de la hipérbola se desplaza verticalmente b unidades:

- Si $\boldsymbol{b>0}$: la hipérbola se desplaza hacia arriba.
- Si $\boldsymbol{b<0}$: la hipérbola se desplaza hacia abajo.
- El punto (x, y) se convierte en el punto $(x, y+b)$:

$$(x, y) \to (x, y+b)$$

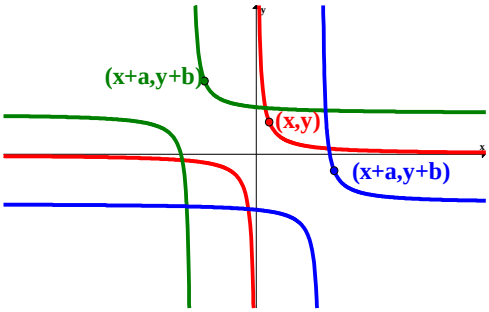
- El vector de traslación es el vector $(0, b)$



Textos Marea Verde

Desplazamientos oblicuos

Al variar tanto el valor a de cómo el valor de b, la representación gráfica de la hipérbola se desplaza diagonalmente tantas unidades como sea el valor de los parámetros:



- Las direcciones hacia donde se traslada dependerá de los signos de a y b.
- El punto (x, y) se convierte en el punto $(x+a, y+b)$:

$$(x, y) \to (x+a, y+b)$$

- El vector de traslación es el vector (a,b)

Actividades propuestas

17. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa a partir de la hipérbola $y=\frac{5}{x}$:

a. $y=\frac{10}{x-5}+3$ b. $y=\frac{1}{x+4}+8$ c. $y=\frac{100}{x+10}+1$

d. $y=\frac{10}{2x-4}-7$ e. $y=6-\frac{4}{x}$ f. $y=\frac{20}{5-x}-2$

18. Estudia el dominio, recorrido, continuidad, simetría, asíntotas y crecimiento de las funciones de proporcionalidad inversa del ejercicio anterior.

19. Escribe una regla para expresar cómo se trasladan las asíntotas según los parámetros a y b.

Hipérbola $y=\frac{mx+n}{px+q}$

Las funciones que se definen mediante esta expresión también son funciones de proporcionalidad inversa y se representan mediante hipérbolas. Para ello, necesitamos hacer el cambio en una expresión como la estudiada en el apartado anterior que nos resulte más fácil de manejar y representar:

$$y=\frac{mx+n}{px+q} \to \text{Dividiendo } (mx+n):(px+q) \to y=\frac{k}{x-a}+b$$

Actividades resueltas

- Convertir la función $y=\frac{3x+2}{x-7}$ en una función cuya expresión sea más sencilla de representar.

  Dividimos $3x+2$ entre $x-7$:

  $$(3x+2)=3(x-7)+23 \Leftrightarrow \frac{(3x+2)}{(x-7)}=\frac{3(x-7)}{(x-7)}+\frac{23}{(x-7)}=\frac{23}{(x-7)}+3$$

  Esta última expresión es fácil de representar.

Actividades propuestas

20. Representa las siguientes hipérbolas:

a. $y=\frac{2x-4}{x+5}$ b. $y=\frac{3-5x}{x+2}$ c. $y=\frac{4x-12}{x-3}$

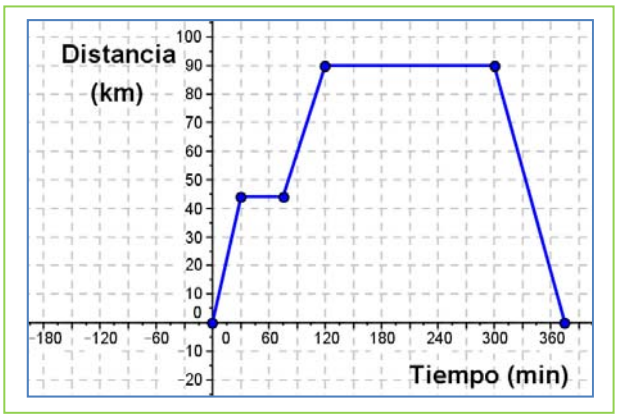
d. $y=\frac{6x+8}{1-x}$ e. $y=\frac{7x+5}{x-4}$ f. $y=\frac{6x+10}{2x-1}$

Textos Marea Verde

4. FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Hay gráficas que no podemos representar con una única fórmula, como la del margen:

Actividades resueltas



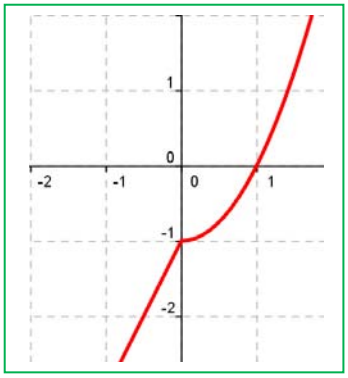
- *La gráfica del margen representa una excursión en autobús de un grupo de 1º de E.S.O. a Toledo, pasando por Aranjuez. Busca una expresión que la represente.*

Este tipo de función se denomina **función definida a trozos** pues cada trozo tiene una expresión algebraica diferente. Observa que está formada por 5 tramos de rectas, distintos. Podemos calcular sus ecuaciones pues conocemos los puntos por los que pasan: ((0, 0), (30, 45), (75, 45), (90, 120), (90, 300) y (0, 360).

Su expresión es:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}x & si\ 0\le x\le 30 \\ 45 & si\ 30<x\le 75 \\ 5x-330 & si\ 75<x\le 120 \\ 90 & si\ 120<x\le 300 \\ -\frac{3}{2}x+360 & si\ 300<x\le 360 \end{cases}$$

- *Representa gráficamente la función* $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & si\ x<0 \\ x^2-1 & si\ x>0 \end{cases}$.



Está definida de distinta manera antes de 0, que es una recta, que después de 0, que es una parábola. Simplemente dibujamos estas funciones en los intervalos indicados.

Actividades propuestas

21. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & si\ x<0 \\ x-1 & si\ x>0 \end{cases}$.

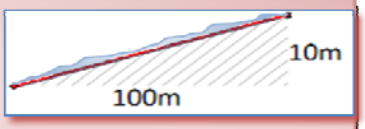
22. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si\ x<0 \\ 2x+2 & si\ x>0 \end{cases}$.

23. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & si\ x<1 \\ x+3 & si\ x>1 \end{cases}$.

CURIOSIDADES. REVISTA

¿Conoces esta señal?

Seguramente la has visto en alguna carretera, pero ¿qué indica? Mide la pendiente de la carretera con respecto a la horizontal y significa que la pendiente es del 10 %, es decir, $\frac{10}{100}$. Quiere decir que subimos 10 metros de altura mientras que avanzamos 100 metros.



- Busca en internet el perfil del *L'Angliru* y comprueba la pendiente de sus rampas.

Arquímedes y el rayo de calor

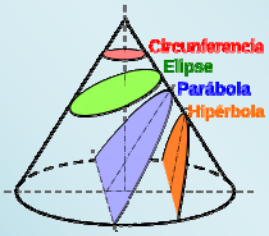
Arquímedes es uno de los personajes que más han aportado a la ciencia en la historia. Este ingeniero, físico, inventor, astrónomo y matemático nació en Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.) y es el responsable muchos teoremas e invenciones que seguramente habrás oído, como el famoso principio de Arquímedes, o el tornillo de Arquímedes utilizado en las cadenas de producción de muchas empresas.

Cuando los romanos atacaron Siracusa, cuenta la leyenda que Arquímedes construyó un sistema que concentraba los rayos de sol en un rayo de calor que provocó el incendio de los barcos enemigos. Este sistema estaba compuesto por espejos (o escudos bien pulidos) colocados de tal forma que dibujasen una superficie parabólica.

¿Mito o realidad? No se sabe, pero en la actualidad, este sistema es la base del funcionamiento de los hornos solares.

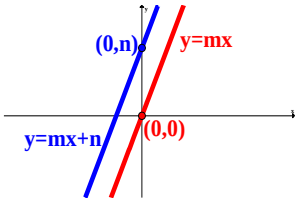
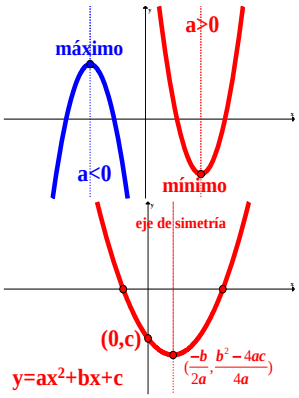
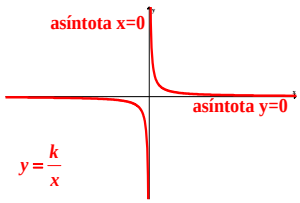
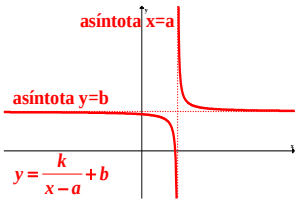
Apolonio de Pergue

Hemos estado hablando de parábolas e hipérbolas, pero, ¿de dónde vienen esas palabras y formas? El nombre de estas curvas se lo debemos a Apolonio de Pergue (262 a.C.- 190 a.C.) que estudió este tipo de funciones en su obra *Las Cónicas*. Las curvas surgen de los cortes de un cono: dependiendo el ángulo de corte, obtenemos unas curvas u otras. Es como cortar una barra de pan.



Textos Marea Verde

RESUMEN

		Ejemplos
Función polinómica de primer grado: Rectas $y=m\cdot x$ $y=m\cdot x+n$	Su expresión son polinomios de grado uno. Se representan mediante **rectas**: Hay dos tipos: - **Funciones lineales o de proporcionalidad directa**: $y=m\cdot x$, pasan por el origen de coordenadas. - **Funciones afines**: $y=m\cdot x+n$, son traslaciones en el eje y, n unidades. Pasan por el punto $(0,n)$.	
Función polinómica de segundo grado: Parábolas $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$	Su expresión son polinomios de grado dos. Se representan mediante **parábolas**: **Vértice:** $(\frac{-b}{2a},\frac{b^2-4ac}{4a})$ **Puntos de corte con el eje OX:** $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$. **Punto de corte con el eje OY:** $x=0$, es el punto $(0,c)$. **Eje de simetría**: es la recta $x=\frac{-b}{2a}$.	
Función de proporcionalidad inversa: Hipérbolas $y=\frac{k}{x}$	$\lvert k\rvert$: aleja o acerca la curva al origen de coordenadas. **Dominio y recorrido:** son todos los números reales menos el 0. **Continuidad:** continua en todo su dominio, discontinua en $x=0$. **Simetría:** impar, simétricas respecto al origen de coordenadas. **Asíntotas:** las rectas $x=0$ e $y=0$. **Crecimiento:** - Si $k>0$: **decreciente** en $(-\infty,0)$ y **creciente** en $(0,+\infty)$. - Si $k<0$: **creciente** en $(-\infty,0)$ y **decreciente** en $(0,+\infty)$.	
Hipérbolas $y=\frac{k}{x-a}+b$	Son el resultado de trasladar la hipérbola $y=\frac{k}{x}$ por el vector de traslación (a,b): - Dominio: $\Re-\{a\}$ Recorrido: $\Re-\{b\}$ - Puntos: $(x,y)\rightarrow(x+a,y+b)$ - Asíntotas: $\{x=0\rightarrow x=a\};\{y=0\rightarrow y=b\}$	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Función lineal

1. Representa gráficamente la siguiente relación de proporcionalidad dada en la siguiente tabla y escribe su ecuación. Describe qué tipo de relación es.

Magnitud A (a)	–5	–2	0	1	3
Magnitud B (b)	–15	–6	0	3	9

2. Representa las rectas a) $y = 5x$, b) $y = -5x$, c) $y = (1/2)x$, d) $y = 2'3x$.

3. Estudia el dominio, máximos y mínimos y simetrías de las funciones lineales a) $y = 1'5x$, b) $y = -0'5x$.

4. Estudia la función $y = 0{,}7x$ en el intervalo [–2, 5].

5. Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos (1, 4) y (0, 0) y determina su expresión algebraica.

6. Representa las siguientes funciones lineales:

a) $y = 2x + 3$ b) $y = -x + 5$ c) $y = 3x - 2$ d) $y = -2x - 3$.

7. Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos (1, 4) y (2, 1) y determina su expresión algebraica.

8. Calcula la pendiente de las rectas que pasa por los puntos que se indican y determina su expresión algebraica.

a) (5, 1), (3, –2) b) (–3, 4), (4, –1) c) (1, 4), (0, 6) d) (–2, –4), (–1, 0)

9. Dos empresas de telefonía móvil lanzan sus ofertas: la empresa StarTel ofrece por cada llamada pagar 50 céntimos más 2 céntimos por minuto hablado; Tel-Hello ofrce 75 céntimos por llamada y minutos ilimitados. ¿Qué oferta es más económica? Para dar la respuesta, realiza los siguientes pasos, expresando los resultados analítica y gráficamente:

a. ¿Hay algún momento en que las dos ofertas sean iguales?

b. Si hablo una media de 15 minutos al día, ¿qué oferta me conviene?

c. Si hablo una media de 35 minutos al día, ¿qué oferta me conviene?

d. Si hago una media de 10 llamadas al día de 3 minutos de duración, ¿qué oferta me conviene?

e. Si hago una media de 2 llamadas al día de 30 minutos de duración, ¿qué oferta es la mejor?

f.¿Qué oferta es más económica?

10. El escritor Jaime Joyce tiene distintas ofertas editoriales para publicar su última novela. La editorial Dole le ofrece 100 €, además del 20 % de cada libro que venda; la editorial Letrarte le ofrece 350 €; y la editorial Paco le ofrece según la venta de libros: 50 € si vende hasta 250 libros, 100 € si vende hasta 500 libros, 300 € si vende hasta 1000 libros y 500 € si vende más de 1000 libros. Entre todas las editoriales, ¿cuál crees que es mejor oferta para Jaime?

Textos Marea Verde

Funciones cuadráticas

11. A partir de la parábola $y = x^2$, dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 + 3$ b) $y = -x^2 + 5$ c) $y = (x - 2)^2$ d) $y = (-x - 3)^2$.

12. A partir de la parábola $y = x^2$, dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:

a) $y = 2{,}5x^2$ b) $y = -1{,}2x^2$ c) $y = (1/2)x^2$ d) $y = -0{,}7x^2$.

13. Representa la gráfica de las funciones parabólicas siguientes e indica el vértice:

a) $y = x^2 + 3x + 2$ b) $y = -x^2 + 5x - 4$ c) $y = (x - 2)^2 + 4$ d) $y = -x^2 + x - 3$.

14. Determina los elementos de las parábolas siguientes

a) $y = 3x^2 + 2x + 5$ b) $y = -2x^2 + 4x - 1$ c) $y = 4(x - 2)^2 + 9$ d) $y = -5x^2 + 2x - 6$.

Funciones de proporcionalidad inversa

15. Halla la expresión analítica y representa la gráfica de las hipérbolas $y = k/x$ que pasan por los puntos que se indican. Escribe los intervalos donde la función es creciente o decreciente.

a) (5, 1), b) (4, –1)) (1, 4) d) (–2, –4).

16. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa:

a) $y = 2/x$ b) $y = -1/x$ c) $y = 3/x$ d) $y = -2/x$.

17. Determina el dominio, recorrido, continuidad, máximos y mínimos y el crecimiento de las siguientes hipérbolas:

a) $y = 2'3/x$ b) $y = -1'7/x$ c) $y = 3'2/x$ d) $y = -2'1/x$.

18. Representa las siguientes hipérbolas:

a) $y = 2/x + 3$ b) $y = -1/x + 5$ c) $y = 3/x - 2$ d) $y = -2/x - 3$.

19. Representa las siguientes hipérbolas:

a) $y = 2/(x + 3)$ b) $y = -1/(x + 5)$ c) $y = 3/(x - 2)$ d) $y = -2/(x - 3)$.

20. Representa las siguientes hipérbolas:

a) $y = \dfrac{2x-3}{x+4}$ b) $y = \dfrac{-x-3}{2x+1}$ c) $y = \dfrac{2x-3}{3x-2}$ d) $y = \dfrac{x+2}{-x-3}$.

Funciones definidas a trozos

21. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si\ x < -1 \\ x^2 - 1 & si\ x > -1 \end{cases}$.

22. Determina los puntos de intersección con los ejes coordenados de la función $f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x < 2 \\ 2x+1 & si\ x > 2 \end{cases}$.

23. Indica los intervalos donde la función $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & si\ x < 2 \\ -x^2+4 & si\ x > 2 \end{cases}$ es creciente.

24. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & si\ x < 1 \\ 1/x & si\ x > 1 \end{cases}$.

Textos Marea Verde

AUTOEVALUACIÓN

1. La recta $y = 4x + 2$ tiene de pendiente m y ordenada en el origen b:

a) $m = 4$, $b = 0$ b) $m = 1/2$, $b = 6$ c) $m = 2$, $b = 4$ d) $m = 4$, $b = 2$

2. La recta que pasa por los puntos (1, 6) y (–2, 4) tiene de pendiente m y ordenada en el origen b:

a) $m = 2$, $b = 4$ b) $m = 3/2$, $b = 6$ c) $m = 2/$, $b = 25/3$ d) $m = 6$, $b = 2/3$

3. Indica cuál de las siguientes funciones lineales es simétrica respecto del origen de coordenadas:

a) $y = (-10/17)x$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = 4x + 2$ d) $y = -x + 3$

4. Indica cuál de las siguientes funciones cuadráticas es simétrica respecto del eje de ordenadas:

a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = 4x^2$ d) $y = -x^2 + 3x + 2$

5. Indica el vértice de la función cuadrática $y = 3x^2 + 1$:

a) (0, 1) b) (1, 2) c) (0, 2) d) (0, 3)

6. Señala cuál de las siguientes funciones cuadráticas es *más estrecha* que $y = x^2$:

a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (-1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = -x^2 + 3$

7. Indica cuál de las siguientes hipérbolas es simétrica respecto del origen de coordenadas:

a) $y = -15/21x$ b) $y = 3/x + 1$ c) $y = 4/x + 2$ d) $y = -1/x + 3$

8. Señala cuál de las siguientes hipérbolas tiene como asíntotas a las rectas $x = 2$ e $y = 3$:

a) $y = -15/(x - 3) - 2$ b) $y = 3/(x - 2) + 3$ c) $y = 4/(x + 2) - 3$ d) $y = -12/(x + 3) + 2$

9. Si traslado la hipérbola $y = 3/x$ mediante el vector de traslación (1, 3) obtengo la hipérbola:

a) $y = 3/(x - 1) + 3$ b) $y = 3/(x - 3) + 1$ c) $y = 3/(x + 3) - 1$ d) $y = -3/(x + 1) - 3$

10. Señala cuál de las siguientes funciones cuadráticas alcanza un máximo absoluto:

a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (-1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = -x^2 + 3$

Textos Marea Verde

Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.

4ºB de ESO

Capítulo 12

Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-031747

Fecha y hora de registro: 2014-02-07 13:31:47.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Miguel Ángel Paz

Revisora: María Molero y Javier Rodrigo

Ilustraciones: Miguel Ángel Paz y Banco de Imágenes de INTEF

Índice

1. FUNCIONES EXPONENCIALES

1.1. FUNCIÓN EXPONENCIAL

1.2. DISTINTAS FUNCIONES EXPONENCIALES

1.3. EL NÚMERO *e*. LA FUNCIÓN $f(x) = e^x$

2. FUNCIONES LOGARÍTMICAS

2.1. DEFINICIÓN Y CÁLCULO ELEMENTAL DE LOGARITMOS

2.1.1. LOGARITMOS INMEDIATOS

2.1.2. LOGARITMOS DECIMALES Y NEPERIANOS CON LA CALCULADORA

2.1.3. CAMBIO DE BASE DE LOGARITMOS

2.2. PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

2.2.1. EXPRESIONES LOGARÍTMICAS Y ALGEBRAICAS

2.3. FUNCIONES LOGARÍTMICAS

2.3.1. GRÁFICAS Y CARACTERÍSTICAS

2.3.2. RELACIÓN ENTRE LAS FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

3. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

3.1. LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

3.2. LA FUNCIÓN TANGENTE

Resumen

Entre las diversas funciones hay algunas que tienen una importancia especial, o la han tenido históricamente. En estos dos capítulos te mostramos tres tipos muy importantes.
Términos como *crecimiento exponencial* o *curva sinusoidal* derivan de este tipo de funciones.
Tienen unas propiedades importantísimas en el análisis matemático, ingeniería, medicina, ciencias sociales, etc. En este capítulo aprenderás el cálculo de logaritmos y las propiedades de las funciones exponenciales y circulares y de sus gráficas.
El término *logaritmo* fue acuñado en 1614 por el matemático escocés *John Neper* (1550-1617). Antes de la invención de las calculadoras electrónicas, los logaritmos también fueron imprescindibles para el cálculo de potencias de números no enteros.
Las funciones trigonométricas son muy conocidas y constituyen uno de los ejemplos más populares de funciones periódicas. Ellas u otras funciones relacionadas se encuentran por doquier en la naturaleza y se utilizan en física, electrónica, etc. Numerosas gráficas comparten sus propiedades, como por ejemplo la forma de una onda, también llamada *sinusoide*, que debe este nombre a la función *seno*.

John Napier (Neper). Barón de Merchiston

1. FUNCIONES EXPONENCIALES

1.1. Función exponencial

Hay dos tipos de funciones cuya **expresión analítica** o **fórmula** es una **potencia**:

- Si la variable independiente está en la base: $y = x^3$, se llama **función potencial**, y cuando además el exponente es un número natural es una función polinómica.
- Si la variable independiente está en el exponente: $y = 3^x$, se llama **función exponencial**.

Ejemplo:

$$y = 10^x,\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^x,\ y = 2^{3x},\ y = 5^{-x}.$$

Una función exponencial es aquella en la que la variable independiente está en el exponente.

En este curso estudiamos funciones exponenciales sencillas, del tipo $y = b^x$, donde la base b es un número positivo distinto de 1.

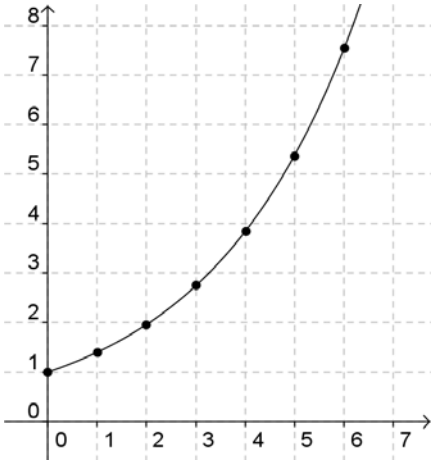
Actividades resueltas

- Si la cantidad de bacterias de una determinada especie se multiplica por 1,4 cada hora, podemos escribir la siguiente fórmula para calcular el número "*y*" de bacterias que habrá al cabo de "*x*" horas (comenzando por una sola bacteria): $y = 1{,}4^x$.

Número de bacterias en cada hora (**Tabla de valores de la función**):

Horas transcurridas (*x*)	Núm. bacterias (*y*)
0	1
1	1,4
2	1,96
3	2,74
4	3,84
5	5,38
6	7,53
...	...

Gráfica de la función



Observa que en este ejemplo no se ha dado a la "*x*" valores negativos, ya que no tiene sentido un número de horas negativo. En las funciones exponenciales en general la "x" sí puede tener valores negativos. Sin embargo la base b solo puede tener valores positivos. Asimismo, observarás que la variable "*y*" también resulta siempre positiva. Más adelante recogemos estas propiedades al hablar de dominio y recorrido de la función exponencial.

Actividades propuestas

1. Prueba ahora a realizar en tu cuaderno una tabla de valores y la gráfica para un caso similar, suponiendo que el número de bacterias se multiplica cada hora por 3 en lugar de por 1,4.

Observarás que los valores de "*y*" aumentan mucho más deprisa y enseguida *se salen del papel*. Mientras que los valores de "*x*" aumentan de 1 en 1 los valores de *y* se van multiplicando por 3. Esto se llama **crecimiento exponencial**. Si en lugar de multiplicar se trata de dividir tenemos el caso de **decrecimiento exponencial**.

2. En tu cuaderno, representa conjuntamente las gráficas de $y = x^2$ (función potencial) e $y = 2^x$ (función exponencial), con valores de "x" entre 0 y 6. Observa la diferencia cuantitativa entre el crecimiento potencial y el crecimiento exponencial.

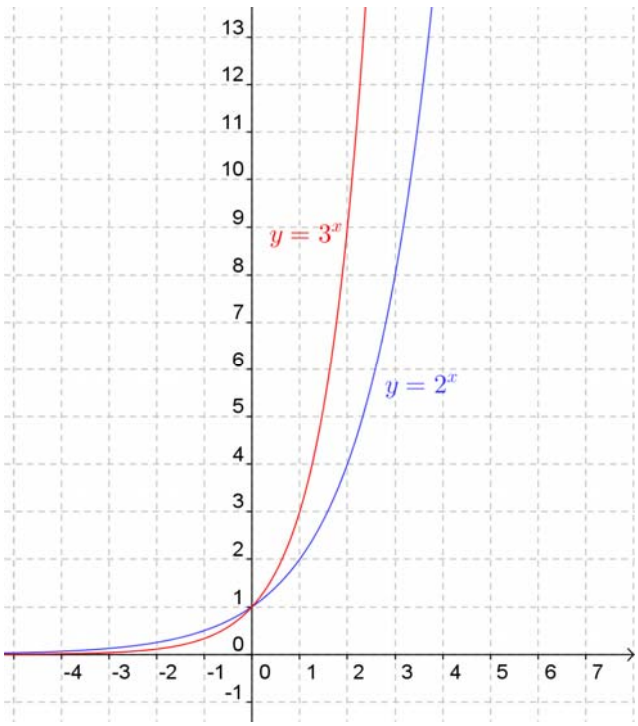
1.2. Distintas funciones exponenciales

Las gráficas de las funciones exponenciales $y = b^x$ se diferencian según el valor de la base "*b*". Especialmente se diferencian si $0 < b < 1$ o $b > 1$.

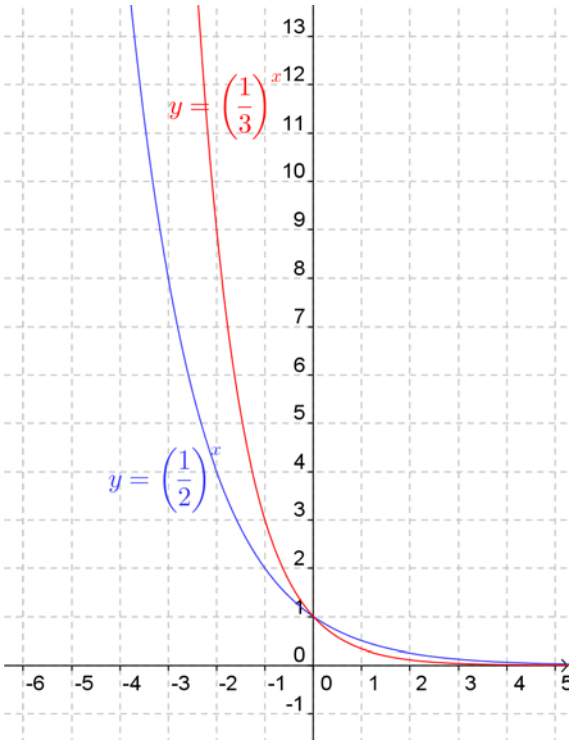
En el caso en el que $b = 1$ tenemos la función constante $y = 1$, cuya gráfica es una recta horizontal.

Veamos las gráficas de algunas funciones exponenciales, comparándolas con otras:

Funciones $y = 2^x$ **e** $y = 3^x$



Funciones $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **e** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



Observamos los siguientes aspectos comunes en las cuatro gráficas:

- Su **dominio** es toda la recta real. Además son continuas.
- Su **recorrido** es (0, +∞). Es decir, "*y*" nunca es cero ni negativo.
- Pasan todas por los puntos (0, 1), (1, *b*) y (–1, 1/*b*).
- La gráfica de $y = a^x$ y la de $y = (1/a)^x$ son simétricas respecto del eje OY.

Y observamos también aspectos diferenciados en ambas ilustraciones:

Cuando la base es $b > 1$

Son funciones **crecientes**. Cuanto mayor es la base el crecimiento es más rápido.
Cuando $x \to -\infty$ la función tiende a 0. Por tanto presenta una **asíntota horizontal** en la parte izquierda del eje OX.
Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota vertical, pues no se aproximan a ninguna recta.

Cuando la base es $0 < b < 1$

Son funciones **decrecientes**. Cuanto menor es la base el decrecimiento es más rápido.
Cuando $x \to +\infty$ la función tiende a 0. Por tanto presenta una **asíntota horizontal** en la parte derecha del eje OX.
Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota vertical, pues no se aproximan a ninguna recta.

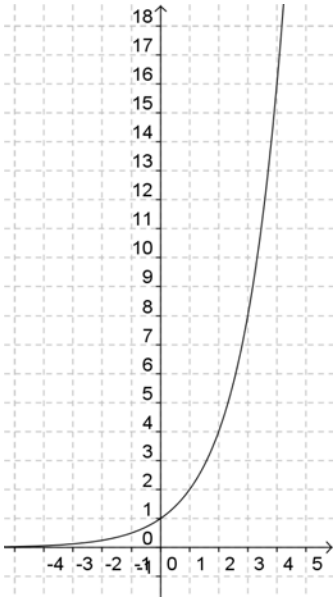
Actividades resueltas

- Representa gráficamente las siguientes funciones exponenciales $y = 2^x$ e $y = 2^{-x}$.

Solución:

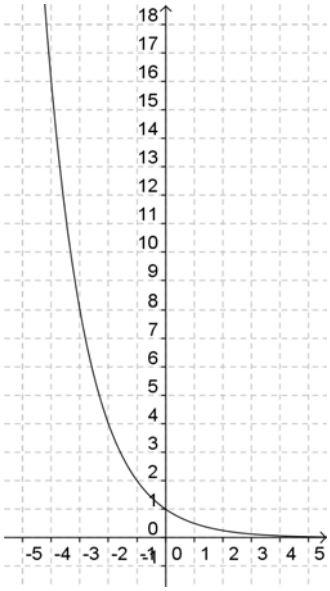
Función $y = 2^x$

x	y
...	...
-5	1/32
-4	1/16
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
...	...



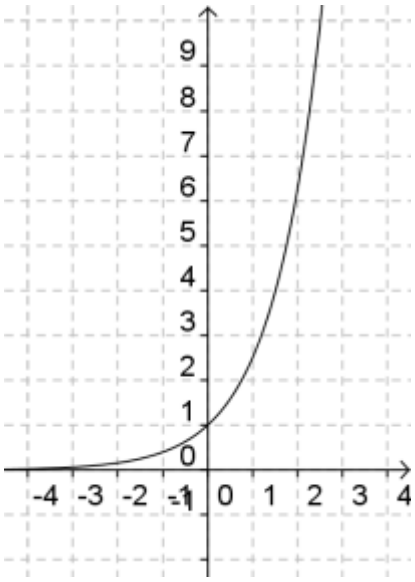
Función $y = 2^{-x}$

x	y
...	...
-5	32
-4	16
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8
4	1/16
5	1/32
6	1/64
...	...

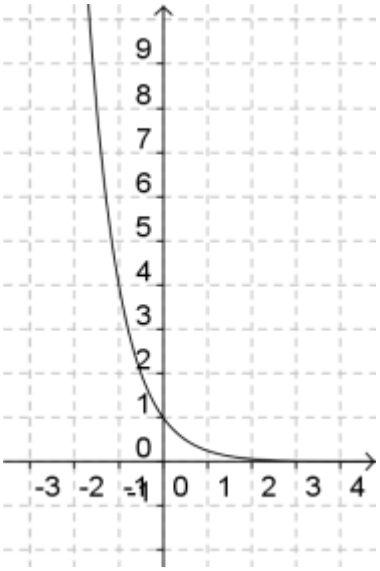


- Identifica las funciones correspondientes con las siguientes gráficas:

a)



b)



Solución:

Ambas son funciones exponenciales porque pasan por el punto (0, 1) y tienen por un lado como asíntota horizontal el eje OX, mientras que por el otro lado tienden a + ∞.

La función (a) es $y = 2{,}5^x$ porque pasa por el punto (1, 2'5).

La función (b) es $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ porque pasa por el punto (–1, 4).

- Representa la función $y = 3^{-x}$

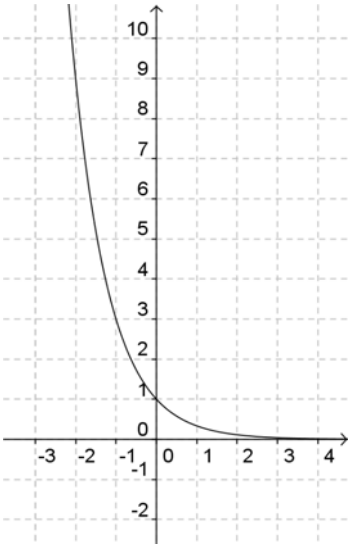
Solución:

Por tener exponente negativo es:

$$y = 3^{-x} \Rightarrow y = \left(\frac{1}{3}\right)^x.$$

Por tanto su gráfica es la del margen.

Observa que pasa por los puntos (–1, 3), (0, 1) y (1, 1/3).



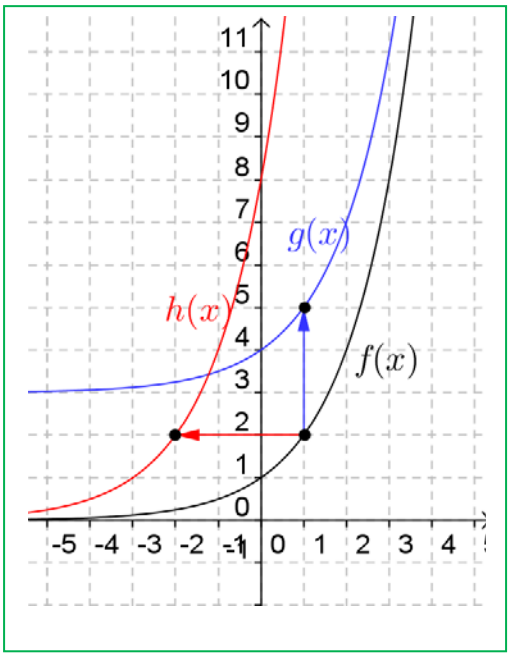
- Conociendo la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, que se ha visto anteriormente, y sin calcular valores, dibuja las gráficas de las funciones $g(x) = 2^x + 3$ y $h(x) = 2^{x+3}$.

Solución:

La función *g(x)* es la función *f(x)* desplazada hacia arriba 3 unidades.

La función *h(x)* es la función *f(x)* desplazada hacia la izquierda 3 unidades.

Por tanto sus gráficas son estas, representadas en diferente color:



1.3. El número *e*. La función e^x

El número *e* tiene una gran importancia en Matemáticas, comparable incluso al número π aunque su comprensión no es tan elemental y tan popular. Para comprender su importancia hay que acceder a contenidos de cursos superiores. Es un número irracional.

El número *e* se define como el límite cuando *n* tiende a infinito de la siguiente sucesión:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Su valor aproximado es *e* = 2,71828182846...

Se trata de un número irracional (aunque al verlo puede parecer periódico).

Con la ayuda de la calculadora se puede comprobar cómo los valores de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ se acercan cada vez más al valor *e* = 2,71828182846… a medida que aumenta el valor de *n*.

Este número aparece en las ecuaciones de crecimiento de poblaciones, desintegración de sustancias radiactivas, intereses bancarios, etc.

También se puede obtener directamente el valor de *e* con la calculadora (siempre como aproximación decimal, puesto que es un número irracional). Normalmente hay una tecla con la etiqueta *e* pero puedes usar también la tecla etiquetada e^x. Para ello tendrás que calcular el valor de e^1.

La función $y = e^x$ comparte las características descritas más arriba para funciones exponenciales de base mayor que 1.

Actividades propuestas

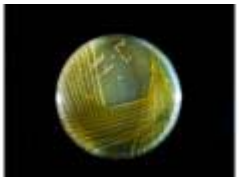
3. Utilizando la calculadora, en tu cuaderno haz una tabla de valores y representa en tu cuaderno las funciones $y = e^x$, $y = e^{-x}$.

4. Una persona ha ingresado una cantidad de 5.000 euros a interés del 3 % en un banco, de modo que cada año su capital se multiplica por 1,03.

a. Escribe en tu cuaderno una tabla de valores con el dinero que tendrá esta persona al cabo de 1, 2, 3, 4, 5 y 10 años.

b. Indica la fórmula de la función que expresa el capital en función del número de años.

c. Representa en tu cuaderno gráficamente dicha función. Piensa bien qué unidades deberás utilizar en los ejes.



Cultivo de la bacteria Salmonella

5. Un determinado antibiótico hace que la cantidad de ciertas bacterias se multiplique por 2/3 cada hora. Si la cantidad a las 7 de la mañana es de 50 millones de bacterias, (a) haz una tabla calculando el número de bacterias que hay cada hora, desde las 2 de la mañana a las 12 de mediodía (observa que tienes que calcular también "hacia atrás"), y (b) representa gráficamente estos datos.

6. Representa en tu cuaderno las siguientes funciones y explica la relación entre sus gráficas:

a) $y = 2^x$ b) $y = 2^{x+1}$ c) $y = 2^{x-1}$.

7. Conociendo la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, que se ha visto más arriba, y sin calcular tabla de valores, dibuja en tu cuaderno las gráficas de las funciones $g(x) = 2^x - 3$ y $h(x) = 2^{x-3}$.

2. FUNCIONES LOGARÍTMICAS

2.1. Definición y cálculo elemental de logaritmos

Recuerda que:

La expresión $\log_b a$ se lee "logaritmo de a en base b".

$\log_b a$ es el exponente al que hay que elevar "b" para que el resultado sea "a".

$$\log_b a = x \quad \Leftrightarrow \quad b^x = a$$

"b" se llama **base** y "a" se llama **argumento**.

Observaciones:

- La base tiene que ser un número positivo y distinto de la unidad.
- El argumento tiene que ser positivo y distinto de 0.

Ejemplos:

a) $\log_2 32 = 5$ porque $2^5 = 32$ b) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ porque $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Un par de propiedades elementales

- El logaritmo de la base siempre vale 1: $\log_b b = 1$ porque $b^1 = b$.
- El logaritmo de 1 en cualquier base siempre vale 0: $\log_b 1 = 0$ porque $b^0 = 1$.

2.1.1. Logaritmos inmediatos

Se llaman así los que se calculan directamente aplicando la definición.

Ejemplos:

- $\log_5 125 = 3$ porque $5^3 = 125$
- $\log_3 81 = 4$ porque $3^4 = 81$
- $\log 10000 = 4$ porque $10^4 = 10000$.

Cuando no se escribe la base quiere decir que la base es 10 (*log* x). Los logaritmos en base 10 se llaman **logaritmos decimales**. Los logaritmos en base e se llaman logaritmos neperianos y se escriben *ln x*.

Otros logaritmos no son inmediatos pero se pueden calcular también aplicando la definición, **igualando exponentes**. Esto pasa cuando la base y el argumento son potencias del mismo número.

Ejemplos:

- Para hallar $\log_4 8$ ponemos $\log_4 8 = x \Rightarrow 4^x = 8 \Rightarrow 2^{2x} = 2^3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$
- Para hallar $\log_4 32$ ponemos $\log_4 32 = x \Rightarrow 4^x = 32 \Rightarrow 2^{2x} = 2^5 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$.

Actividades resueltas

- Halla los siguientes logaritmos: a) $\log_4 256$; b) $\log_2 1/32$; c) $\log_2 1/2$; d) $\log 1/100$; e) $\log_3 0{,}111...$; f) $\log_3 3$; g) $\log_2 1$; y calcula el valor de x en las siguientes igualdades: h) $x = \log_3 3\sqrt{3}$; i) $\log_x 16 = 4$.

Soluciones:

a) $\log_4 256 = 4$, porque $4^4 = 256$.

b) $\log_2 1/32 = -5$, porque $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$.

c) $\log_2 1/2 = -1$, porque $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

d) $\log 1/100 = -2$, porque $10^{-2} = \frac{1}{100}$.

e) $\log_3 0{,}111... = -2$, porque $0{,}111... = 1/9$, y entonces $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

f) $\log_3 3 = 1$, porque $3^1 = 3$ (el logaritmo de la base siempre vale 1)

g) $\log_2 1 = 0$, porque $2^0 = 1$ (el logaritmo de 1 siempre vale 0).

h) $x = \log_3 3\sqrt{3} \Leftrightarrow 3^x = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow 3^x = 3^{3/2} \Leftrightarrow x = 3/2$.

i) $\log_x 16 = 4 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x^4 = 2^4 \Leftrightarrow x = 2$.

- Calcula el valor de x en las siguientes igualdades:

a) $\log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81 \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Leftrightarrow x = 4$

b) $\log_{12} 12 = x \Leftrightarrow 12^x = 1 \Leftrightarrow x = 1$

c) $\log_{30} 900 = x \Leftrightarrow 30^x = 900 \Leftrightarrow x = 2$

d) $\log 0{,}1 = x \Leftrightarrow 10^x = 0{,}1 \Leftrightarrow 10^x = 10^{-1} \Leftrightarrow x = -1$

e) $\log_3 243 = x \Leftrightarrow 3^x = 243 \Leftrightarrow 3^x = 3^5 \Leftrightarrow x = 5$

f) $\log_9 3 = x \Leftrightarrow 9^x = 3 \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = 1/2$

g) $\log_7 \frac{1}{49} = x \Leftrightarrow 7^x = 7^{-2} \Leftrightarrow x = -2$

h) $\log_{16} 4096 = x \Leftrightarrow 16^x = 4096 \Leftrightarrow 2^{4x} = 2^{12} \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$

i) $\log 1000 = x \Leftrightarrow 10^x = 1000 \Leftrightarrow x = 3$

j) $\log_{25} \sqrt{5} = x \Leftrightarrow 25^x = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5^{2x} = 5^{1/2} \Leftrightarrow 2x = 1/2 \Leftrightarrow x = 1/4$

k) $\log 0 = x$ no existe solución, porque ninguna potencia da 0 como resultado.

l) $\log(-100) = x$ no existe solución, porque el resultado de calcular una potencia de base positiva siempre es positivo.

m) $\log_x 7 = -2 \Leftrightarrow x^{-2} = 7 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 7 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \sqrt{7} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

n) $\log_2 x = -1/2 \Leftrightarrow 2^{-1/2} = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2^{1/2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Actividades propuestas

8. Calcula los siguientes logaritmos utilizando la definición (sin calculadora):

a) $\log_3 81$ b) $\log_2 256$ c) $\log 10\,000$ d) $\log_5 125$ e) $\log_2 0{,}25$ f) $\log 0{,}001$

9. Calcula los siguientes logaritmos utilizando la definición e igualando exponentes (sin calculadora):

a) $\log_4 2$ b) $\log_9 27$ c) $\log_{81} 27$ d) $\log_2 0{,}125$ e) $\log_3 \frac{1}{9}$ f) $\log_2 \frac{3}{12}$

g) $\log_{16} 2$ h) $\log_{64} 32$ i) $\log_4 \sqrt{2}$ j) $\log_3 \sqrt{27}$ k) $\log \sqrt[3]{100}$

10. Halla el valor de *x* en las siguientes igualdades:

a) $\log_8 x = \frac{2}{3}$ b) $\log_x 81 = 4$ c) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = x$ d) $\log_x 0{,}5 = -1$ e) $\log x = -4$.

2.1.2. Logaritmos decimales y neperianos con la calculadora

Hasta aquí hemos aprendido a calcular logaritmos utilizando la definición. Sin embargo solamente se puede hacer así en unos pocos casos (en concreto cuando el argumento es una potencia de la base del logaritmo).

Por ejemplo no se pueden calcular $log_4 35$, $log_{10} 7$, $log_4 30$, $log_9 5$.

Las calculadoras científicas disponen de teclas para hallar únicamente dos o tres tipos de logaritmos (según el modelo de calculadora):

Logaritmos decimales (en base 10):	Logaritmos neperianos (en base *e*): **Logaritmos neperianos** son los que tienen como base el número e = 2,718281… También se llaman **logaritmos naturales**. Los logaritmos neperianos se escriben de tres modos: $\log_e x = \ln x = \mathrm{L}\, x$
Logaritmos en cualquier base: En algunas calculadoras puede hallarse directamente poniendo la base y el argumento.	

Ejemplos:

- Comprueba con tu calculadora que $log\ 7 = 0{,}845$ y que $\ln 7 = 0{,}946$ (valores redondeados).
- Comprueba también que $\log 10 = 1$ y que $\ln e = 1$.

Para **calcular un número conociendo su logaritmo** se emplean las mismas teclas utilizando previamente la tecla de función inversa (normalmente *SHIFT* o *INV*).

Ejemplos:

- Comprueba con tu calculadora que el número cuyo logaritmo decimal vale 1,36 es 22,9 y que el número cuyo logaritmo neperiano vale 1,36 es 3,896.

2.1.3. Cambio de base de logaritmos

Con la calculadora también se pueden calcular logaritmos que no sean decimales ni neperianos, es decir, en bases distintas a "10" y "*e*".

Para ello se emplea la **fórmula del cambio de base**:

Para cambiar de base "*a*" a base "*b*": $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Ejemplo:

- Para calcular $log_4 7$ utilizando la calculadora hacemos $\log_4 7 = \dfrac{\log_{10} 7}{\log_{10} 4} = \dfrac{0{,}845}{0{,}602} = 1{,}40$

Actividades propuestas

11. Calcula los siguientes logaritmos con la calculadora utilizando la fórmula del cambio de base, y compara los resultados con los obtenidos en la actividad:

a) $\log_4 2$ b) $\log_9 27$ c) $\log_{81} 27$ d) $\log_{16} 2$ e) $\log_2 0{,}125$ f) $\log_3 \dfrac{1}{9}$.

2.2. Propiedades de los logaritmos

Las propiedades de los logaritmos son las siguientes:

- $\mathbf{\log_b 1 = 0}$ ya que $b^0 = 1$ (el logaritmo de 1 en cualquier base es 0)
- $\mathbf{\log_b b = 1}$ ya que $b^1 = b$ (el logaritmo de la base es 1)

- El logaritmo de un **producto** es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

- El logaritmo de un **cociente** es igual a la diferencia de los logaritmos:

$$\log_b (x : y) = \log_b x - \log_b y$$

- El logaritmo de una **potencia** es igual al exponente por el logaritmo de la base:

$$\log_b x^y = y \cdot \log_b x$$

Ejemplo:

a) $\log_2 10 + \log_2 3{,}2 = \log_2 (10 \cdot 3{,}2) = \log_2 32 = 5$

b) $\log 140 - \log 14 = \log (140/14) = \log 10 = 1$

c) $\log_3 9^5 = 5 \log_3 9 = 5 \cdot 2 = 10$

d) $\log_3 \sqrt[5]{9} = \log_3 9^{1/5} = \dfrac{1}{5} \log_3 9 = \dfrac{1}{5} \cdot 2 = \dfrac{2}{5}$.

2.2.1. Expresiones logarítmicas y algebraicas

Las propiedades de los logaritmos se emplean en dos tipos importantes de operación:

- **Tomar logaritmos** en una igualdad es aplicar el logaritmo a ambos miembros de la misma:

$$x = y \Leftrightarrow \log_b x = \log_b y.$$

- **Eliminar logaritmos** en una igualdad es lo contrario: conseguir que una expresión logarítmica deje de serlo. Para esto es necesario que cada miembro tenga un único logaritmo:

$$\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y.$$

Actividades resueltas

- Sabiendo que log 2 = 0,301, calcula:

  a) $\log 32 = \log 2^5 = 5 \log 2 = 5 \cdot 0{,}301 = 1{,}505$

  b) $\log 0{,}008 = \log (8/1000) = \log 8 - \log 1000 = 3 \log 2 - 3 = 3 \cdot 0{,}301 - 3 = -2{,}097$

Observa que el logaritmo en base 10 de la unidad seguida de ceros es igual al número de ceros que tenga.

- Sabiendo que log 2 = 0,301 y que log 3 = 0,477 calcula:

  a) $\log 6 = \log(3 \cdot 2) = \log 3 + \log 2 = 0{,}301 + 0{,}477 = 0{,}778$

  b) $\log 180 = \log(3^2 \cdot 2 \cdot 10) = 2\log 3 + \log 2 + \log 10 = 2 \cdot 0{,}477 + 0{,}301 + 1 = 2{,}255$

  c) $\log 15 = \log(3 \cdot 5) = \log\left(\frac{3 \cdot 10}{2}\right) = \log 3 + \log 10 - \log 2 = 0{,}477 + 1 - 0{,}301 = 1{,}176$

- Toma logaritmos y desarrolla:

  a) $a = \frac{mn}{p} \Rightarrow \log a = \log \frac{mn}{p} \Rightarrow \log a = \log m + \log n - \log p$

  b) $a = \frac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} \Rightarrow \log a = \log \frac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} \Rightarrow \log a = \frac{3}{2} \log b + \frac{1}{2} \log c - 2 \log x$

- Elimina los logaritmos:

  a) $\log a = \log c + \log d - \log e \Rightarrow \log a = \log \frac{cd}{e} \Rightarrow a = \frac{cd}{e}$

  b) $\log b = \log 4 + \frac{1}{2} \log 5 - 3 \log x \Rightarrow \log b = \log 4 + \log \sqrt{5} - \log x^3 \Rightarrow \log b = \log \frac{4\sqrt{5}}{x^3} \Rightarrow b = \frac{4\sqrt{5}}{x^3}$

c) $\log a + 3 = 2\log b - \dfrac{\log c}{3} \Rightarrow \log a + \log 1000 = \log b^2 - \log c^{1/3} \Rightarrow \log(1000a) = \log \dfrac{b^2}{\sqrt[3]{c}} \Rightarrow$

$1000a = \dfrac{b^2}{\sqrt[3]{c}}$

- Resuelve la siguiente **ecuación logarítmica**: $2\log x = 2\log(x-1) + \log 4$

Solución:

Para resolverla es preciso eliminar logaritmos:

$$\log x^2 = \log(x-1)^2 + \log 4 \quad \Rightarrow \quad \log x^2 = \log 4(x-1)^2$$

La ecuación queda $x^2 = 4(x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = 3x^2 - 8x + 4$ cuyas soluciones son $x = 2$ y $x = 2/3$.

La segunda solución no es válida porque al sustituirla en la ecuación original quedaría $\log(x-1)$ como logaritmo de un número negativo, que no existe. Esto ocurre a veces en las ecuaciones logarítmicas, igual que en las ecuaciones irracionales, y por ello es necesario comprobar la validez de las soluciones halladas.

- En el cálculo de **interés compuesto** el interés producido cada periodo de tiempo pasa a formar parte del capital. Así, si el periodo de tiempo es un año, la fórmula del interés cada año se calcula sobre un nuevo capital, que es el capital anterior más los intereses producidos en el año. Por tanto, si el porcentaje de interés anual es *r*, el capital cada año se multiplica por $1 + \dfrac{r}{100}$.

  Por ejemplo si el interés es del 4 % hay que multiplicar por 1,04 cada año transcurrido.

  La fórmula del capital acumulado al cabo de *n* años es: $C_n = C \cdot \left(1 + \dfrac{r}{100}\right)^n$

  Calcula el capital final acumulado al cabo de 4 años para 6.000 € al 2 % de interés compuesto anual.

Solución:

$C = 6000 \cdot (1 + 0{,}02)^4 = 6000 \cdot 1{,}02^4 = 6.494{,}59$ €.

- ¿A qué interés compuesto hay que invertir 10.000 euros para obtener en 10 años al menos 16.000 euros?

Solución:

$$16.000 = 10.000 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{10} \Rightarrow 1{,}6 = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{10} \Rightarrow 1 + \frac{r}{100} = \sqrt[10]{1{,}6} = 1{,}048 \Rightarrow \frac{r}{100} = 0{,}048$$

Así pues $r = 4{,}8$ %.

- Cuando la incógnita es el número de años (que está en el exponente) necesitamos tomar logaritmos para resolverlo: Si ingresamos en un banco 3.000 € al 4 % de interés compuesto anual, ¿cuántos años tienen que pasar para conseguir 4.500 €?

Solución:

$4.500 = 3000 \cdot (1 + 0{,}04)^n \Rightarrow 1{,}5 = 1{,}04^n \Rightarrow \log 1{,}5 = n \log 1{,}04 \Rightarrow n = \dfrac{\log 1{,}5}{\log 1{,}04} = 10{,}34$ años

(tendremos que esperar 11 años).

- La fórmula del interés compuesto también se utiliza para los problemas de **crecimiento o decrecimiento de poblaciones**, que es una función exponencial: Por ejemplo, si la población de un país aumenta un 3 % cada año y actualmente tiene 15 millones de habitantes, ¿cuántos tendrá al cabo de 5 años?

La solución es:

$$15.000.000 \cdot (1 + 0{,}03)^5 = 15.000.000 \cdot 1{,}03^5 = 17.383.111 \text{ habitantes.}$$

Actividades propuestas

12. Sabiendo que log 2 = 0,301 y que log 3 = 0,477 calcula:

a) $\log 5$ b) $\log 25$ c) $\log 24$ d) $\log 60$

13. Sabiendo que log 8 = 0,903, y sin utilizar calculadora, halla los siguientes:

a) $\log 80$ b) $\log 2$ c) $\log 64$ d) $\log 0{,}8$ e) $\log 1{,}25$ f) $\log \sqrt[3]{800}$

14. Toma logaritmos y desarrolla:

a) $A = \dfrac{2x^3y^2}{3z}$ b) $B = \dfrac{\sqrt{x^3y^2}}{10z}$

15. Reduce a un único logaritmo cada expresión:

a) $\log 2 - \log 12 + 1 + \log 3$ b) $2 \log 5 + \dfrac{1}{2} \log 5 - 2$ c) $2 \log 2a - \log a$

16. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log (x + 1)^2 = 6$ b) $\log x + \log 5 = \log 20$ c) $\log (7 - 3x) - \log (1 - x) = \log 5$

17. Cuando nació un niño sus padres colocaron 1.000 euros en una libreta de ahorro al 2,5 % de interés compuesto anual. ¿Cuánto dinero tendrá la cuenta cuando el niño cumpla 15 años?

18. La población de ciertas bacterias se multiplica por 1,5 cada día. Si al comienzo hay 18 millones de bacterias, ¿cuántas habrá al cabo de una semana?

19. ¿A qué tanto por ciento de interés compuesto hay que invertir un capital de 20.000 euros para ganar 1.000 euros en tres años?

20. Si invertimos 7.000 euros al 1,35 % de interés compuesto anual, ¿cuántos años deben transcurrir para haber ganado al menos 790 euros?

21. Calcula en cuántos años se duplica una población que crece al ritmo del 10 % anual.

22. Si una población de 8 millones de habitantes se ha convertido en 15 millones en 7 años, ¿cuánto ha crecido cada año? (*Ojo*: ¡no se trata de dividir entre 7!).

2.3. Funciones logarítmicas

2.3.1. Gráfica y características

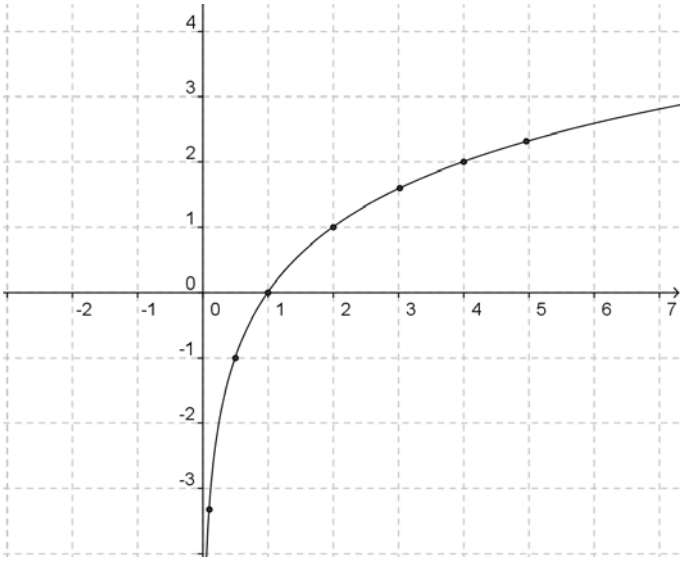
Las funciones logarítmicas son las del tipo $y = \log_b x$.

Hay una función distinta para cada valor de la base b.

Ejemplos:

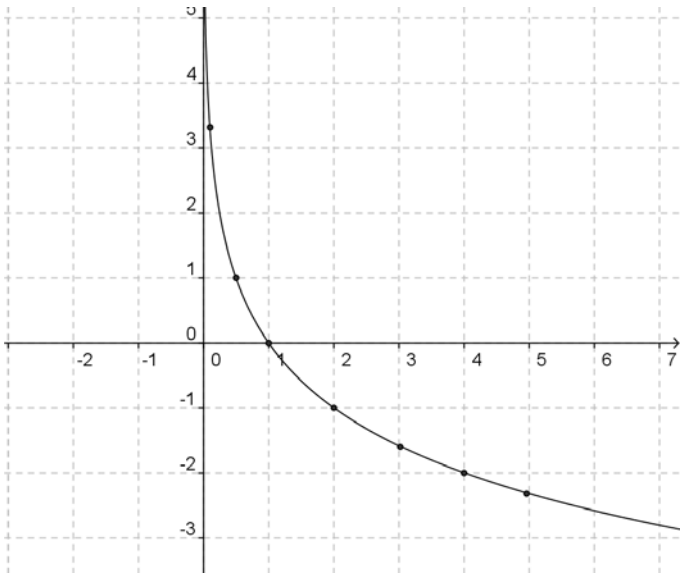
- La tabla de valores y la gráfica de la función $y = \log_2 x$ son las siguientes:

x	$\log_2 x$
0,1	-3,3
0,5	-1,0
0,7	-0,5
1	0,0
2	1,0
3	1,6
4	2,0
5	2,3
...	...



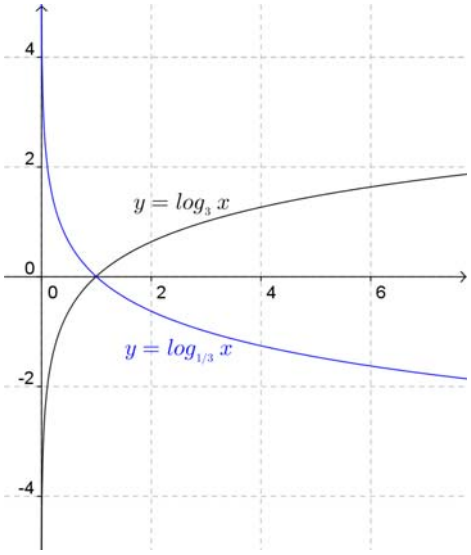
- La tabla de valores y la gráfica de la función $y = \log_{1/2} x$ son las siguientes:

x	$\log_{1/2} x$
0,1	3,3
0,5	1,0
0,7	0,5
1	0,0
2	-1,0
3	-1,6
4	-2,0
5	-2,3...
...	



Las características de estas gráficas nos permiten deducir las de las funciones logarítmicas en general, que son las siguientes:

- Su **dominio** es (0, +∞). Es decir, solo están definidas para "x" positivo.
- Son continuas.
- Su **recorrido** es toda la recta real.
- Pasan por los puntos (1, 0), (b, 1) y (1/b, –1).
- La gráfica de $y = \log_b x$ y la de $y = \log_{1/b} x$ son simétricas respecto del eje OX.



Por otra parte observamos unas características propias en las funciones en ambas ilustraciones, según sea la base del logaritmo mayor o menor que la unidad.

Cuando la base es b > 1:

- Son funciones **crecientes**. Cuanto mayor es la base el crecimiento es más rápido.
- Cuando $x \to 0$ la función tiende a $-\infty$. Por tanto presenta una **asíntota vertical** en la parte negativa del eje OY.
- Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota horizontal, pues la variable "y" puede llegar a cualquier valor.

Cuando la base es 0 < b < 1:

- Son funciones **decrecientes**. Cuanto menor es la base el decrecimiento es más rápido.
- Cuando $x \to 0$ la función tiende a $+\infty$. Por tanto presenta una **asíntota vertical** en la parte positiva del eje OY.
- Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota horizontal, pues la variable "y" puede llegar a cualquier valor.

2.3.2. Relación entre las funciones exponencial y logarítmica

Según la definición del logaritmo tenemos la siguiente relación: $y = \log_b x \quad \Leftrightarrow \quad x = b^y$

Las funciones logarítmica y exponencial llevan intercambiado el lugar de la "x" y la "y". Por tanto son **funciones inversas**.

En consecuencia, si partimos de un número y le aplicamos la función logarítmica, y luego al resultado le aplicamos la función exponencial volvemos al número de partida. Lo mismo ocurre si primero aplicamos la función exponencial y después la logarítmica.

Ejemplo:

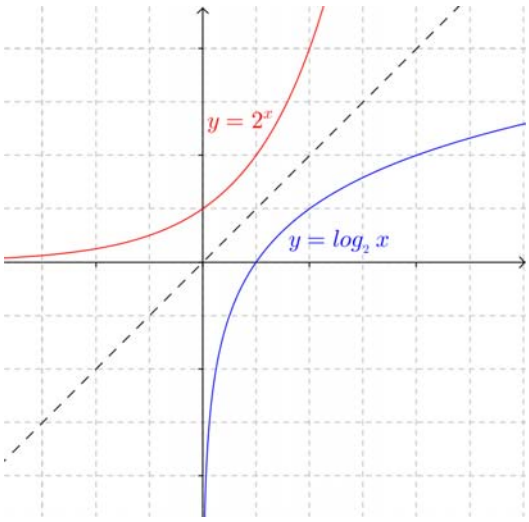
- Partiendo del número 3, utilizando la calculadora aplicamos una función logarítmica: $\log_5 3 = 0{,}6826$ (recuerda la fórmula de cambio de base). A continuación aplicamos la función exponencial: $5^{0{,}6826} = 3$ y obtenemos el número del principio.
- Haciéndolo en sentido inverso, partiendo del número 3 aplicamos primero una función exponencial: $5^3 = 125$. A continuación aplicamos la función logarítmica: $\log_5 125 = 3$ y también hemos obtenido el número del principio.

Cuando dos funciones son inversas sus gráficas son **simétricas**, siendo su eje de simetría la bisectriz del primer cuadrante.

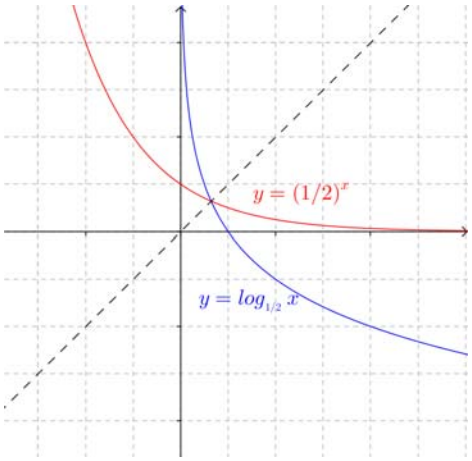
Esto se debe a que si el punto (*a*, *b*) es de la gráfica de una de ellas, el punto (*b*, *a*) pertenece a la gráfica de la otra.

Ejemplos:

- Las gráficas de las funciones $f(x) = \log_2 x$ y $g(x) = 2^x$ tienen la siguiente simetría:



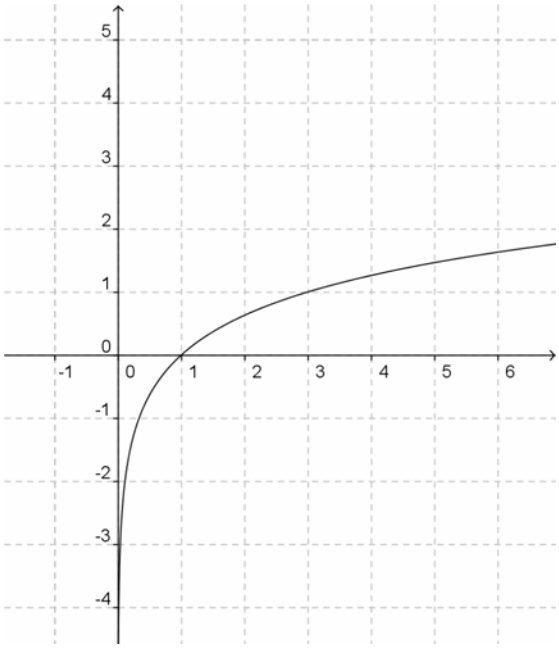
- Las gráficas de las funciones $f(x) = \log_{1/2} x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ tienen la siguiente simetría:



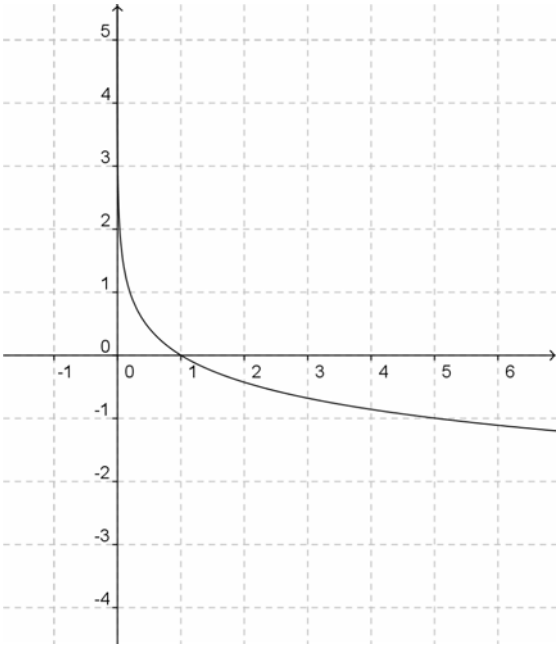
Actividades resueltas

- Identifica las funciones correspondientes con las siguientes gráficas:

a)



b)



Solución:

Ambas son funciones logarítmicas porque pasan por el punto (1, 0) y tienen como asíntota vertical el eje OY (bien sea en su parte positiva o negativa) y por el otro lado tienden a ∞.

La función (a) es $y = \log_3 x$ porque pasa por el punto (3, 1) y por (1/3, –1).

La función (b) es $y = \log_{1/5} x$ porque pasa por el punto (5, –1) y por (1/5, 1).

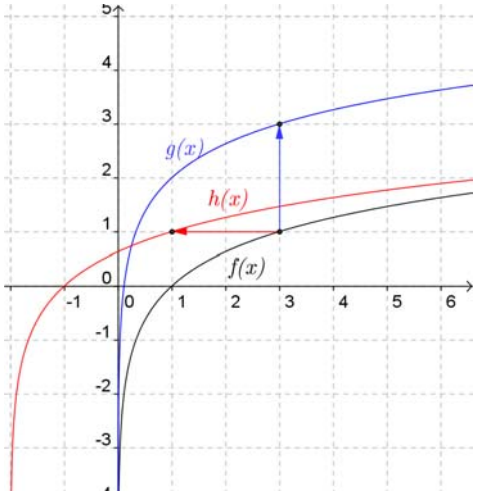
- Conociendo la gráfica de la función $f(x) = \log_3 x$, que se ha visto más arriba, y sin calcular valores, dibuja las gráficas de las funciones $g(x) = \log_3 x + 2$ y $h(x) = \log_3(x+2)$.

Solución:

La función $g(x)$ es la función $f(x)$ desplazada hacia arriba 2 unidades.

La función $h(x)$ es la función $f(x)$ desplazada hacia la izquierda 2 unidades.

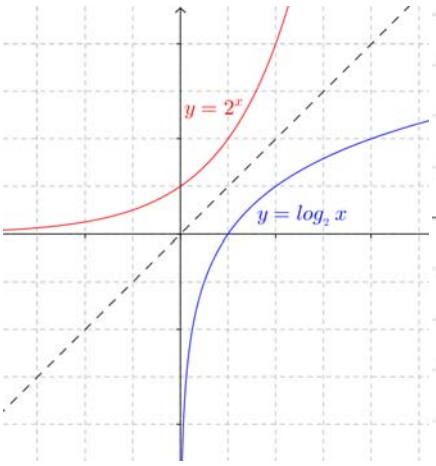
Por tanto sus gráficas son estas:



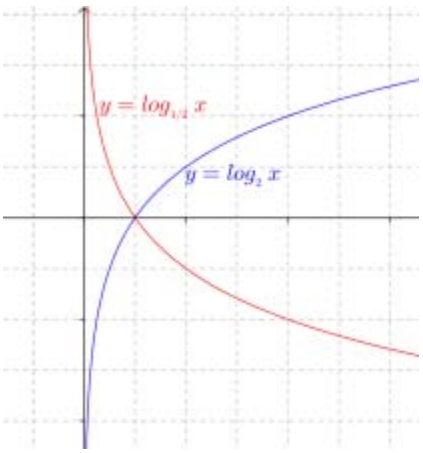
- Representa la función $y=\log_2 x$ usando una tabla de valores. A continuación, a partir de ella y sin calcular valores, representa las funciones siguientes: $y=2^x$, $y=\log_{1/2} x$, y utilizando también $y=2^x$ representa $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Solución:

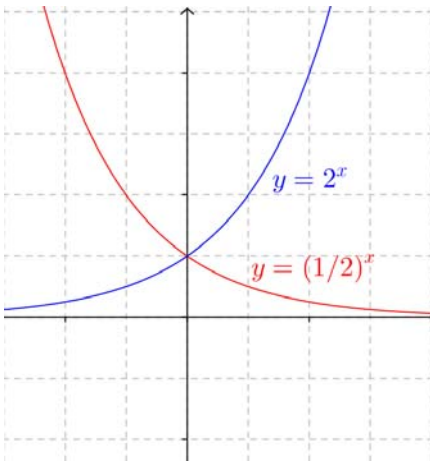
Por la simetría respecto a la bisectriz del primer cuadrante:



Por la simetría respecto al eje OX:



Por la simetría respecto al eje OY:



Actividades propuestas

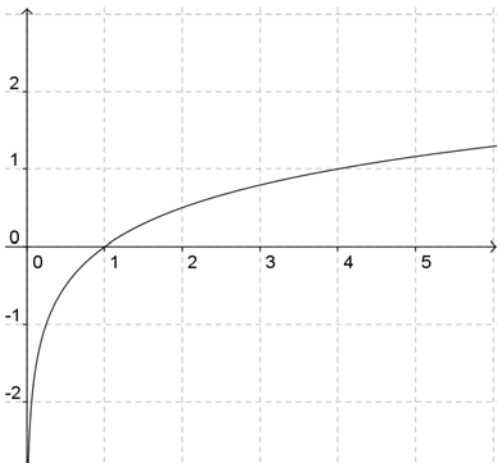
23. Representa en tu cuaderno, mediante tablas de valores, las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\log_2 x$ b) $f(x)=\log_{1/2} x$ c) $f(x)=\log_{1,5} x$

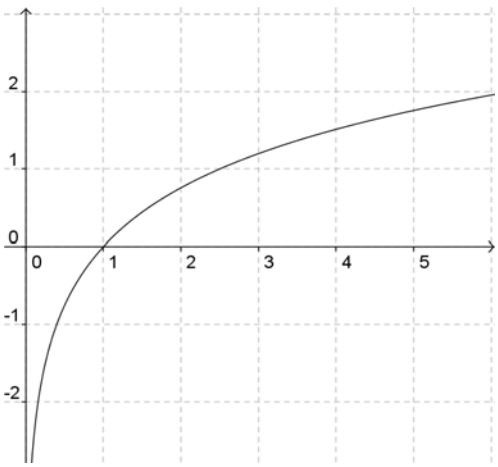
Comprueba que en todos los casos pasan por los puntos (1, 0), (b, 1) y (1/b, –1).

24. Identifica las fórmulas de las siguientes funciones a partir de sus gráficas, sabiendo que son funciones logarítmicas:

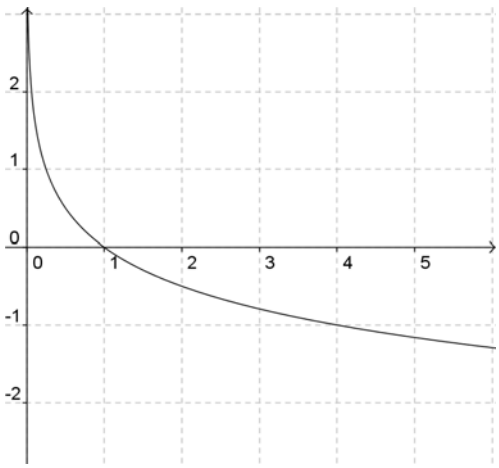
a)



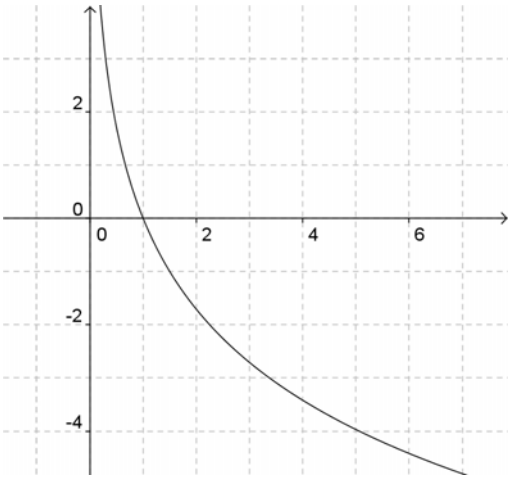
b)



c)



d)



25. Repite en tu cuaderno el dibujo de la función $f(x)=\log_2 x$ representada en el ejercicio 23. Después piensa qué desplazamiento sufren respecto a ella las funciones siguientes y represéntalas en la misma gráfica sin hacer tablas de valores:

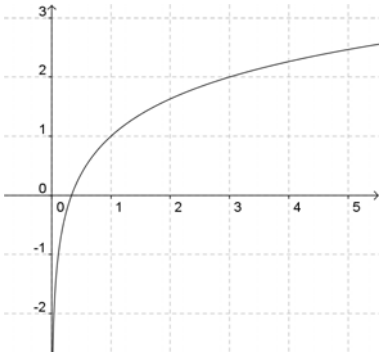
a) $g(x)=\log_2 x+3$ b) $h(x)=\log_2 x-3$ c) $i(x)=\log_2(x+3)$ d) $j(x)=\log_2(x-3)$

26. Haz el mismo proceso del ejercicio anterior con las funciones siguientes:

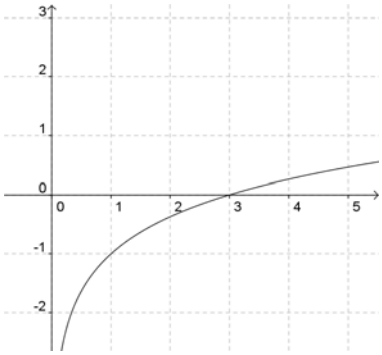
a) $g(x)=\log_2 x+2$ b) $h(x)=\log_2 x-2$ c) $i(x)=\log_2(x+2)$ d) $j(x)=\log_2(x-2)$

27. Identifica las fórmulas de las siguientes funciones a partir de sus gráficas, sabiendo que son funciones logarítmicas:

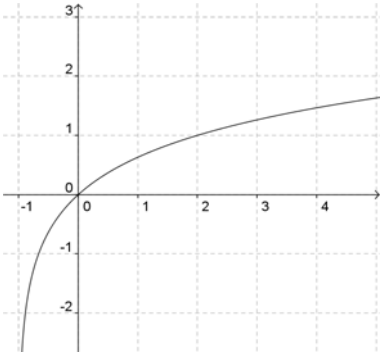
a)



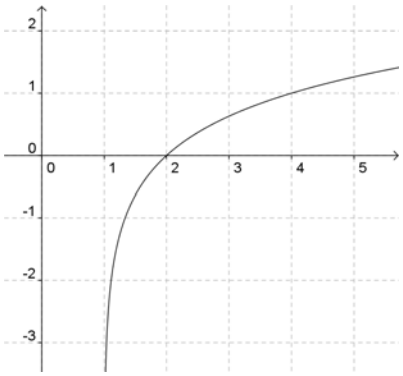
b)



c)



d)



28. Representa en tu cuaderno la función y = 3^x usando una tabla de valores. A continuación, a partir de ella y sin calcular valores, representa las funciones siguientes: $y=\left(\frac{1}{3}\right)^2$, $y=\log_3 x$, $y=\log_{1/3} x$.

3. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En el capítulo 7 has estudiado Trigonometría, por lo que ya conoces las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo. Ahora vamos a estudiar las funciones trigonométricas y sus propiedades.

Recuerda que:

Un radian se define como la medida del ángulo central cuyo arco de circunferencia tiene una longitud igual al radio. Por tanto:

360º equivalen a 2π radianes

De donde se deduce que:

180º equivalen a π radianes

90º equivalen a π/2 radianes …

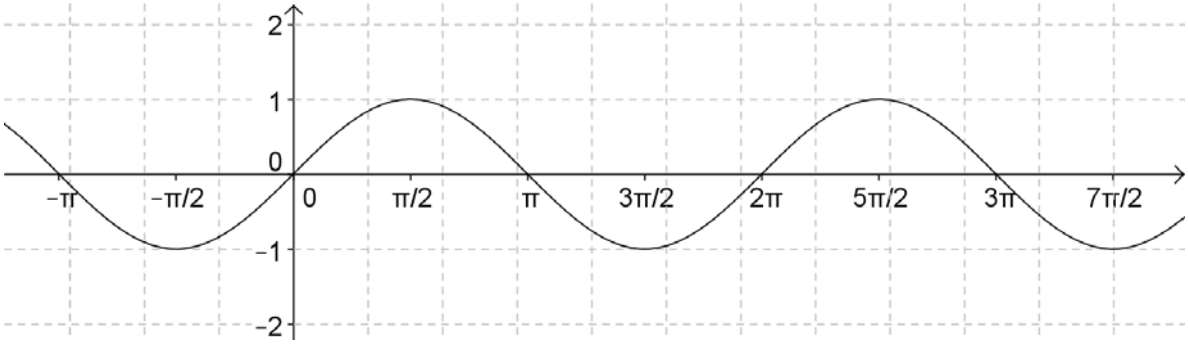
3.1. Las funciones seno y coseno

Estas dos funciones se incluyen en el mismo apartado porque son muy parecidas.

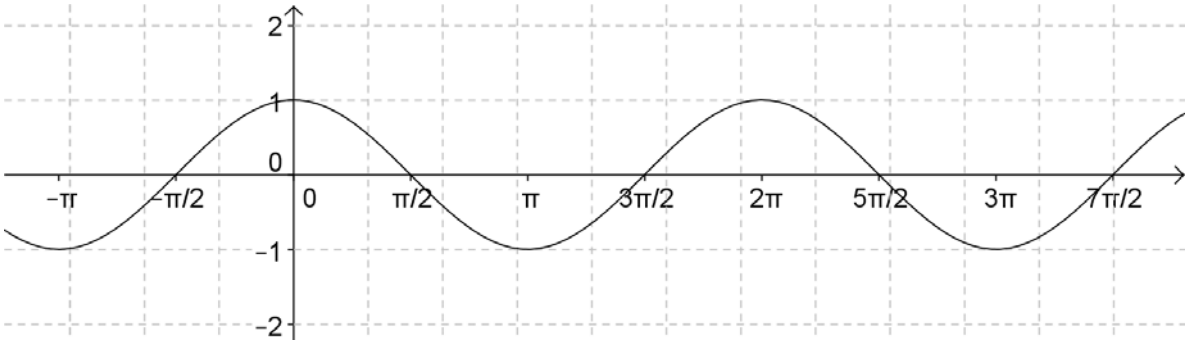
Su gráfica es la llamada *sinusoide*, cuyo nombre deriva del latín *sinus* (seno).

Ya sabes que en los estudios de Matemáticas se suele utilizar como unidad para medir los ángulos el radián. Por tanto es necesario conocer estas gráficas expresadas en radianes. Las puedes obtener fácilmente con la calculadora. Fíjate en sus similitudes y en sus diferencias:

Gráfica de la función $f(x) = \text{sen } x$



Gráfica de la función $f(x) = \cos x$



Ya sabes cuánto vale π, π = 3,14…. Tenlo en cuenta al dibujar las gráficas.

Propiedades de estas funciones:

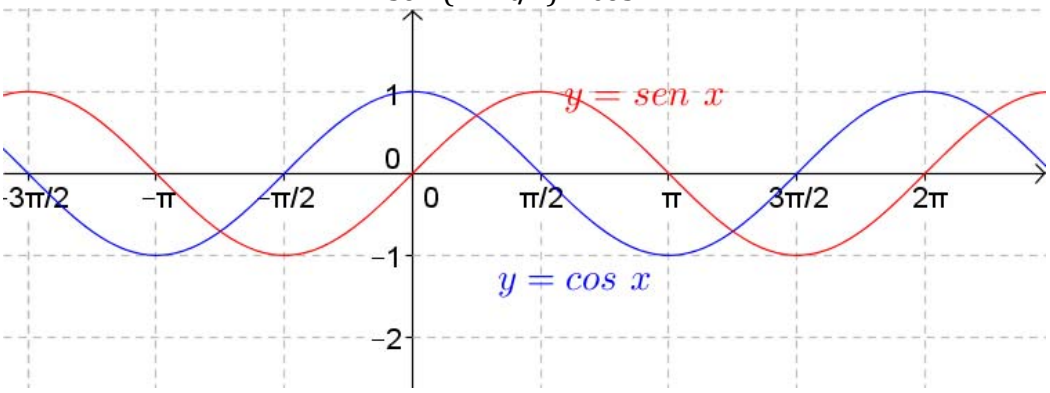
- Ambas son periódicas y el valor de su período es 2π.

  $sen\ (x + 2\pi) = sen\ x$ $\qquad$ $cos\ (x + 2\pi) = cos\ x$
- Son funciones continuas en todo su dominio.
- Su dominio son todos los números reales.
- Su recorrido es el intervalo [–1 , 1].

- La función seno tiene simetría impar (simétrica respecto del origen de coordenadas, es decir, $sen\ x = -sen\ (-x)$) y la función coseno tiene simetría par (simétrica respecto del eje OY, es decir, $cos\ x = cos\ (-x)$).
- Ambas funciones tienen la misma gráfica pero desplazada en $\frac{\pi}{2}$ radianes en sentido horizontal.

  Es decir:

$$\text{sen}\ (x + \pi/2) = \cos x$$

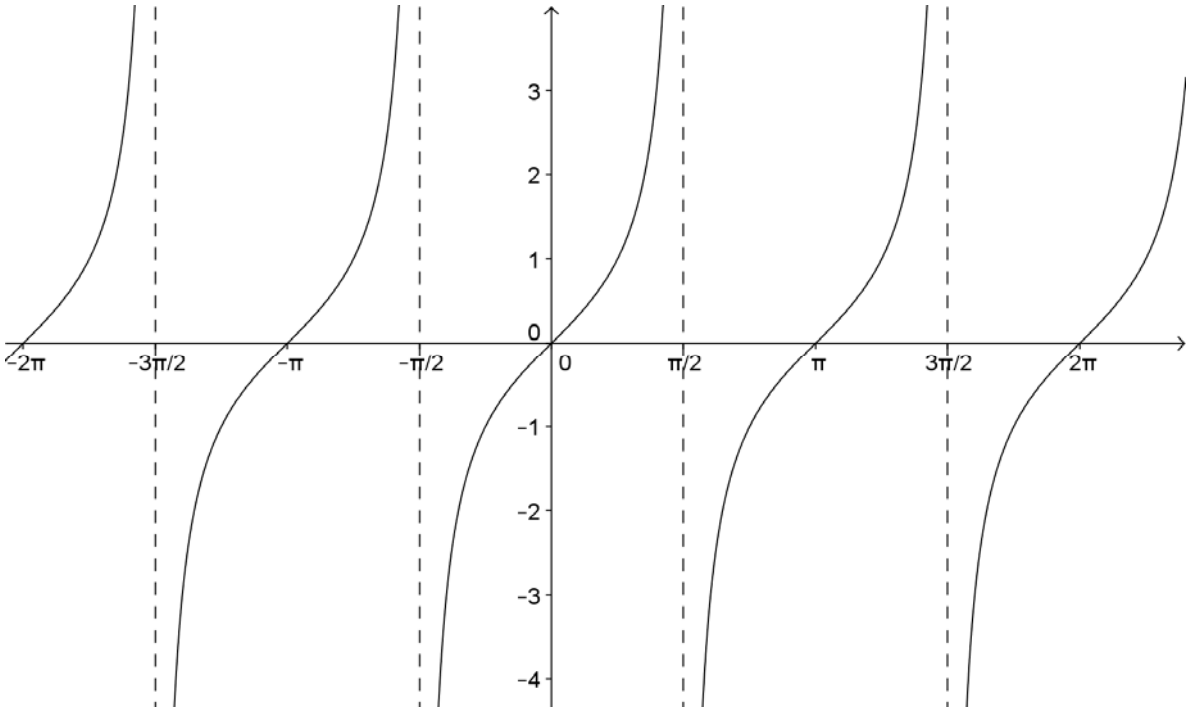


3.2. La función tangente

Esta función es diferente a las otras dos. Por esa razón la presentamos separadamente.

Ya sabes que como razones trigonométricas: tg x = sen x/ cos x.

La gráfica de la función $f(x) = tg\ x$ es la siguiente:



Recordamos en primer lugar que no existe la tangente para los ángulos de ± π/2, ±3π/2, ±5π/2, etc.

Las propiedades de esta función son las siguientes:

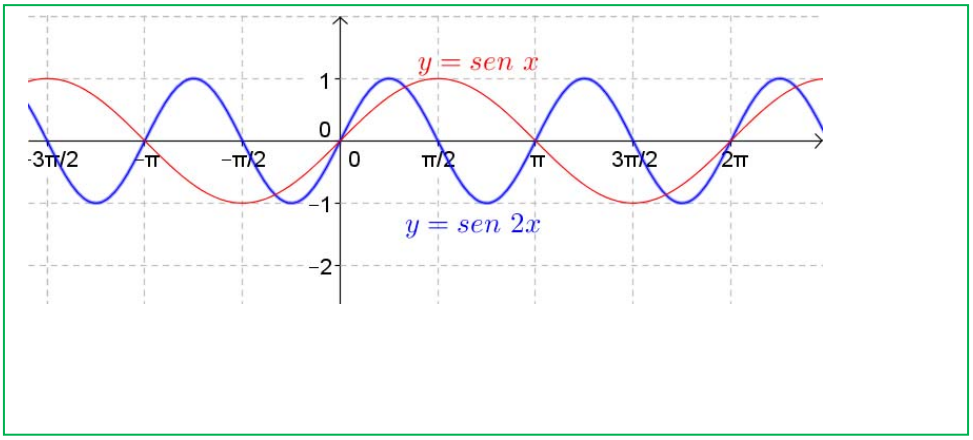
- Es una función periódica y el valor de su período es ahora menor, es π: tg $(x+\pi)$ = tg x.
- Su dominio son todos los números reales excepto los múltiplos de π/2 por un número impar (±π/2, ±3π/2, ±5π/2, etc.), donde no existe. En esos valores presenta discontinuidades llamadas discontinuidades *inevitables*, porque no se podrían "taponar" mediante un punto.
- Tiene asíntotas verticales en esos mismos valores de la x. Las hemos representado en el gráfico mediante líneas discontinuas.
- Tiene simetría impar: es simétrica respecto del origen de coordenadas, ya que tg (x) = – tg $(-x)$

Actividades resueltas

- Representa las gráficas de las funciones $y = \text{sen}(2x)$ e $y = 2\text{sen } x$ comparándolas después con la gráfica de $y = \text{sen } x$.

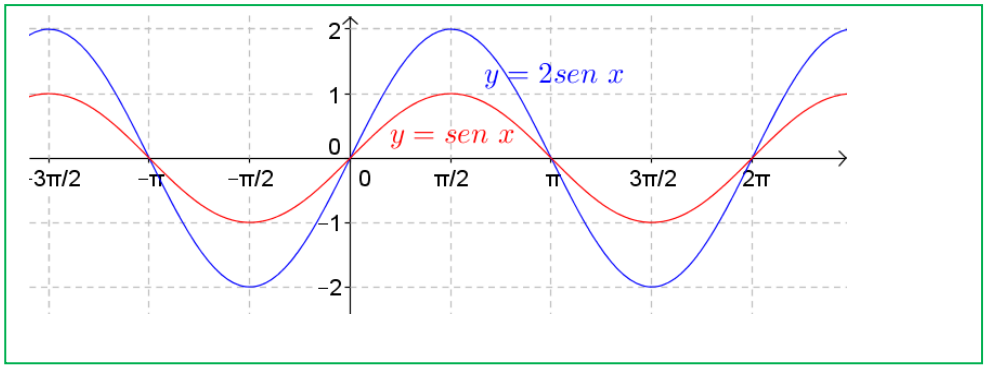
Solución:

Dando valores con la calculadora obtenemos las siguientes gráficas, representadas en azul junto a la de la función sen x, representada en rojo:



La gráfica de $y = \text{sen}(2x)$ es igual a la de $y = \text{sen } x$ contrayéndola horizontalmente. Cambia el periodo, que ahora es de π.

La gráfica de $y = 2\text{sen } x$ es igual a la de $y = \text{sen } x$ expandiéndola verticalmente. Tienen el mismo periodo, pero cambia la amplitud. Cuando $y = \text{sen } x$ alcanza en π/2 un valor máximo de 1, $y = 2\text{sen } x$ alcanza en π/2 un valor máximo de 2. Decimos que su amplitud vale 2.



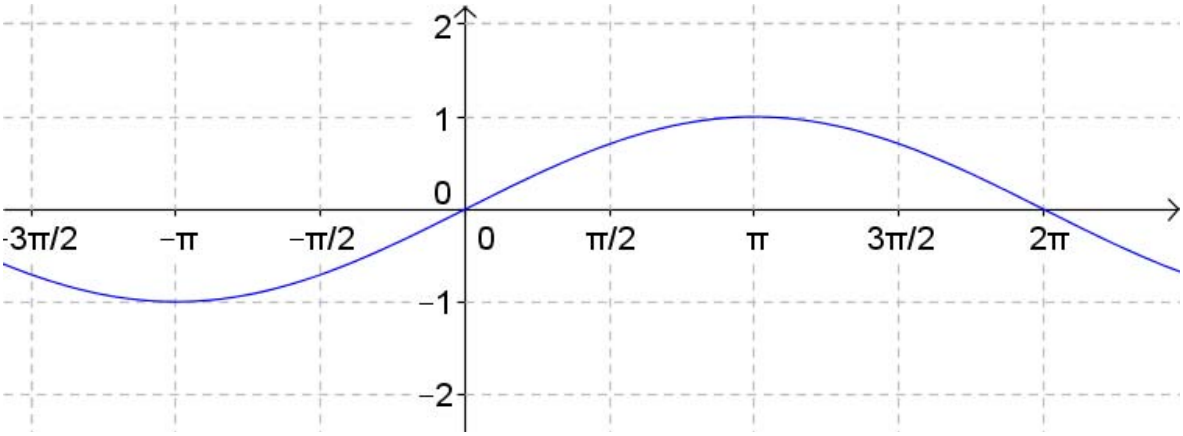
Actividades propuestas

29. Representa en tu cuaderno las gráficas de las funciones $y = \cos x$, $y = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ e $y = \frac{1}{2}\cos x$ comparándolas después con la gráfica de $y = \cos x$.

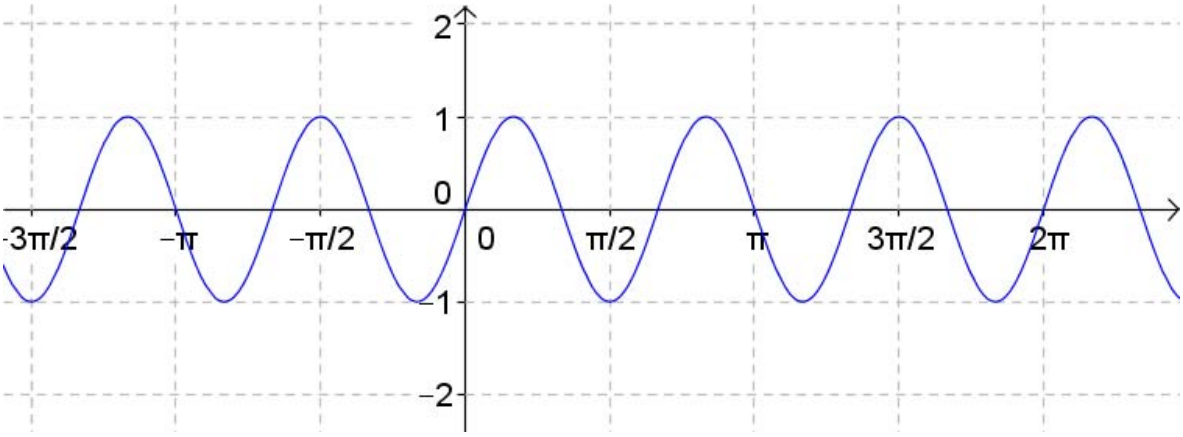
30. Partiendo de la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$, representa en tu cuaderno, sin hacer tablas de valores, las gráficas de $y = 1 + \operatorname{sen} x$ y de $y = \operatorname{sen}(x + \pi/6)$.

31. Identifica las gráficas de las siguientes funciones trigonométricas:

a)



b)



CURIOSIDADES. REVISTA

Las poblaciones crecen exponencialmente

En los modelos que se utilizan para estudiar las poblaciones se utiliza la función exponencial. Se supone que una población de una cierta especie crece exponencialmente mientras tenga alimento suficiente y no existan depredadores. Llega un momento en el que la población ha llenado el territorio (la Tierra es finita) y entonces cambia la función que se utiliza, estabilizándose el crecimiento.

Esto permite estudiar el crecimiento de las bacterias que se reproducen por fisión binaria, o el crecimiento de las células del feto, o la población de conejos cuando llegaron a Australia... Malthus afirmó que si la población humana crecía de forma exponencial y la producción de alimentos crecía de forma lineal habría graves hambrunas.

Logaritmos

No hace tanto tiempo no existían las calculadoras. Para calcular logaritmos se usaban "tablas". Había unas tablas de logaritmos que eran un libro con un lomo de unos tres dedos de ancho. Se usaban en problemas de Astronomía en los que había que utilizar fórmulas de trigonometría para resolverlos y se usaban números con muchas cifras decimales (más de 10). ¡Imaginas lo que es multiplicar o dividir números con esas cifras decimales! Resultaba muy conveniente transformar las multiplicaciones en sumas y las divisiones en restas. Esta misma idea fue la que llevó a John Napier (o Neper) a inventar los logaritmos.

No todo lo puedes calcular con calculadora.

Utiliza tu calculadora para calcular 45^{79}. Verás que da *error*. Pero si usas logaritmos puedes calcularlo fácilmente.

$$Y = 45^{79} \Rightarrow$$

$$\log Y = \log 45^{79} = 79 \cdot \log 45 = 130{,}6037886 \Rightarrow$$

$$Y = 10^{130} \cdot 10^{0{,}6037886} \Rightarrow$$

$$10^{0{,}6037886} = 4{,}016 \Rightarrow$$

$$Y = 45^{79} = 4{,}016 \cdot 10^{130}.$$

Decrecimiento exponencial

Muchos fenómenos se modelan con funciones exponenciales de base menor que 1, como

- La desintegración de átomos de una sustancia radiactiva.
- La intensidad luminosa de un haz de luz
- La probabilidad de supervivencia de ciertas especies que no tienen genéticamente determinado el envejecimiento celular

Carbono 14

El carbono 14 es un isótopo radiactivo con un periodo de semidesintegración (vida media) de 5568 años, muy utilizado para datar restos orgánicos. Las plantas, por fotosíntesis, y los animales por ingestión incorporan el carbono en la misma proporción que existe en la atmósfera, y al morir el ser vivo empieza el proceso de desintegración.

Sophia Kovalevkaya

Conocemos muy bien muchas anécdotas de la vida de Sophia (o Sonia como a ella le gustaba que la llamaran), una mujer matemática con teoremas con su nombre, porque escribió su biografía en un precioso libro llamado "*Una infancia en Rusia*"

Cuando Sophia tenía 14 años, su familia recibió la visita de Nikolai Nikanorovich Tyrtov, un vecino profesor de física, que dejó a la familia una copia de su nuevo libro sobre esta materia. Sonia comenzó a estudiarlo y se quedó atascada al llegar a la sección de óptica en la que se utilizaban razones trigonométricas que no había visto nunca. Entonces fue directamente a Tyrtov a preguntarle qué era exactamente un *seno*, pero él, sin hacerle demasiado caso, le contestó que no lo sabía. De modo que Sonia comenzó a analizar y a explicar lo que era un seno partiendo de las cosas que ya conocía llegando a sustituirlo por el arco, que, dado que las fórmulas que trataba el libro se aplicaban en ángulos muy pequeños, lo aproximaban bastante bien. La siguiente vez que Tyrtov fue de visita a la casa, Sonia le pidió que discutieran sobre su libro y él, tras intentar cambiar de tema, concluyó que lo encontraba demasiado difícil para ella. Sonia le comentó que el texto no había tenido ninguna dificultad para ella, e incluso le explicó cómo había ido deduciendo todo aquello que no conocía y que se utilizaba en el libro. Tyrtov quedó estupefacto y le comentó al padre de Sonia que su desarrollo sobre el concepto de seno había sido exactamente el mismo con el que históricamente se había introducido tal concepto en las Matemáticas.

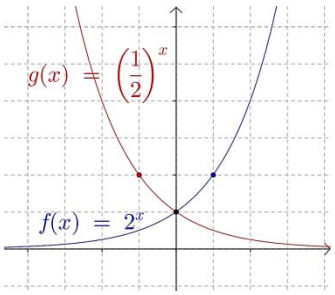
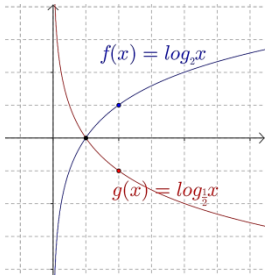
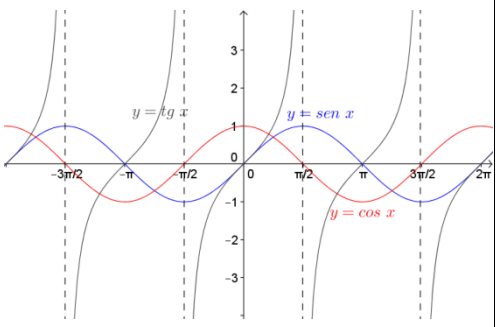
Fourier y el concepto de función

El concepto de función ha tardado mucho en ser comprendido incluso por los matemáticos, sólo dispuestos a aceptar dos tipos de funciones, las que venían dadas por una fórmula o las que se trazaban arbitrariamente dibujando su gráfica. La idea abstracta de función como correspondencia tardó un tiempo en aparecer.

Fue *Joseph Fourier* en su obra *"La teoría analítica del calor"* el motor para la profundización del concepto de función. Fourier vivió durante la Revolución Francesa y participó en la expedición de Napoleón a Egipto. Era muy friolero y por ese motivo le interesaba la propagación del calor. En su obra afirma que "toda" función podía escribirse como una suma infinita de funciones seno y coseno.

Antoni Zygmund escribió *"Esta teoría ha sido una fuente de nuevas ideas para los analistas durante los dos últimos siglos y probablemente lo será en los próximos años. Muchas nociones y resultados básicos de la teoría de funciones han sido obtenidos por matemáticos trabajando sobre series trigonométricas".* Añade que esa obra de Fourier fue el catalizador para fijar el concepto de función, la definición de integral, profundizar en la Teoría de Conjuntos y actualmente con la Teoría de Funciones Generalizadas o Distribuciones.

RESUMEN

		Ejemplos
Función exponencial $y = b^x$	Dominio: Todos los números reales. Recorrido: Todos los números reales positivos. Continua en todo el dominio Asíntota horizontal: $y = 0$ $b > 1$, $\Leftrightarrow$ Creciente en todo el dominio. $0 < b < 1 \Leftrightarrow$ Decreciente en todo el dominio Puntos destacables: $(0, 1)$, $(1, b)$, $(-1, 1/b)$	
Definición de logaritmo	$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a \quad (a > 0, b > 0, b \neq 1)$ Consecuencias elementales: $\log_b b = 1 \quad \log_b 1 = 0$	$\log_5 125 = 3$ $\log_4 8 = 3/2$
Cambio de base	$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$	$\log_4 7 = \dfrac{\log 7}{\log 4} = 1{,}40$
Operaciones con logaritmos	Log. de un producto: $\mathbf{\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y}$ Log. de un cociente: $\mathbf{\log_b (x : y) = \log_b x - \log_b y}$ Log. de una potencia: $\mathbf{\log_b x^y = y \cdot \log_b x}$	$\log \dfrac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} =$ $\dfrac{1}{2}(3\log b + \log c) - 2\log x$
Función logarítmica $y = \log_b x$	*Dominio*: T Todos los números reales positivos. *Recorrido*: Todos los números reales. **Continua** en todo el dominio Asíntota vertical: x=0 $b > 1 \Leftrightarrow$ Creciente en todo el dominio. $0 < b < 1 \Leftrightarrow$ Decreciente en todo el dominio Puntos destacables: $(1, 0)$, $(b, 1)$, $(1/b, -1)$	
Funciones trigonométricas $y = \text{sen}\, x$ $y = \cos x$ $y = \text{tg}\, x$	**Funciones seno y coseno:** *Dominio*: Todos los números reales *Recorrido*: $[-1, 1]$ Continuas en todo el dominio. Periódicas de período 2π **Función tangente:** *Dominio y continuidad*: Todo $\Re$ salvo $(2n + 1)\cdot\pi/2$ (En esos valores hay asíntotas verticales) *Recorrido*: Todos los números reales. Periódica de periodo π. **Simetría:** Funciones seno y tangente: simetría impar. Función coseno: simetría par.	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Función exponencial

1. Representa mediante una tabla de valores las siguientes funciones:

a) $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ b) $y=\left(\frac{4}{3}\right)^x$ c) $y=2^{x/2}$ d) $y=3^{-2x}$

2. Representa mediante una tabla de valores la función $y=3^x$ y a continuación, sin tabla de valores, representa estas otras sobre el mismo dibujo:

a) $y=3^x-1$ b) $y=3^x+1$ c) $y=3^{x+1}$ d) $y=3^{x-1}$

3. Encuentra una función exponencial $f(x)=b^x$ sabiendo que $f(2)=9$.

4. Encuentra una función $f(x)=k\cdot b^x$ sabiendo que $f(4)=48$ y que $f(0)=3$.

5. Si un capital de 3.500 euros se multiplica cada año por 1,02 representa en un gráfico la evolución de ese capital en los 10 primeros años. Escoge unas proporciones adecuadas para los ejes.

6. Cierto tipo de células se reproduce por bipartición, comprobándose que el número de ellas se duplica cada día. Si en un día determinado el número de células era de 4 millones:

a) Expresa mediante una función el número de células en función del número de días.

b) Halla el número de células que habrá dentro de 3 días y el que había hace 3 días.

c) ¿En qué día piensas que el número de células era de 31.250?

7. La descomposición de cierto isótopo radiactivo viene dada por la fórmula $y = y_0\cdot 2{,}7^{-0{,}25t}$, donde y_0 representa la cantidad inicial y t el número de milenios transcurrido. Si la cantidad actual es de 50 gramos, ¿cuál será la cantidad que quede al cabo de 8.000 años? ¿Cuál era la cantidad que había hace 5.000 años?

Función logarítmica

8. Calcula los siguientes logaritmos utilizando la definición y sin utilizar la calculadora:

a) $\log_5 625$ b) $\log_2 128$ c) $\log 1000$ d) $\log_3 \frac{1}{27}$ e) $\log_5 0{,}2$ f) $\log 0{,}1$

9. Calcula los siguientes logaritmos utilizando la definición e igualando exponentes, sin calculadora:

a) $\log_9 3$ b) $\log_4 32$ c) $\log_2 0{,}125$ d) $\log_9 27$ e) $\log_2 \sqrt{8}$ f) $\log_8 2$

g) $\log_3 0{,}333\ldots$ h) $\log_8 \sqrt{2}$ i) $\log_3 \sqrt[4]{27}$ j) $\log \sqrt{1000}$

10. Calcula los siguientes logaritmos con la calculadora utilizando la fórmula del cambio de base:

a) $\log_5 7$ b) $\log_9 12$ c) $\log_{20} 0{,}1$ d) $\log_{13} \sqrt{8}$ e) $\log_{16} \sqrt{1000}$

11. Utilizando los valores log 2 = 0,301 y que log 3 = 0,477 calcula, aplicando las propiedades de los logaritmos y sin calculadora:

a) $\log 27$ b) $\log 12$ c) $\log 20$ d) $\log 50$ e) $\log \sqrt{6}$ f) $\log \sqrt[3]{25}$

12. Llamando log 9 = *x* expresa en función de *x* los siguientes logaritmos:

a) $\log 81$ b) $\log 900$ c) $\log 0{,}\hat{1}$ d) $\log 0{,}9$ e) $\log \sqrt[3]{900}$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

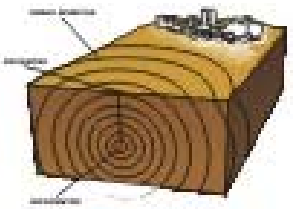
a) $2 \log x = \log (10 - 3x)$ b) $\log 2 + \log(11 - x^2) = 2 \log(5 - x)$

c) $\log(x^2 + 3x + 2) - \log (x^2 - 1) = \log 2$ d) $\log x + \log(x + 15) = 2$

14. ¿Qué relación hay entre el logaritmo de un número *x* y el de su inverso 1/*x*?

15. Si se multiplica por 36 el número *x*, su logaritmo en cierta base aumenta en dos unidades. ¿Cuál es dicha base?

16. La *escala Richter*, usada para medir la intensidad de los terremotos, es una escala logarítmica: un terremoto de magnitud 5 es 100 veces más intenso que uno de magnitud 3, porque 5 = log 100.000 y 3 = log 1.000. Teniendo esto en cuenta, si el famoso terremoto de San Francisco (en 1906) tuvo una magnitud de 8,2 y el de Haití (en 2010) fue de 7,2 ¿cuántas veces más fuerte fue uno que otro?



Terremoto

Funciones trigonométricas

17. Determina todos los ángulos que verifican que *sen x* = 1/2.

18. Determina todos los ángulos que verifican que *sen x* = –1/2.

19. Determina todos los ángulos que verifican que *cos x* = 1/2.

20. Determina todos los ángulos que verifican que *cos x* = –1/2.

21. Determina todos los ángulos que verifican que *tg x* = –1.

22. Calcula *sen x* y *cos x* si *tg x* = –3.

23. Calcula *sen x* y *tg x* si *cos x* = 0,4.

24. Calcula *tg x* y *cos x* si *sen x* = –0,3.

25. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos expresados en radianes siguientes:

a) 17π/3, b) –20π/3, c) 13π/2, d) –9π/2.

26. Dibuja en tu cuaderno sobre unos mismos ejes las gráficas de las funciones seno, coseno y tangente e indica lo siguiente: a) Si el seno vale cero, ¿cuánto vale el coseno, y la tangente? b) Si el coseno vale cero, ¿cuánto vale el seno y la tangente? c) Si la tangente vale cero, ¿cuánto vale el seno y el coseno? d) Cuándo la tangente tiende a infinito, ¿cuánto vale el coseno?

27. Dibuja la gráfica de la función *y* = *sen*(2*x*), completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$sen(2x)$					
y					

a) La amplitud es la ordenada del máximo. ¿Cuál es la amplitud de esta función?

b) ¿Cuál es su periodo?

c) La frecuencia es la inversa del periodo, ¿cuál es su frecuencia?

28. Dibuja la gráfica de la función $y = 3\text{sen}(\pi x)$, completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
πx	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$sen(\pi x)$					
y					

a) ¿Cuál es la amplitud de esta función?

b) ¿Cuál es su periodo?

c) ¿Cuál es su frecuencia?

29. Dibuja la gráfica de la función $y = 2sen((\pi/3)x) + \pi/2$, completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
$(\pi/3)x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$sen((\pi/3)x)$					
y					

a) ¿Cuál es la amplitud de esta función?

b) ¿Cuál es su periodo?

c) ¿Cuál es su frecuencia?

30. Dibuja la gráfica de la función $y = 3sen(\pi x + 2)$, completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
$\pi x + 2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$sen(\pi x + 2)$					
y					

a) ¿Cuál es la amplitud de esta función?
b) ¿Cuál es su periodo?
c) ¿Cuál es su frecuencia?

31. Dibuja la gráfica de la función $y = cos(2x)$, completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$cos(2x)$					
y					

a) ¿Cuál es la amplitud de esta función?

b) ¿Cuál es su periodo?

c) ¿Cuál es su frecuencia?

32. Dibuja la gráfica de la función $y = 3cos(\pi x)$, completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
πx	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$cos(\pi x)$					
y					

a) ¿Cuál es la amplitud de esta función?

b) ¿Cuál es su periodo?

c) ¿Cuál es su frecuencia?

33. Dibuja la gráfica de la función $y = 2cos(\pi x + 2)$, completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
$\pi x + 2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$cos(\pi x + 2)$					
y					

a) ¿Cuál es la amplitud de esta función?

b) ¿Cuál es su periodo?

c) ¿Cuál es su frecuencia?

34. Dibuja la gráfica de la función $y = tg(2x)$, completando previamente la tabla siguiente en tu cuaderno:

x					
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$tg(2x)$					
y					

¿Cuál es su periodo?

Problemas

35. Por efecto de un antibiótico el número de bacterias de una colonia se reduce en un 7 % cada hora. Si en el momento de administrarse el antibiótico había 40 millones de bacterias, ¿cuántas habrá al cabo de 10 horas?

36. Una persona ingiere a las 8 de la mañana una dosis de 10 mg de medicamento. Dicho medicamento se va eliminando a través de la orina, y la cantidad que queda en el cuerpo al cabo de t horas viene dada por la fórmula $M(t)=10\cdot 0{,}8^t$. Para que el medicamento haga efecto tiene que haber al menos una cantidad de 2 mg en el cuerpo. ¿Cuánto tiempo seguirá haciendo efecto después de su ingestión?

37. La medida de la presión atmosférica P (en milibares) a una altitud de *x* kilómetros sobre el nivel del mar está dada por la ecuación $P(x)=1035\cdot e^{-0{,}12x}$.

a) Si la presión en la cima de una montaña es de 449 milibares, ¿cuál es la altura de la montaña?

b) ¿Cuál será la presión en la cima del Everest (altitud 8.848 metros)?

38. ¿A qué tanto por ciento hay que invertir un capital para duplicarlo en 10 años?

39. ¿Cuántos años debe estar invertido un capital para que al 5 % de interés se convierta en 1,25 veces el capital inicial?

40. ¿Conoces esas muñecas rusas que llevan dentro otra muñeca igual pero de menor tamaño, y así sucesivamente? Supongamos que cada muñeca tiene dentro otra que ocupa 2/3 de su volumen. Si la muñeca mayor tiene un volumen de 405 cm^3 y la más pequeña es de 80 cm^3, ¿cuántas muñecas hay en total en la serie? ¿Podrías dar una fórmula general para este cálculo?

41. Indica, sin dibujar la gráfica, el periodo, la amplitud y la frecuencia de las funciones siguientes:

a) $y = 2\ sen\ (x/2)$, b) $y = 0{,}4\ cos\ (\pi x/2)$, c) $y = 5\ sen\ (\pi x/3)$, d) $y = 3\ cos\ (\pi x)$.

AUTOEVALUACIÓN

1. El valor de x que verifica la ecuación exponencial $\frac{4^{x+3}}{2^{x-1}} = 64$ es:

a) 1 b) 2 c) 3 d) –1

2. La función exponencial $y = e^x$ tiende a *** cuando x tiende a $-\infty$ y a *** cuando x tiende a $+\infty$. Indica con qué valores habría que rellenar los asteriscos:

a) 0, $+\infty$ b) $+\infty$, 0 c) 0, $-\infty$ d) $-\infty$, 0

3. Indica cuál es la función exponencial $f(x) = b^x$ que verifica que $f(3) = 27$:

a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = 3^x$ c) $f(x) = 27^x$ d) $f(x) = 5^x$

4. El valor de x que verifica $x = \log_2 1024$ es:

a) 0 b) 5 c) 10 d) Otro valor

5. La ecuación logarítmica $\log x + \log 6 = \log 30$ tiene como solución:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

6. Indica la afirmación verdadera:

a) La función exponencial de base mayor que 1 es decreciente

b) La función logarítmica de base mayor que 1 es decreciente

c) La función exponencial siempre es creciente

d) La función exponencial de base mayor que 1 es creciente

7. La expresión general de todos los ángulos cuya tangente vale 1, donde k es un número entero, es:

a) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ b) $\frac{\pi}{4} + k\pi$ c) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ d) $\frac{\pi}{2} + k\pi$

8. La función $f(x) = 3\,sen(4x)$ tiene de amplitud, periodo y frecuencia, respectivamente:

a) 3, π/2, 2/π b) 4, π/3, 3/π c) 4, 3/π, π/3 d) 3, 2/π, π/2

9. El seno, el coseno y la tangente de $-\frac{7\pi}{4}$ valen respectivamente:

a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 1$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2}, \quad \sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 1$

10. El seno, el coseno y la tangente de $\frac{13\pi}{6}$ valen respectivamente:

a) $\frac{1}{2}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1}{2}, \quad \sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad \sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 1$

Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas

4ºB ESO
Capítulo 13: Estadística

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-039144

Fecha y hora de registro: 2014-04-07 18:30:34.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Raquel Caro

Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. FASES Y TAREAS DE UN ESTUDIO ESTADÍSTICO

2. POBLACIÓN Y MUESTRA. VARIABLES ESTADÍSTICAS

2.1. POBLACIÓN
2.2. MUESTRA
2.3. INDIVIDUO
2.4. VARIABLE ESTADÍSTICA

3. TABLAS DE FRECUENCIAS

3.1. FRECUENCIA ABSOLUTA
3.2. FRECUENCIA RELATIVA
3.3. FRECUENCIA ABSOLUTA ACUMULADA
3.4. FRECUENCIA RELATIVA ACUMULADA

4. GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

4.1. DIAGRAMA DE BARRAS
4.2. HISTOGRAMA
4.3. DIAGRAMA DE SECTORES
4.4. ANÁLISIS CRÍTICO DE TABLAS Y GRÁFICAS ESTADÍSTICAS EN LOS MEDIOS DE COMUNICACIÓN. DETECCIÓN DE FALACIAS.

5. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

5.1. MEDIDAS DE TAMAÑO
5.2. MEDIDAS DE FRECUENCIA
5.3. MEDIDAS DE POSICIÓN

6. MEDIDAS DE DISPERSIÓN

6.1. MEDIDAS DE DESVIACIÓN
6.2. LOS RANGOS

7. DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES

7.1. TABLAS DE FRECUENCIA DE UNA VARIABLE BIDIMENSIONAL
7.2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA VARIABLE BIDIMENSIONAL
7.3. MEDIDAS EN UNA VARIABLE BIDIMENSIONAL. COEFICIENTE DE CORRELACIÓN

La Estadística se utiliza en la Ciencia. También para hacer **sondeos de opinión**, como la aceptación por el público de un programa de televisión, o las encuestas sobre la intención de voto a un partido político. Se usan técnicas estadísticas en los procesos de fabricación, es el **control de calidad**. Para hacer previsiones y programas el tráfico, o las necesidades de energía de un país. Cuando se analiza un fenómeno observable aparecen una serie de resultados que han de ser tratados convenientemente, de manera que se puedan comprender mejor tanto los resultados como la característica objeto de estudio correspondiente a dicho fenómeno. Para este fin se utiliza la Estadística.

En este capítulo aprenderemos a reconocer y clasificar distintos tipos de variables estadísticas, construir tablas de frecuencias y gráficos estadísticos para distintos tipos de variables estadísticas y determinar e interpretar medidas de centralización, posición y dispersión.

También nos centraremos en el estudio de dos variables de interés correspondientes a dos características (o variables) distintas. En este sentido, puede ser interesante considerar simultáneamente los dos caracteres a fin de estudiar las posibles relaciones entre ellos.

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. FASES Y TAREAS DE UN ESTUDIO ESTADÍSTICO

Nos enfrentamos a diario a la necesidad de recoger, organizar e interpretar datos y esta necesidad aumentará en el futuro, debido al desarrollo de los sistemas de comunicación y las bases de datos. Es notable el aumento del uso de las redes sociales tales como *Youtube* o *Facebook*, donde las personas tienen oportunidad de presentar información sobre ellos mismos, y de páginas web donde se pueden encontrar y descargar gran variedad de datos estadísticos sobre diversos temas de actualidad: resultados deportivos de sus equipos favoritos, temperatura máxima y mínima a lo largo de un mes, ventas de turrón la pasada navidad, etc. En otras ocasiones los datos son recogidos por el investigador mediante la realización de una encuesta o a través de un experimento. La encuesta requerirá la elaboración de un cuestionario, fijando los objetivos del mismo, eligiendo las variables explicativas y redactando las preguntas que permitan obtener la información deseada de una forma clara y concisa.

En este sentido, la estadística ha jugado un papel primordial en este desarrollo tecnológico que nos está tocando vivir, al proporcionar herramientas metodológicas generales para analizar la variabilidad, determinar relaciones entre variables, diseñar de forma óptima experimentos, mejorar las predicciones y la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre.

El tratamiento estadístico de un problema comienza siempre con la presentación de la magnitud que se quiere analizar de una determinada población y la selección de la muestra pertinente para pasar a la recogida de datos. Una vez obtenidos los datos se ordenan y presentan en tablas o gráficas, de forma que sea posible observar las particularidades que señalan.

De aquí se puede considerar que un estudio estadístico consta de una serie de fases y tareas bien diferenciadas:

1. Definición de la población y característica a estudiar.

   Tareas: Identificación de las características cuantitativas y cualitativas; fijación de la población; especificación de la forma de recogida de datos (entrevistas, teléfono, correo electrónico, etc.).

2. Selección de la muestra.

   Tareas: Identificación del tamaño de la muestra y presupuesto necesario.

3. Recogida de datos.

   Tareas: Diseño del cuestionario; diseño muestral.

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4. Organización y representación gráfica.

Tareas: Tablas y gráficas que ayuden a una más fácil interpretación de los datos; esto consiste en un estudio de cada variable, la tabulación y representación (es) gráfica (s) más apropiada (s).

5. Análisis de datos.

Taras: Tratamiento de los datos. Esto consistirá en un análisis descriptivo de los datos y/o un análisis multivariante de los datos, dependiendo del tipo de estudio a realizar y costes del mismo.

6. Obtención de conclusiones.

Tareas: recomendaciones y toma de decisiones a partir de las conclusiones.

Ejemplo:

- Una lista de puntos a tener en cuenta al plantear las preguntas de investigación es la siguiente:
  - ¿Qué quieres probar? ¿Qué tienes que medir /observar /preguntar?
  - ¿Qué datos necesitas? ¿Cómo encontrarás tus datos? ¿Qué harás con ellos?
  - ¿Crees que puedes hacerlo? ¿Encontrarás problemas? ¿Cuáles?
  - ¿Para qué te servirán los resultados?

De esta manera se preparará una lista de las características que queremos incluir en el estudio, analizando las diferentes formas con las que podrían obtenerse los datos. Por simple observación: como el sexo, color de pelo y ojos, si el alumno usa o no gafas; Si se requiere una medición: como el peso, talla, perímetro de cintura; si habría que preguntar, es decir, si se debe realizar una encuesta: cuánto deporte practica, número del calzado, cuantas horas duerme, cuantas horas estudia al día o a la semana, etc.

Por tanto, es importante considerar la naturaleza de las escalas de medida y tipo de variable estadística, puesto que de ellas depende el método de análisis de datos que se puede aplicar. La elección del conjunto de datos es crítica, pues dependiendo del tipo de datos la gama de técnicas estadísticas será más o menos amplia, ya que no todas las técnicas son aplicables a cualquier tipo de dato.

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. POBLACIÓN Y MUESTRA. VARIABLES ESTADÍSTICAS

2.1. Población

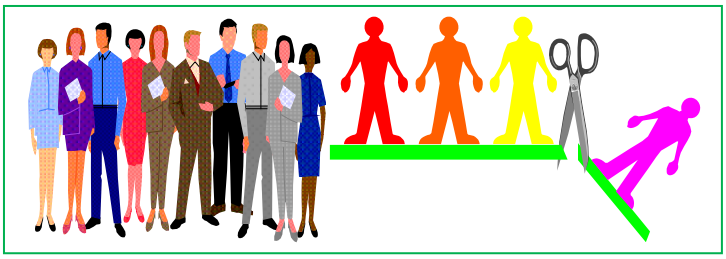
Población estadística, colectivo o universo es el conjunto de todos los individuos (personas, objetos, animales, etc.) que contengan información sobre el fenómeno que se estudia.

Ejemplos:

- Si estudiamos el precio de la vivienda en una ciudad, la población será el total de las viviendas de dicha ciudad.
- Se va a realizar un estudio estadístico sobre el porcentaje de personas casadas en la península. Para ello no es factible estudiar a todos y cada uno de los habitantes por razones de coste y de rapidez en la obtención de la información. Por lo tanto, es necesario acudir a examinar sólo una parte de esta **población**. Esa parte es la **muestra** elegida.

1.2. Muestra

Muestra es un subconjunto representativo que se selecciona de la población y sobre el que se va a realizar el análisis estadístico. El **tamaño de la muestra** es el número de sus elementos. Cuando la muestra comprende a todos los elementos de la población, se denomina **censo.**



Ejemplo:

- Si se estudia el precio de la vivienda de una ciudad, lo normal será no recoger información sobre todas las viviendas de la ciudad (ya que sería una labor muy compleja y costosa), sino que se suele seleccionar un subgrupo (muestra) que se entienda que es suficientemente representativo.

Actividades propuestas

1. Señalar en qué caso es más conveniente estudiar la población o una muestra:

a) El diámetro de los tornillos que fabrica una máquina diariamente.
b) La altura de un grupo de seis amigos.

2. Se puede leer el siguiente titular en el periódico que publica tu instituto: "*La nota media de los alumnos de 4º ESO de la Comunidad de Madrid es de* 7'9". ¿Cómo se ha llegado a esta conclusión? ¿Se ha estudiado a toda la población? Si hubieran seleccionado para su cálculo solo a las mujeres, ¿sería representativo su valor?

2.3. Individuo o unidad estadística

Individuo o **unidad estadística** es cualquier elemento que contenga información sobre el fenómeno que se estudia.

Ejemplo:

- Si estudiamos las notas de los alumnos de una clase, cada alumno es un individuo; si estudiamos el precio de la vivienda, cada vivienda es una unidad estadística.

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.4. Variable estadística

En general, supondremos que se está analizando una determinada población, de la que nos interesa cierta característica, representada por una **variable** observable o estadística *X*. Las variables que están bajo estudio se pueden clasificar en dos categorías:

Variables cualitativas o atributos (datos no métricos), que no se pueden medir numéricamente. Las escalas de medida no métricas se clasifican en nominales (o categóricas) y ordinales.

Variables cuantitativas, que tienen un valor numérico. Este tipo de variables son las que aparecen con más frecuencia y permiten un análisis más detallado que las cualitativas. Dentro de las variables cuantitativas, se pueden distinguir las variables **discretas** y las variables **continuas**. Las **variables discretas** toman valores aislados, mientras que las **variables continuas** pueden tomar cualquier valor dentro de un intervalo.

Ejemplo:

- Ejemplos de variables cualitativas son la nacionalidad o la raza de un conjunto de personas.
- Ejemplos de variables cuantitativas son las notas obtenidas en una asignatura, el peso o altura de un conjunto de personas.
- Ejemplos de variables discretas son el número de alumnos que aprueban una asignatura, o el número de componentes defectuosos que se producen al día en una fábrica.
- Ejemplos de variables continuas son el tiempo que tardamos en llegar al instituto desde nuestra casa o la velocidad de un vehículo.

Actividades resueltas

- Se va a realizar un estudio estadístico sobre el porcentaje de personas con hijos en una localidad madrileña de 134.678 habitantes. Para ello se eligen 2.346 habitantes y se extienden las conclusiones a toda la población. Identificar: variable estadística, población, muestra, tamaño muestral e individuo.
  - *Variable estadística*: si una persona tiene hijos o no.
  - *Población*: Los 134.678 habitantes de la localidad.
  - *Muestra*: Los 2.346 habitantes elegidos.
  - *Tamaño muestral:* 2.346 personas.
  - *Individuo*: Cada persona a la que se le pregunte.

Actividades propuestas

3. Indicar el tipo de variable estadística que estudiamos y razona, en cada caso, si sería mejor analizar una muestra o la población:
   a) El sexo de los habitantes de un país.
   b) El dinero gastado a la semana por tu hermano.
   c) El color de pelo de tus compañeros de clase.
   d) La temperatura de tu provincia.
   e) La talla de pie de los alumnos del instituto.

4. Para realizar un estudio hacemos una encuesta entre los jóvenes de un barrio y les preguntamos por el número de veces que van al cine al mes. Indica qué características debería tener la muestra elegida y si deberían ser todos los jóvenes de la muestra de la misma edad.

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. TABLAS DE FRECUENCIAS

3.1. Frecuencia absoluta

Cuando se analiza una *variable discreta*, la información resultante de la muestra se encuentra resumida habitualmente en una tabla o distribución de frecuencias. Supongamos que se ha tomado una muestra de tamaño N en la que se han identificado k valores (o modalidades) distintos $x_1, x_2,..., x_k$. Cada uno de ellos se produce con una **frecuencia absoluta** n_i, es decir, el número de veces que aparece en la muestra.

La información obtenida se puede resumir en una **tabla de frecuencias**.

Las tablas de frecuencia también se utilizan para representar información de una *variable continua* procedente de una muestra en la que se agrupan las observaciones en intervalos, que se denominan **intervalos de clase** L_i o celdas.

Aunque este procedimiento supone, de hecho, una pérdida de información, esta pérdida no es de magnitud importante y se ve compensada con la agrupación de la información y la facilidad de interpretación que proporciona una tabla de frecuencias.

En este caso, los valores x_i se corresponden con el punto medio del intervalo y se denominan **marcas de clase**.

Ejemplo:

- Cuando realizamos un estudio sobre el ocio y encuestamos a 40 jóvenes de una localidad sobre el número de veces que van al cine los resultados de dicha encuesta los podemos recoger en una tabla para resumir dicha información.

Actividades resueltas

- Se está realizando un control del peso de un grupo de niños. Para ello, se contabilizan el número de veces que comen al día una chocolatina 13 niños durante un mes, obteniendo los siguientes números: 2, 5, 3, 2, 0, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 0, 2.

La información obtenida se puede resumir en una tabla de frecuencias absolutas:

Valores	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia absoluta	2	2	4	1	2	1	0	1

- En una fábrica se realiza un estudio sobre el espesor, en *mm*, de un cierto tipo de latas de refresco. Con este fin, selecciona una muestra de tamaño N = 25, obteniendo los siguientes valores: 7’8, 8’2, 7’6, 10’5, 7’4, 8’3, 9’2, 11’3, 7’1, 8’5, 10’2, 9’3, 9’9, 8’7, 8’6, 7’2, 9’9, 8’6, 10’9, 7’9, 11’1, 8’8, 9’2, 8’1, 10’5.

Esta información se puede resumir en la siguiente tabla de frecuencias, con 5 intervalos: (7, 8], (8,

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

9], (9, 10], (10, 11], (11, 12], siendo las marcas de clase los puntos medios de cada intervalo: 7’5; 8’5; 9’5; 10’5; 11’5. Comprueba que las frecuencias absolutas son las indicadas en la tabla:

Intervalos de clase	(7, 8]	(8, 9]	(9, 10]	(10, 11]	(11, 12]
Marcas de clase	7’5	8’5	9’5	10’5	11’5
Frecuencia absoluta	6	8	5	4	2

Actividades propuestas

5. Obtener la tabla de frecuencias absolutas de las notas en inglés de 24 alumnos:

6	6	7	8	4	9	8	7	6	5	3	5
7	6	6	6	5	4	3	9	8	8	4	5

3.2. Frecuencia relativa

Se denomina **frecuencia relativa** (f_i) de un valor de la variable al cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de observaciones *N*. Se escribe:

$$f_i = \frac{n_i}{N} \leq 1$$

Ejemplo:

- De la misma manera podemos recoger la información obtenida a partir de una encuesta a 40 jóvenes de una localidad sobre el número de veces que van al cine mediante porcentaje del número de veces que se repite un valor de la variable sobre el total.

Actividades resueltas

- Se está realizando un control del peso de un grupo de niños. Para ello, se contabilizan el número de veces que comen al día una chocolatina 13 niños durante un mes, obteniendo los siguientes números: 2, 5, 3, 2, 0, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 0, 2.

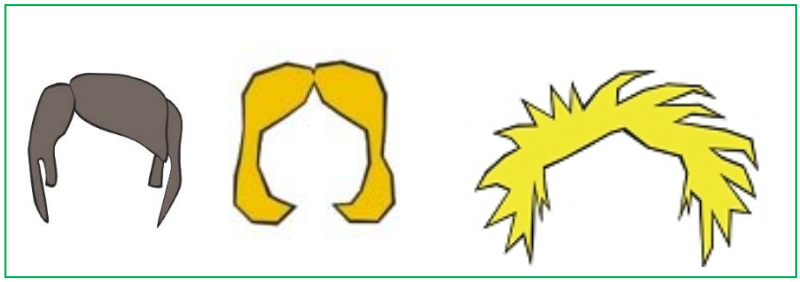
  La información obtenida se puede resumir en una tabla de frecuencias relativas:

Valores	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia relativa	0’154	0’154	0’307	0’077	0’154	0’077	0	0’077

Actividades propuestas

6. Construir una tabla de frecuencias relativas con el color de pelo de 24 personas elegidas al azar:
M=moreno; R=rubio; P=pelirrojo

M	R	P	R	R	R
R	P	P	M	M	M
M	R	R	R	R	R
M	M	M	M	M	P



Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.3. Frecuencia absoluta acumulada

Se denomina **frecuencia absoluta acumulada** de un valor de la variable N_i a la suma de todas las frecuencias absolutas de los valores menores o iguales que él. Se calcula como:

$$N_i = \sum_{j=1}^{i} \left[n_j \right]$$

Se verifica la siguiente relación entre los valores de N_i:

$$N_1 \leq N_2 \leq \cdots \leq N_k = N$$

Ejemplo:

- De la misma manera podemos recoger la información obtenida a partir de una encuesta a 40 jóvenes de una localidad sobre el número de veces que van al cine mediante el número acumulado de veces que se repite un valor de la variable sobre el total.

Actividades resueltas

- Se está realizando un control del peso de un grupo de niños. Para ello, se contabilizan el número de veces que comen al día una chocolatina 13 niños durante un mes, obteniendo los siguientes números: 2, 5, 3, 2, 0, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 0, 2.

La información obtenida se puede resumir en una tabla de frecuencias absolutas:

Valores	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia absoluta	2	2	4	1	2	1	0	1
Frecuencia absoluta acumulada	2	4	8	9	11	12	12	13

Actividades propuestas

7. El número de horas diarias de estudio de 14 alumnos es el siguiente:

3 4 2 5 3 4 3 2 3 4 5 4 3 2

a) Efectúa un recuento y organiza los resultados obtenidos en una tabla de frecuencias absolutas acumuladas.

b) ¿Qué significan las frecuencias acumuladas que has calculado?

3.4. Frecuencia relativa acumulada

Se denomina **frecuencia relativa acumulada** (F_i) de un valor de la variable a la suma de todas las frecuencias relativas de los valores menores o iguales que él. Se calcula como:

$$F_i = \sum_{j=1}^{i} \left[f_j \right]$$

Se verifica la siguiente relación entre los valores de F_i:

$$F_1 \leq F_2 \leq \cdots \leq F_k = 1$$

Ejemplo:

- De la misma manera podemos recoger la información obtenida a partir de una encuesta a 40 jóvenes de una localidad sobre el número de veces que van al cine mediante el porcentaje acumulado del número de veces que se repite un valor de la variable sobre el total.

Actividades resueltas

- Se está realizando un control del peso de un grupo de niños. Para ello, se contabilizan el número de veces que comen al día una chocolatina 13 niños durante un mes, obteniendo los siguientes

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

números: 2, 5, 3, 2, 0, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 0, 2.

La información obtenida se puede resumir en una tabla de frecuencias relativas:

Valores	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia relativa	0'154	0'154	0'307	0'077	0'154	0'077	0	0'077
Frecuencia relativa acumulada	0'154	0'308	0'615	0'692	0'846	0'923	0'923	1

- En una fábrica se realiza un estudio sobre el espesor, en *mm*, de un cierto tipo de latas de refresco. Con este fin, selecciona una muestra de tamaño *N* = 25, obteniendo los siguientes valores: 7'8, 8'2, 7'6, 10'5, 7'4, 8'3, 9'2, 11'3, 7'1, 8'5, 10'2, 9'3, 9'9, 8'7, 8'6, 7'2, 9'9, 8'6, 10'9, 7'9, 11'1, 8'8, 9'2, 8'1, 10'5.

Esta información se puede resumir en la siguiente tabla de frecuencias, con 5 intervalos:

Intervalos de clase	(7, 8]	(8, 9]	(9, 10]	(10, 11]	(11, 12]
Marcas de clase	7'5	8'5	9'5	10'5	11'5
Frecuencia absoluta	6	8	5	4	2
Frecuencia relativa	0'24	0'32	0'2	0'16	0'08
Frecuencia relativa acumulada	0'24	0'56	0'76	0'92	1

- Se organiza en una tabla la información recogida de las estaturas, en cm, de un grupo de 20 niñas:

130	127	141	139	138	126	135	138	134	131
143	140	129	128	137	136	142	138	144	136

La estatura es una variable estadística cuantitativa continua. Por tanto, podemos agrupar los valores de la variable en intervalos que llamamos clases o celdas. La amplitud de cada intervalo viene dada por la fórmula:

$$\frac{Máx - Mín}{\sqrt{N}}$$

En nuestro caso concreto tenemos que:

$$\frac{144 - 126}{\sqrt{20}} = 4.02$$

Aproximando, la amplitud de cada intervalo es de 5 cm.

Estatura en intervalos	[125-130)	[130-135)	[135-140)	[140-145)
Frecuencia absoluta	4	3	8	5
Frecuencia relativa	0'2	0'15	0'4	0'25
Frecuencia absoluta acumulada	4	7	15	20
Frecuencia relativa acumulada	0'2	0'35	0'75	1

Actividades propuestas

8. En una evaluación, de los 30 alumnos de una clase, el 30 % aprobó todo, el 10 % suspendió una asignatura, el 40 % suspendió dos asignaturas y el resto más de dos asignaturas.

a) Realiza la tabla de frecuencias completa correspondiente (frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias absolutas acumuladas y frecuencias relativas acumuladas).

b) ¿Hay algún tipo de frecuencia que corresponda a la pregunta de cuantos alumnos suspendieron menos de dos asignaturas? Razona la respuesta.

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4. GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

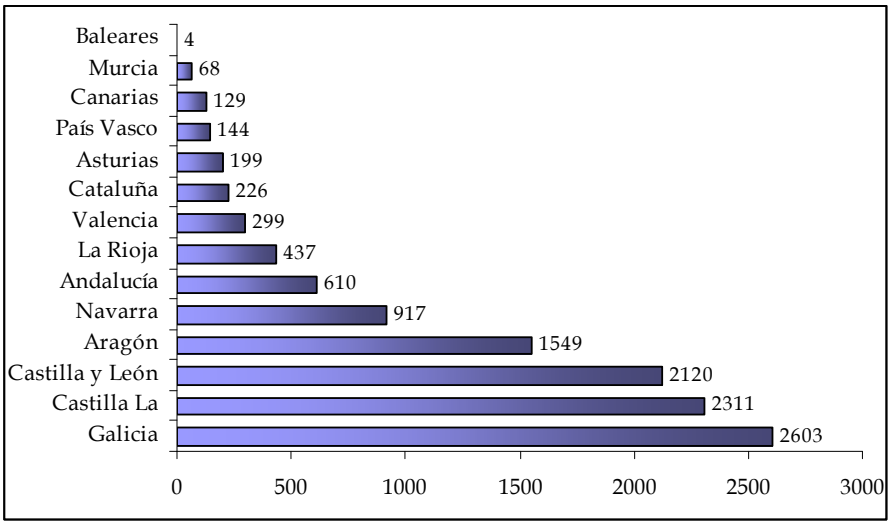
4.1. Diagrama de barras

Existen numerosas maneras de representar gráficamente la información que se ha obtenido de una muestra, dependiendo del tipo de variable que se esté analizando y del fin que se persiga con la representación.

Cuando se quiere representar gráficamente una variable cualitativa (atributo) o una variable cuantitativa discreta se puede utilizar *los* ***diagramas de barras o rectángulos***. Se colocan los valores de la variable (las modalidades del atributo o valores de la variable discreta) en el eje de abscisas y, en el eje de ordenadas las frecuencias (absolutas o relativas). Sobre cada valor se levanta una barra o rectángulo cuya altura es igual a la frecuencia. Por comodidad, a veces también se suelen intercambiar los ejes.

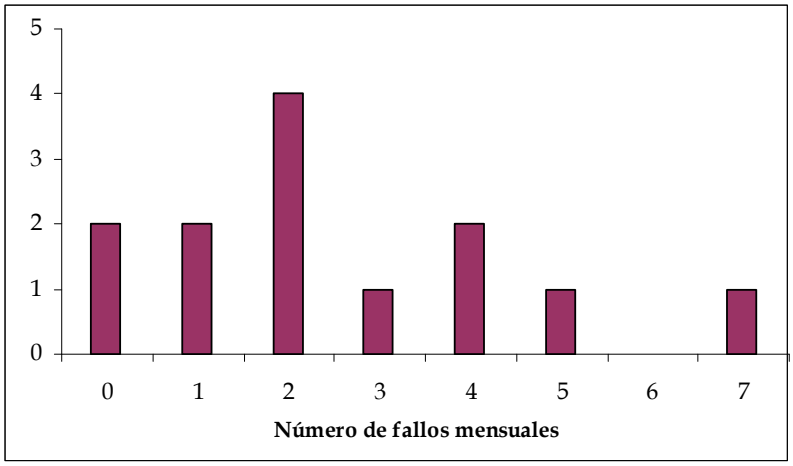
Ejemplo:

- Se ha representado gráficamente la potencia eólica (fuente de energía eléctrica renovable) instalada en España por Comunidad Autónoma en Enero de 2014 (en Megavatios)



Ejemplo:

- Se ha representado gráficamente el número de fallos mensuales de una máquina de helados



Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

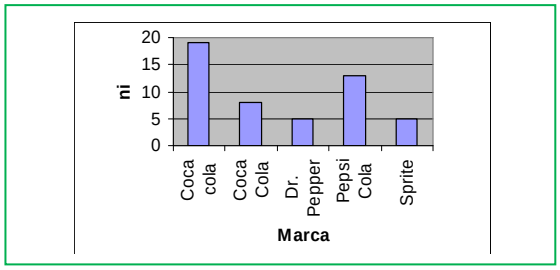
Actividades resueltas

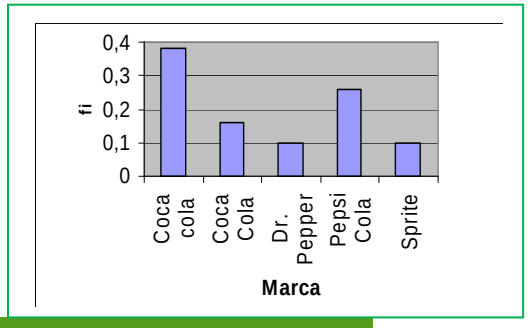
- Dada la siguiente información correspondiente a las preferencias de 50 adolescentes americanos respecto a la marca de refresco que consumen, construye la tabla asociada a estos datos y represéntalos gráficamente en un diagrama de barras de frecuencias absolutas y otro de frecuencias relativas.

COCA-COLA=CC; COCA-COLA LIGHT=CCL; DR.PEPPER=A; PEPSI-COLA=PC, SPRITE=S

CCL	CC	S	A	CC	CC	A	CC	P	CC
S	CCL	P	CCL	CC	CC	CCL	P	P	A
S	S	CC	CC	CC	A	P	CC	CCL	CC
CCL	CC	P	P	P	CCL	P	S	P	CC
CC	P	CCL	CC	CC	P	CC	P	CC	A

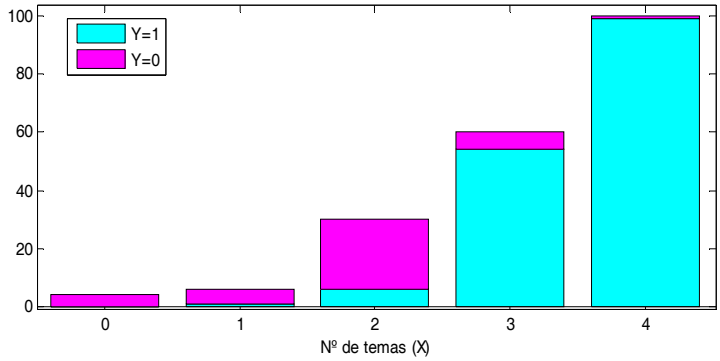
Marca	n_i	f_i
Coca Cola	19	0,38
Coca Cola Light	8	0,16
Dr. Pepper	5	0,10
Pepsi Cola	13	0,26
Sprite	5	0,10
	50	1





Actividades propuestas

9. Si queremos representar conjuntamente valores de la variable correspondientes a diferentes períodos de tiempo, o a distintas cualidades, para comparar situaciones podemos construir un diagrama de barras apiladas. ¿Podrías interpretar este gráfico correspondiente al número de temas que los alumnos de una asignatura de 4º ESO llevan estudiados? Se toma información en dos clases de un instituto (azul y rosa).



Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

10. El sexo de 18 bebés nacidos en un hospital de Madrid ha sido:

H	M	H	H	M	H
H	M	M	H	M	H
M	M	H	H	M	H

Construye la tabla asociada a estos datos y represéntalos.

11. Representa los valores de la variable de la tabla adjunta con el gráfico adecuado correspondientes a una encuesta realizada sobre el sector al que pertenecen un grupo de trabajadores madrileños.

SECTOR	INDUSTRIAL	AGRARIO	SERVICIOS	OTROS
% TRABAJADORES	20	16	45	19

4.2. Histogramas

La representación más utilizada en variables cuantitativas continuas es el **histograma**.

En el eje de abscisas se colocan los diferentes intervalos en los que se agrupan las observaciones de la variable. Sobre estos intervalos, se levantan rectángulos cuya **área** es proporcional a la frecuencia observada en cada uno de ellos.

En el caso que todos los intervalos tengan la misma amplitud basta con que la altura de los rectángulos sea proporcional a la frecuencia.

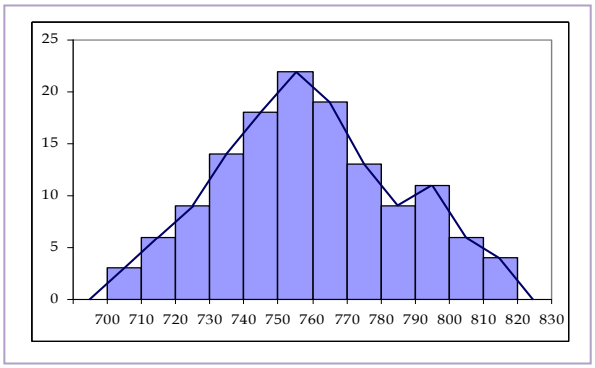
Dependiendo de las frecuencias que se utilicen, se tratará de un histograma de frecuencias relativas, o bien de un histograma de frecuencias absolutas.

En ocasiones, se unen los puntos medios de los segmentos superiores de los rectángulos, obteniéndose de este modo el **polígono de frecuencias**, ya sean absolutas o relativas. Estos polígonos se construyen utilizando un intervalo anterior al primero (de la misma longitud que éste) y otro posterior al último (de su misma longitud). De esta manera, los polígonos delimitan un área cerrada.

En ambos casos, también se pueden utilizar las frecuencias acumuladas para construir los respectivos histogramas. Estos histogramas también llevan asociados los correspondientes polígonos de frecuencias, que en este caso se construyen uniendo los vértices superiores derechos de cada uno de los intervalos.

Ejemplo:

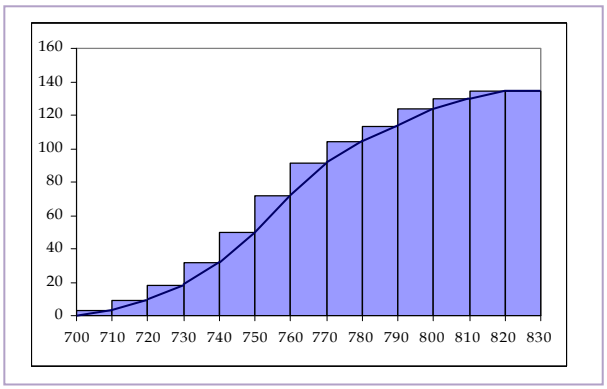
- Se ha representado gráficamente la información obtenida a partir de las emisiones específicas de CO_2 de una central de carbón (kg/megavatio-hora) a partir de un histograma y un polígono de frecuencias absolutas.



Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- Se ha representado gráficamente la información obtenida a partir de las emisiones específicas de CO_2 de una central de carbón (kg/megavatio-hora) a partir de un histograma y un polígono de frecuencias acumuladas absolutas.

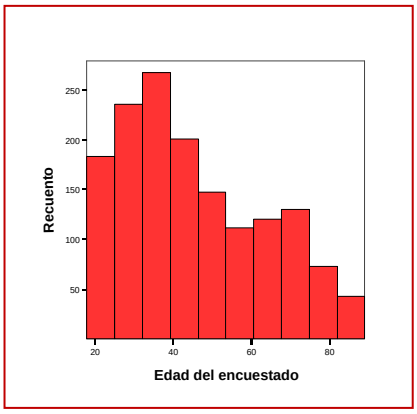


Actividades propuestas

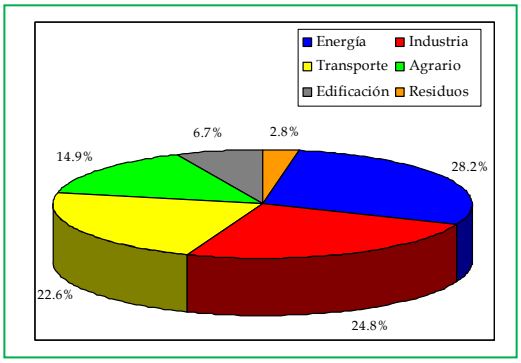
12. Completa la tabla de frecuencias para poder representar la información mediante el histograma de frecuencias acumuladas:

EDAD	[15, 25)	[25, 35)	[35, 45)	[45, 55)
NÚMERO DE PERSONAS	25	45	55	65

13. ¿A qué representación gráficas corresponden el siguiente gráfico correspondiente a la información recogida sobre la edad de 100 personas? ¿Por qué crees que se ha utilizado este y no otro?



4.3. Diagrama de sectores



En el **diagrama de sectores** se colocan las modalidades del atributo (variable cualitativa) o valores de una variable cuantitativa discreta en un círculo, asignando a cada uno un sector del círculo de **ángulo proporcional a su frecuencia**. No resuelta muy operativo cuando la variable tiene demasiadas categorías.

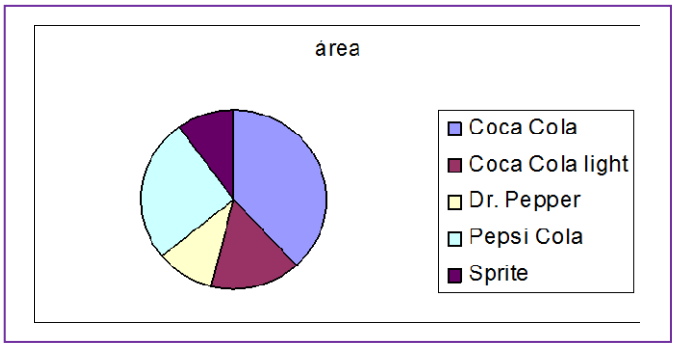
Ejemplo:

De la misma manera podemos recoger la información obtenida de emisiones de gases de efecto invernadero en España en el periodo 1999-2012 (%)

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- Dada la información correspondiente a las preferencias de 50 adolescentes americanos respecto a la marca de refresco que consumen de la actividad resuelta del apartado 3.1. realizar el gráfico de sectores.



Actividades propuestas

14. De los 100 asistentes a una boda, el 34 % comió ternera de segundo plato, 25 % pato, 24 % cordero y el resto pescado.

a) Organiza la información anterior en una tabla de frecuencias y representa los datos en un gráfico de sectores.

b) Realiza un diagrama de barras y explica cómo lo haces. ¿Cuál de los dos gráficos prefieres? ¿Por qué?

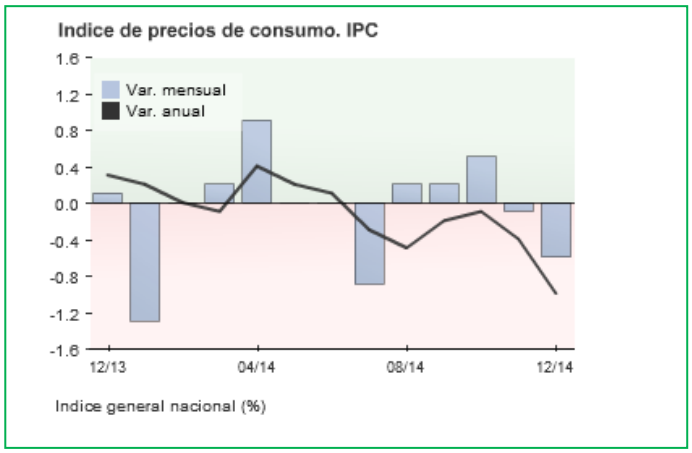
15. Se ha recogido información sobre el contenido de sales minerales de 24 botellas de agua de un grupo de escolares en una excursión tal que:

45	45	65	56	33	65	23	23
34	23	43	67	22	43	34	23
12	34	45	34	19	34	23	43

a) Clasifica la variable estadística estudiada
b) ¿Sería conveniente tomar o no intervalos al hacer una tabla de frecuencias?
c) Realiza el gráfico que consideres más oportuno.

4.3. Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias

Los medios de comunicación recurren con frecuencia a tablas y gráficas que ayuden a una más fácil interpretación de los datos por parte del público en general. Un caso puede ser el siguiente grafico que presenta el Instituto Nacional de Estadística (INE), que representa el índice de los precios al consumo.



No obstante, no es raro observar cómo se utilizan unos mismos datos estadísticos para obtener conclusiones distintas.

- Una subida de precios o del índice de paro puede parecer más o menos acentuada según quién

presente la información
- Un índice de audiencia o el colesterol de un determinado alimento pueden parecer más o menos altos según con qué se lo compare
- Las llamadas telefónicas parecen ser más baratas en una compañía que en otra.

La lista de ejemplos es interminable.

De este modo, la Estadística, además del papel instrumental que hemos presentado hasta ahora, tiene un importante papel en el desarrollo del pensamiento crítico que nos mantendrá atentos a estos excesos.

Los errores más frecuentes, aunque a veces no se trata de errores, sino de manipulaciones tendenciosas, son los siguientes:

- Errores en la obtención de datos
- Limitaciones humanas o de los instrumentos: es imposible, por ejemplo, medir el peso o la estatura de una persona con infinita precisión. Pero incluso en estudios exhaustivos, como los censos, se estiman los errores de muestreo.
- Cuestionarios mal planteados: si no se recogen todas las posibles respuestas, si la pregunta influye en la respuesta, si las preguntas contienen juicios de valor o si las diferentes opciones de respuesta no son equilibradas (por ejemplo: sí, a veces, no). El conjunto de respuestas posibles puede hacer que haya duplicaciones u omisiones. Incurrir en este error, deliberadamente o no, deja a individuos de la población sin representación entre las respuestas y, por lo tanto, los resultados que salgan del estudio estarán sesgados. Las modalidades de la variable deben ser incompatibles y exhaustivas (por ejemplo: si preguntamos por el color favorito y ofrecemos como posibles respuestas "Rojo", "Azul" o "Amarillo", dejamos sin poder responder a quienes quieren escoger otro color; si no estamos interesados en otros colores, podemos incluir un apartado llamado "Otro").
- Delimitación imprecisa de la población: Por ejemplo, si se desea estudiar si los niños madrileños ven demasiado la televisión, habrá que dejar claro qué edades en concreto se considerarán, si entendemos por madrileño a cualquier residente o sólo a los nacidos en Madrid, etc.
- Selección de la muestra inapropiada o no representativa: la muestra no representa a la población. La elección de los individuos concretos que forman parte de la muestra debe hacerse de forma aleatoria. Por ejemplo: si estudiamos los gustos televisivos de los adolescentes de un instituto y pensamos que estos gustos pueden variar en función de la edad, en la selección de la muestra deben escogerse edades variadas, a poder ser, en la misma proporción en la que se presentan en el instituto.
- Errores en las tablas: los datos no están ordenados, evitar ambigüedades en los extremos de los intervalos para variables continuas, etc.
- Errores en las gráficas: en los diagramas de barras falta el origen, están truncados o en la escala en los ejes, etc. Hay que dejar claras las variables que se miden.
- Errores en los parámetros de medida: por ejemplo la media no es representativa (poblaciones heterogéneas) o se ve afectada por valores muy grandes; confusión entre media y mediana.
- Errores en los pictogramas con superficies donde se inscriben proporcionales al cuadrado de las frecuencias.

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

5. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

5.1. Medidas de tamaño

Las medidas de tendencia central o de centralización son las que, intuitivamente, aparecen en primer lugar al intentar describir una población o muestra.

Se pueden dividir en tres clases: **medidas de tamaño, de frecuencia y de posición**.

En lo que sigue, supondremos que estamos analizando una población de la que se toma una muestra de tamaño *N*, es decir, que está compuesta por *N* individuos (u observaciones), de los cuales se desea estudiar la variable *X*, lo que da lugar a la obtención de *N* valores que se representan por $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Estos valores no se suponen ordenados, sino que el subíndice indica el orden en el que han sido seleccionados.

Las medidas de tamaño se definen a partir de los valores de la muestra, así como de su frecuencia.

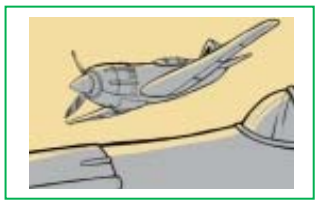
Definimos así la **media aritmética** o **promedio** o, simplemente, **media** como:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} [x_i]}{N}$$

Se puede interpretar como el centro de masas de las observaciones de la muestra. Dentro de sus ventajas se pueden destacar que utiliza todas las observaciones, que son fácilmente calculables, tienen una interpretación sencilla y buenas propiedades matemáticas. Su inconveniente es que se puede ver afectada por los valores anormalmente pequeños o grandes que existan en la población o muestra (denominados *outliers*).

En el caso que tengamos una variable cuantitativa agrupada en intervalos el valor de la variable *X* que representa al intervalo para poder calcular la media aritmética es la **marca de clase** y se calcula como la semisuma de los valores extremos del intervalo.

Ejemplo:



- Se recoge la información referida al número de horas de vuelo diarias de 20 azafatas. Si la media es igual a 4'1, esto indica que, por término medio, el número de horas de vuelo es 4'1.

Ejemplo:

- De la misma manera si recogemos la información sobre la edad media de tu clase obtendremos un valor entre 15 y 16 años. La edad media será por ejemplo 15'4, valor teórico, que puede no coincidir con ninguno de los valores reales.

Actividades resueltas

- Un fabricante de helados está realizando un control de calidad sobre ciertas máquinas respecto a su capacidad de regular la temperatura de refrigeración. Para ello, selecciona una muestra de *N* = 16 máquinas de la fábrica y mide con precisión el valor de su capacidad (en la unidad de medida μF), obteniendo los siguientes resultados: 20'5, 19'8, 19'6, 19'2,

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

23’5, 28’9, 19’9, 19’2, 20’1, 18’8, 19’5, 20’2, 18’6, 19’7, 22’1, 19’3. Utilizando estos valores de capacidad, obtener la media aritmética.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N}[x_i]}{N} = \frac{20.5+19.8+19.6+19.2+23.5+28.9+19.9+19.2+20.1+18.8+19.5+20.2+18.6+19.7+22.1+19.3}{16} = \mathbf{20.56} \quad \mu\mathbf{F}$$

Actividades propuestas

16. Una persona ingresa 10.000 euros en un fondo de inversión el 1 de enero de 2009. Las rentabilidades anuales del fondo durante los años siguientes fueron los siguientes:

Año	2009	2010	2011	2012
Rentabilidades (%)	5	3	–1	4

Si no ha retirado el capital, ¿cuál ha sido la rentabilidad media de dicho fondo durante estos años?

17. Interpreta los valores de la variable de esta tabla que representa el peso de 100.000 bombonas de butano de una fábrica, en kilogramos. ¿Qué grafico utilizarías? Calcula la media e interprétala.

Peso [)	**f_i %**	**n_i**	**N_i**
14’5-15	0’3	300	300
15-15’5	1’6	1600	1900
15’5-16	7’4	7400	9300
16-16’5	21’5	21500	30800
16’5-17	30’5	30500	61300
17-17’5	24’5	24500	85800
17’5-18	10’7	10700	96500
18-18’5	21’5	21500	30800

5.2. Medidas de frecuencia

Se definen teniendo en cuenta únicamente la frecuencia de los valores de la variable de la muestra.

La **moda** (*Mo*) se define como el valor de la variable que se ha obtenido con mayor frecuencia. Puede haber más de una moda.

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

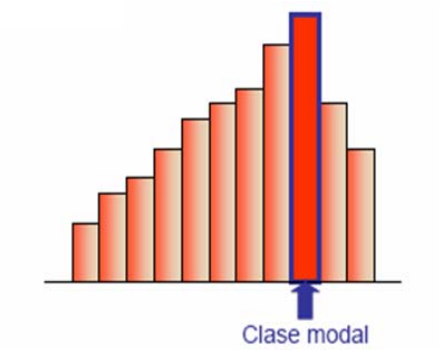
Se realiza un estudio entre 200 espectadores a un musical en Madrid para determinar el grado de satisfacción, obteniéndose los siguientes resultados:

Opinión	Muy bueno	Bueno	Regular	Malo	Muy malo
%	75	25	45	15	40

La modalidad que más se repite es "muy bueno", por lo que la moda es Mo = Muy bueno.

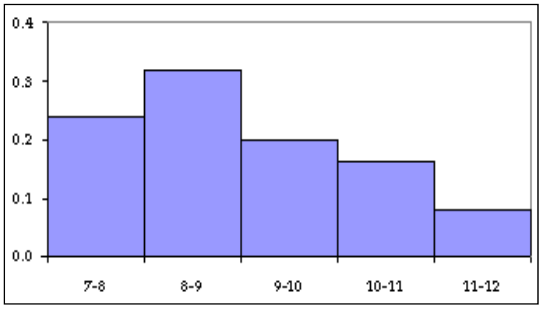
Ejemplo:

En el caso que la distribución esté agrupada en intervalos habrá que identificar la clase modal, es decir, el intervalo donde hay mayor número de valores de la variable.



Actividades resueltas

- A partir de la tabla de frecuencias del espesor de latas de refresco, podemos dibujar sus histogramas de frecuencias relativas y determinar dónde está su moda. Es decir en el intervalo [8 - 9). La moda señala que lo más frecuente es tener un espesor entre 8 y 9 mm.



Actividades propuestas

18. Obtener la media y la moda de los siguientes valores de la variable referidos al resultado de lanzar un dado 50 veces.

1	2	3	2	3	4	3	3	3	5
5	5	5	6	5	6	5	6	4	4
3	2	1	2	3	4	5	6	5	4
3	2	3	4	5	6	5	4	3	2
3	4	5	5	5	5	6	6	6	3

19. Realizar la actividad anterior pero agrupando en intervalos de amplitud 2, empezando en 0. ¿Obtienes los mismos resultados? ¿Por qué?

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

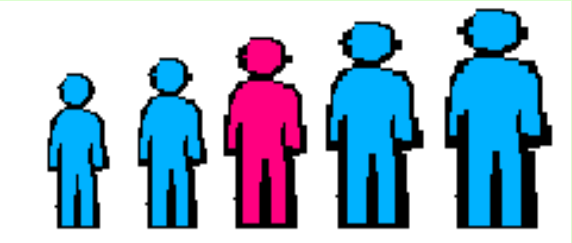
5.3. Medidas de posición

Se definen a partir de la posición de los valores de la muestra.

En general, se conocen con el nombre de **centiles** o **percentiles**.

Si reordenamos en orden creciente los valores tomados de la muestra y los denotamos por $x_{\{1\}}$, $x_{\{2\}}$,…, $x_{\{N\}}$ se pueden definir las siguientes medidas de posición:

- ✓ La ***mediana*** *Me* es un valor tal que el 50 % de las observaciones son inferiores a él. No tiene por qué ser único y puede ser un valor no observado.



Altura mediana

- ✓ Los ***cuartiles*** (o cuartilas) Q_1, Q_2 y Q_3 son los valores tales que el 25 %, 50 % y 75 % (respectivamente) de los valores de la variable son inferiores a él.
- ✓ Los ***deciles*** D_1, D_2,…, D_9 son los valores tales que el 10 %, 20 %, …, 90 % (respectivamente) de los valores de la variable son inferiores a él.

En general, se define el **percentil** o **centil** del *k* % (siendo $0 \le k \le 100$) como el valor tal que el *k* % de las observaciones son inferiores a él.

La mediana y el resto de medidas de posición tienen como principal ventaja su fácil interpretación y su robustez (no se ven afectadas por observaciones extremas).

Ejemplo:

- Calcula los cuartiles y el percentil 65 de los siguientes valores de la variable referidos al número de hijos de las familias de un bloque de edificios de la localidad de Madrid:

Número de hijos	f_i	F_i
1	11	11
2	27	38
3	4	42
4	18	60
Total	60	

Para hallar el primer cuartil calculamos el 25 % del total muestral *N* = 60, es decir, 60·0'25 = 15. Así, el primer cuartil tiene 15 valores de la variable menores y el resto mayores. En la columna de frecuencias acumuladas, el primer número mayor o igual que 15 es 38, que corresponde al valor de la variable 2. Por tanto el primer cuartil es 2 (o con mejor aproximación un valor entre 1 y 2). De la misma forma el 50 % de 60 es 30, es decir el cuartil 2 (Mediana) sería también 2 (o de nuevo, un valor entre 1 y 2). El

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

75% de 60 sería 45 y de esta forma el cuartil 3 sería 4 (o un valor entre 3 y 4) puesto que el valor mayor a 45 es 60, que corresponde al valor 4 de la variable objeto de estudio. Por último, el percentil 65 corresponde al valor 3 ya que 65 % de 60 es igual a 39 y el valor mayor que 39 es 42.

Resumen:

25 % de 60 = 15 → 38 > 15 > 11 → $Q_1 = 2$

50 % de 60 = 30 → 38 > 30 > 11 → Me = $Q_2 = 2$

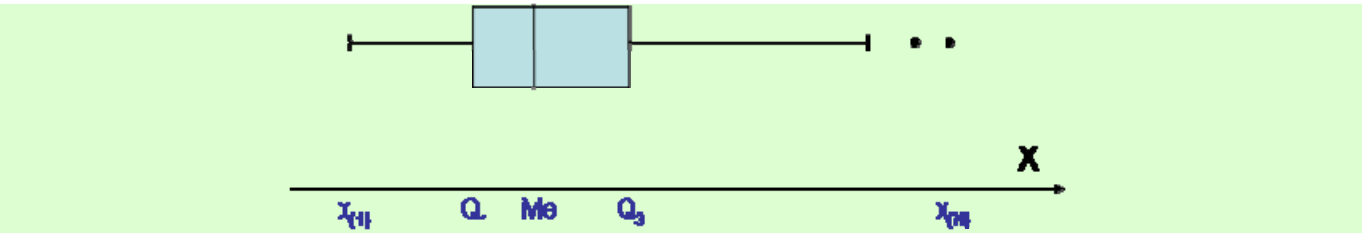
75 % de 60 = 45 → 60 > 45 > 42 → $Q_3 = 4$

65 % de 60 = 39 → 42 > 39 > 38 → $P_{65} = 3$

Las medidas de posición nos permiten realizar otro tipo de gráfico estadístico que se llama el ***gráfico de caja***.

Para realizar este gráfico, se construye una *caja* (ya sea horizontal o vertical), cuyos lados coinciden con el *primer y tercer cuartil* Q_1 y Q_3. Por lo tanto, la caja abarca el 50 % de las observaciones realizadas. Dentro de dicha caja, se incluye un segmento (o bien un punto) que corresponde a la *mediana*.

De cada lado de la caja parte un segmento que se extiende hasta los valores correspondientes a las observaciones *mínima* y *máxima* $x_{\{1\}}$ y $x_{\{N\}}$.



Actividades resueltas

- Se está realizando un control de calidad sobre los fallos de unas determinadas máquinas. Para ello, se contabilizan los fallos de *N* = 13 máquinas durante un mes, obteniendo los siguientes números de fallos: 2, 5, 3, 2, 0, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 0, 2. Utilizando estos valores obtener las medidas de tendencia central y resumir en una tabla de frecuencias la información obtenida del número de fallos mensuales de las máquinas, obteniendo la media aritmética de otra manera.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N}[x_i]}{N} = \frac{2+5+3+2+0+4+1+7+4+2+1+0+2}{13} = \mathbf{2.54} \quad \textbf{fallos/mes}$$

$$Mo = \mathbf{2} \quad \textbf{fallos/mes}$$

$$Q_1 = x_{\{4\}} = \mathbf{1} \quad \textbf{fallo/mes}$$

$$Q_3 = x_{\{10\}} = \mathbf{4} \quad \textbf{fallos/mes}$$

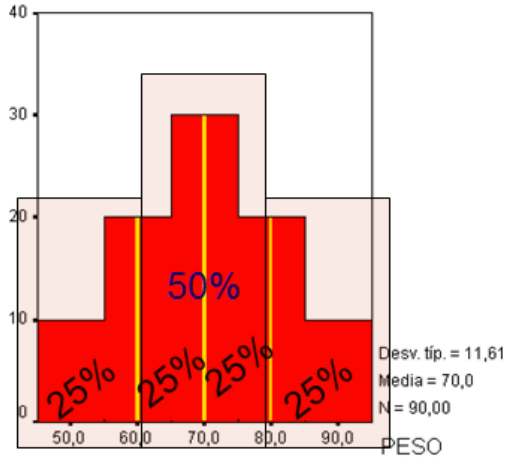
Valores	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia absoluta	2	2	4	1	2	1	0	1
Frecuencia relativa	0’154	0’154	0’307	0’077	0’154	0’077	0	0’077
Frecuencia relativa acumulada	0’154	0’308	0’615	0’692	0’846	0’923	0’923	1

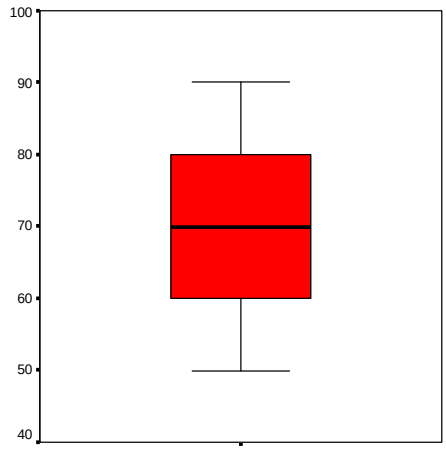
$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k}[f_i \cdot x_i] = 0.154\cdot 0 + 0.154\cdot 1 + 0.307\cdot 2 + 0.077\cdot 3 + 0.154\cdot 4 + 0.077\cdot 5 + 0.077\cdot 7 = \mathbf{2.54} \quad \textbf{fallos/mes}$$

- Se recoge información sobre el peso de 90 chicos en una clase de Matemáticas. Determinar los

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

centiles que nos permiten realizar el gráfico de caja.





– Primer cuartil = percentil 25 = 60 Kg.

– Tercer cuartil= percentil 75= 80 kg.

Actividades propuestas

20. Dibujar un diagrama de caja conociendo los siguientes datos.
Mínimo valor = 2; cuartil 1 = 3; mediana = 6; cuartil 3 = 7; máximo valor = 12.

21. Un corredor de maratón entrena, de lunes a viernes recorriendo las siguientes distancias: 2, 3, 3, 6 y 4, respectivamente. Si el sábado también entrena:

a) ¿Cuántos kilómetros debe recorrer para que la media sea la misma?

b) ¿Y para que la mediana no varíe?

c) ¿Y para que la moda no varíe?

22. EL salario mensual en euros de los 6 trabajadores de una empresa textil es el que se presenta. ¿Cuál de los tres tipos de medidas de tendencia central describe mejor los sueldos de la empresa?

1700	1400	1700	1155	1340	4565

23. ¿Qué valor o valores podríamos añadir a este conjunto de valores de la variable para que la mediana siga siendo la misma?

12	19	24	23	23	15	21	32	12	6	32	12	12	21

24. Salen 25 plazas para un puesto de auxiliar de enfermería y se presentan 200 personas con las siguientes notas.

notas	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	6	34	25	56	29	10	30	10

a) ¿Con qué nota se obtiene una de las plazas mediante el examen?

b) ¿Qué percentil es la nota 5?

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

6. MEDIDAS DE DISPERSIÓN

6.1. Medidas de desviaciones

Las medidas de tendencia central resultan insuficientes a la hora de describir una muestra. Además de las tendencias, es necesario disponer de medidas sobre la variabilidad de los datos. Dentro de estas medidas, vamos a estudiar las medidas de desviaciones y los rangos.

Las medidas de desviaciones recogen las desviaciones de los valores de la variable respecto de una medida de tendencia central.

La ***varianza*** se define como:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left[\left(x_i - \bar{x}\right)^2\right]}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2}}{N} - \bar{x}^2$$

Sus principales ventajas son su manejabilidad matemática y que utiliza todas las observaciones. Sus principales inconvenientes son el ser muy sensible a observaciones extremas y que su unidad es el cuadrado de la unidad original de la muestra.

La **desviación típica** es la raíz cuadrada de la varianza y tiene la principal ventaja de que utiliza las mismas unidades que los valores de la variable originales.

Observa que la desviación típica es una distancia, la distancia de los valores de la variable a la media. Recuerda que la raíz cuadrada es siempre un número positivo.

Asociado a la media y la desviación típica, se define el **coeficiente de variación**, definido en muestras con media distinta de cero como:

$$g = \frac{s}{|\bar{x}|}$$

Este coeficiente es adimensional (no tiene unidades y se suele expresar en porcentaje), lo que resulta una gran ventaja, ya que permite comparar la variabilidad de distintas muestras, independientemente de sus unidades de medida. Algunos autores definen este coeficiente utilizando la media en el denominador, en lugar de su valor absoluto. Valores del coeficiente de variación mayores del 100 % indican que la media no se puede considerar representativa del conjunto de valores de la variable.

Ejemplo:

- La nota media de 6 alumnos de una misma clase de 4º ESO en Matemáticas es de 5. Si la varianza es 0’4, la desviación típica será de 0’632, por tanto la media es bastante homogénea en la distribución. Las notas que se han obtenido están situadas alrededor de la nota media 5.

Actividades resueltas

- El propietario de una instalación mixta solar-eólica está realizando un estudio del volumen de energía que es capaz de producir la instalación. Para ello, mide dicha energía a lo largo de un total de *N* = 16 días que considera suficientemente representativos. La energía (en kilovatio, KWh) producida en dichos días por dos instalaciones se encuentra recogida en la siguiente tabla:

Generación solar	13’1	10’5	4’1	14’8	19’5	11’9	18	8’6
Generación eólica	8’5	14’3	24’7	4	2’3	6’4	3’6	9’2
Generación solar	5’7	15’9	11’2	6’8	14’2	8’2	2’6	9’7
Generación eólica	13’5	1’4	7’6	12’8	10’3	16’5	21’4	10’9

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Utilizando estos valores de la variable calcula las medidas de dispersión estudiadas, comparando los resultados en las dos instalaciones

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{13'1+10'5+4'1+14'8+19'5+11'9+18+8'6+5'7+15'9+11'2+6'8+14'2+8'2+2'6+9'7}{16} = 10'925 \text{ Kwh}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N} = \frac{8'5+14'3+24'7+4+2'3+6'4+3'6+9'2+13'5+1'4+7'6+12'8+10'3+16'5+21'4+10'9}{16} = 10'463 \text{ Kwh}$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{13'1^2+10'5^2+4'1^2+14'8^2+19'5^2+11'9^2+18^2+8'6^2+5'7^2+15'9^2+11'2^2+6'8^2+14'2^2+8'2^2+2'6^2+9'7^2}{16} = \frac{141'5}{16} - 10'9^2 = 22'16$$

$$s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i^2}{N} - \bar{y}^2 = \frac{8'5^2+14'3^2+24'7^2+4^2+2'3^2+6'4^2+3'6^2+9'2^2+13'5^2+1'4^2+7'6^2+12'8^2+10'3^2+16'5^2+21'4^2+10'9^2}{16} = \frac{150'48}{16} - 10'5^2 = 41'01$$

$$g_x = \frac{s_x}{|\bar{x}|} = \frac{\sqrt{22'16}}{10'9} = \frac{4'7}{10'9} = 0'43$$

$$g_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{\sqrt{41'01}}{10'5} = \frac{6'4}{10'5} = 0'61$$

La media de la primera instalación es más representativa que la media de la segunda puesto que el coeficiente de variación es menor en la primera. Los datos están menos agrupados en la segunda de las instalaciones. Su desviación típica es mucho mayor.

- Se está realizando un control de calidad sobre los fallos de unas determinadas máquinas. Para ello, se contabilizan los fallos de N = 13 máquinas durante un mes, obteniendo los siguientes números de fallos. Utilizando estos valores presentados en la tabla de frecuencias obtener las medidas de dispersión estudiadas.

Valores	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia absoluta	2	2	4	1	2	1	0	1
Frecuencia relativa	0’154	0’154	0’307	0’077	0’154	0’077	0	0’077
Frecuencia relativa acumulada	0’154	0’308	0’615	0’692	0’846	0’923	0’923	1

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} [x_i]}{N} = \frac{2+5+3+2+0+4+1+7+4+2+1+0+2}{13} = \mathbf{2.54} \quad \textbf{fallos/mes}$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^{k} \left[f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2 \right] = 0.154 \cdot (-2.54)^2 + 0.154 \cdot (-1.54)^2 + 0.307 \cdot (-0.54)^2 + 0.077 \cdot 0.46^2 + 0.154 \cdot 1.46^2 +$$

$$+ 0.077 \cdot 2.46^2 + 0.077 \cdot 4.46^2 = \mathbf{3.80} \quad (\textbf{fallos/mes})^2$$

Otra forma de realizar estos mismos cálculos es:

									Suma
Valores	0	1	2	3	4	5	6	7	
Frecuencia absoluta	2	2	4	1	2	1	0	1	13
x_i^2	0	1	4	9	16	25	36	49	
x_i^2·Fr. Abs.	0	2	16	9	32	25	0	49	133

Aplicamos la fórmula: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \bar{x}^2$ y obtenemos que

s^2 = 133/13 – 2’54^2 = 10’23 – 6’45 = 3’80, por lo que s = 1’95.

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

25. Un grupo de perros pastor alemán tiene una media de 70 kg y desviación típica 2 kg. Un conjunto de perros caniche tiene una media de 15 kg y desviación típica 2 kg. Compara ambos grupos.

26. El tiempo, en minutos, que un conjunto de estudiantes de 4º ESO dedica a preparar un examen de Matemáticas es:

234	345	345	123	234	234	556
234	234	345	223	167	199	490

Las calificaciones de ese conjunto de estudiantes son las siguientes:

4	5	6	7	6	5	8
9	8	7	8	7	6	8

a) ¿Qué tendremos que hacer para comparar su variabilidad? b) ¿En qué conjunto los valores de la variable están más dispersos? c) ¿Es la media siempre mayor que la desviación típica?

6.2. Los rangos

Estas medidas proporcionan información acerca del intervalo total de valores que toma la muestra analizada.

El **rango total** o **recorrido** es la diferencia entre los valores máximos y mínimos que toma la variable en la muestra:

$$R = x_{\{N\}} - x_{\{1\}}$$

El **recorrido intercuartílico** es la diferencia entre el tercer y el primer cuartil:

$$R_I = Q_3 - Q_1$$

Ejemplo:

- Se está realizando un control de calidad sobre los fallos de una determinada máquina. Para ello, se contabilizan los fallos de N = 13 máquinas durante un mes, obteniendo los siguientes números de fallos: 2, 5, 3, 2, 0, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 0, 2. Utilizando estos valores obtenemos el rango total igual a 7 y el recorrido intercuartílico igual a 3.

Actividades resueltas

- Salen 25 plazas para un puesto de cajero en un supermercado y se presentan 200 personas. La siguiente información recoge las notas de un test de conocimientos básicos.

notas	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	6	4	30	25	56	29	10	30	10

Calcula el rango total de la variable objeto de estudio.

Actividades propuestas

27. Se ha recogido una muestra de 20 recipientes cuyos diámetros son:

0’91	1’04	1’01	1	0’77	0’78	1	1’3	1’02	1
1	0’88	1’26	0’92	0’98	0’78	0’82	1’2	1’16	1’14

a) Calcula todas las medidas de dispersión que conozcas.

b) ¿A partir de qué valor de diámetro de los recipientes se consideran el 20 % con mayor diámetro?

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

7. DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES

Este apartado se centra en el análisis de datos bidimensional, en el que son dos las variables de interés. De este modo, cuando se está analizando una población y se selecciona una muestra, para cada individuo se toman dos valores, correspondientes a dos características (o variables) distintas. En este sentido, puede ser interesante considerar simultáneamente los dos caracteres a fin de estudiar las posibles relaciones entre ellos.

7.1. Tablas de frecuencia de una variable bidimensional

Cuando se quieren resumir los resultados de una muestra bidimensional utilizando una tabla de frecuencias (ya sea por tratarse de una variable discreta, o porque se deseen agrupar las observaciones de una variable continua), es preciso utilizar lo que se denomina *tabla de doble entrada* (o bidimensional). Sean $x_1, x_2,\ldots, x_k$ las modalidades de la primera variable e $y_1, y_2,\ldots, y_p$ las de la segunda. Estas modalidades pueden corresponder tanto a los valores que se dan en la muestra (si la variable es discreta), como a las marcas de clase de los intervalos utilizados (si la variable es continua). Para construir la tabla de frecuencias, se utilizan las frecuencias absolutas n_{ij} correspondientes a las observaciones que toman simultáneamente valores correspondientes a las clases x_i e y_j. Obviamente, se ha de verificar que:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\left[n_{ij}\right]=N$$

Con esto, la tabla de frecuencias absolutas se presenta como:

	y_1	y_2	……	y_p	$n_{i\cdot}$
x_1	n_{11}	n_{12}	……	n_{1p}	$n_{1\cdot}$
x_2	n_{21}	n_{22}	……	n_{2p}	$n_{2\cdot}$
……	……	……	……	……	……
x_k	n_{k1}	n_{k2}	……	n_{kp}	$n_{k\cdot}$
$n_{\cdot j}$	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	……	$n_{\cdot p}$	N

Los valores $n_{i\cdot}$ recogen las frecuencias absolutas de la clase x_i, mientras que n_j es la suma de frecuencias absolutas de la clase $y_{j\cdot}$, con lo que se verifica:

$$n_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{p}\left[n_{ij}\right] \qquad n_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{k}\left[n_{ij}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{k}\left[n_{i\cdot}\right]=N \qquad \sum_{j=1}^{p}\left[n_{\cdot j}\right]=N$$

De la misma manera, se puede realizar una tabla de frecuencias relativas f_{ij}, utilizando los cocientes entre las frecuencias absolutas y el número de observaciones:

$$f_{ij}=\frac{n_{ij}}{N}\leq 1$$

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- El propietario de una instalación mixta solar-eólica está realizando un estudio del volumen de energía que es capaz de producir la instalación. Para ello, mide dicha energía a lo largo de un total de *N = 16* días que considera suficientemente representativos. La energía (en *kWh*) producida en dichos días por las instalaciones solar y eólica se pueden resumir en las siguientes tablas de doble entrada de frecuencias absolutas y de frecuencias relativas:

		Energía eólica				
		[0, 6'5]	(6'5, 13]	(13, 19'5]	(19'5, 26]	$n_{i\cdot}$
Energía solar	[0, 5]	0	0	0	2	**2**
	(5, 10]	0	3	2	0	**5**
	(10, 15]	2	3	1	0	**6**
	(15, 20]	3	0	0	0	**3**
	$n_{\cdot j}$	**5**	**6**	**3**	**2**	**16**

		Energía eólica				
		[0, 6'5]	(6'5, 13]	(13, 19'5]	(19'5, 26]	$f_{i\cdot}$
Energía solar	[0,5]	0	0	0	0'125	**0'125**
	(5, 10]	0	0'1875	0'125	0	**0'3125**
	(10, 15]	0'125	0'1875	0'0625	0	**0'375**
	(15, 20]	0'1875	0	0	0	**0'1875**
	$f_{\cdot j}$	**0'3125**	**0'375**	**0'1875**	**0'125**	**1**

7.2. Representación gráfica de una variable bidimensional

Al igual que en el caso de una muestra unidimensional, en numerosas ocasiones resulta interesante realizar una representación gráfica de una muestra bidimensional.

Un modo sencillo de representar una muestra bidimensional es mediante el denominado **diagrama de dispersión** o **nube de puntos**. Esta técnica consiste en representar en el plano (*x, y*) los valores obtenidos en la muestra.

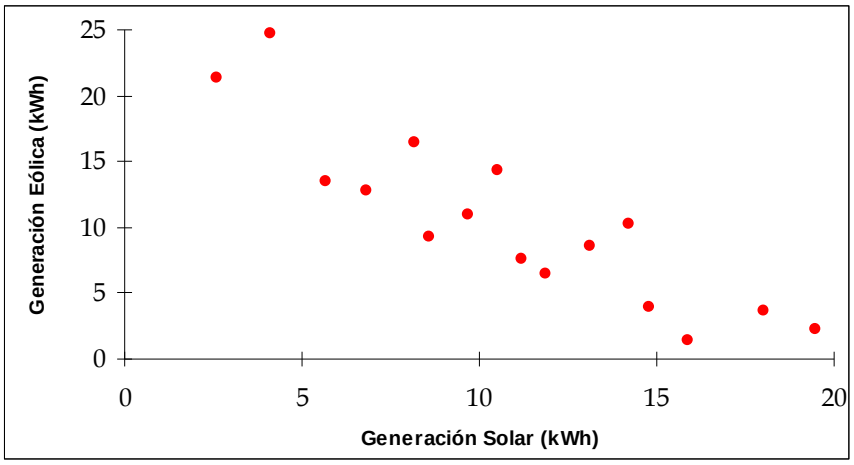


Diagrama de dispersión de la generación solar y eólica (en kWh) de la actividad resuelta

La figura anterior muestra el diagrama de dispersión. Se puede observar la existencia de una dependencia inversa.

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

7.3. Medidas en una variable bidimensional. Coeficiente de correlación

Cuando se está analizando una muestra bidimensional, se pueden calcular las medidas que caracterizan a cada una de las variables de la muestra por separado, tal y como se ha descrito anteriormente. Pero en este caso se puede dar un paso más y calcular algunas medidas conjuntas, que tienen en cuenta simultáneamente los valores que toman ambas variables en cada individuo.

Al igual que cuando se analiza una única característica, supondremos que se toma una muestra de tamaño *N* de la población, es decir, que está compuesta por *N* individuos (u observaciones), de los cuales se desea analizar las características (o variables) *X* e *Y*. Esto da lugar a la obtención de *N* valores para cada una de las dos variables: (x_1, y_1), (x_2, y_2),..., (x_N, y_N). De nuevo, estos valores no se suponen ordenados, sino que el subíndice indica el orden en el que han sido seleccionados.

Siguiendo esta notación se pueden formular los cálculos de los momentos respecto al origen y respecto a la media para una variable bidimensional. Definimos, por tanto:

Momentos respecto al origen de orden (*r, s*) como:

$$a_{r,s} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left[x_i^{\,r} \cdot y_i^{\,s}\right]}{N}$$

Observa que los momentos respecto al origen de orden (1, 0) y (0, 1) coinciden con las medias de ambas variables:

$$a_{1,0} = \overline{x} \qquad a_{0,1} = \overline{y}$$

También resulta de interés al momento de orden (1, 1):

$$a_{1,1} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left[x_i \cdot y_i\right]}{N}$$

Análogamente, se pueden definir los momentos respecto a la media de orden (*r, s*):

$$m_{r,s} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left[\left(x_i - \overline{x}\right)^r \cdot \left(y_i - \overline{y}\right)^s\right]}{N}$$

Los momentos respecto a la media de orden (2, 0) y (0, 2) coinciden con las varianzas de ambas variables:

$$m_{2,0} = s_X^{\,2} \qquad m_{0,2} = s_Y^{\,2}$$

El momento respecto a la media de orden (1, 1), que se denomina **covarianza** o momento mixto, es de gran importancia:

$$m_{1,1} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left[\left(x_i - \overline{x}\right) \cdot \left(y_i - \overline{y}\right)\right]}{N}$$

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Alternativamente a la fórmula anterior, la covarianza se puede calcular a partir de los momentos respecto al origen, según la fórmula:

$$m_{1,1} = a_{1,1} - a_{1,0} \cdot a_{0,1} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i \cdot y_i)}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

La covarianza, al igual que la varianza, tiene el inconveniente de que depende de las unidades de la muestra.

Por este motivo, se utiliza el coeficiente de **correlación** lineal de Pearson (que se denota, indistintamente, como ρ o *r*):

$$\rho = r = \frac{m_{1,1}}{s_x \cdot s_y} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i \cdot y_i)}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{s_x \cdot s_y}$$

Este coeficiente tendrá el signo de la covarianza y nos indicará si la dependencia entre las dos variables objeto de estudio son dependientes positiva o negativamente. El coeficiente de correlación (o simplemente correlación) toma un valor comprendido entre –1 y 1. Si la correlación es positiva se dice que existe dependencia directa entre *X* e *Y* (a un aumento de una de las dos variables le corresponde una tendencia al aumento en la otra). En cambio, si la correlación es negativa, se dice que existe una dependencia inversa (a un aumento de una de las dos variables le corresponde una tendencia al decremento en la otra).

Actividades resueltas

- El propietario de una instalación mixta solar-eólica está realizando un estudio del volumen de energía que es capaz de producir la instalación. Para ello, mide dicha energía a lo largo de un total de *N* = 16 días que considera suficientemente representativos. La energía (en kWh) producida en dichos días por las instalaciones solar y eólica se encuentra recogida en la siguiente tabla:

Generación solar (x_i)	13'1	10'5	4'1	14'8	19'5	11'9	18	8'6	5'7	15'9	11'2	6'8	14'2	8'2	2'6	9'7
Generación eólica (y_i)	8'5	14'3	24'7	4	2'3	6'4	3'6	9'2	13'5	1'4	7'6	12'8	10'3	16'5	21'4	10'9

Utilizando estas producciones, vamos a calcular la covarianza y el coeficiente de correlación, denotando a la generación solar como variable ***X*** y la generación eólica como variable ***Y***. Añadimos nuevas filas a nuestra tabla:

Generación solar (x_i)	13'1	10'5	4'1	14'8	19'5	11'9	18	8'6	5'7	15'9	11'2	6'8	14'2	8'2	2'6	9'7
Generación eólica (y_i)	8'5	14'3	24'7	4	2'3	6'4	3'6	9'2	13'5	1'4	7'6	12'8	10'3	16'5	21'4	10'9
x_i^2	171'6	110'3	16'81	219'0	380'3	141'6	324	73'96	32'49	252'8	125'4	46'24	201'6	67'24	6'76	94'09
y_i^2	72'25	204'5	610'1	16	5'29	40'96	12'96	84'64	182'3	1'96	57'76	163'8	106'1	272'3	457'9	118'8
$x_i * y_i$	111'4	150'2	101'3	59'2	44'85	76'16	64'8	79'12	76'95	22'26	85'12	87'04	146'2	135'3	55'64	105'7

Previamente calculamos la media y la desviación típica de cada variable (que ya conocemos de una actividad resuelta anterior). Sumando la primera fila y dividiendo por *N* = 16, obtenemos la media de la Generación Solar en Kwh. Recuerda $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$; por tanto

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{13'1+10'5+4'1+14'8+19'5+11'9+18+8'6+5'7+15'9+11'2+6'8+14'2+8'2+2'6+9'7}{16} = 10'925 \text{ Kwh}$$

Sumando la segunda fila y dividiendo por *N* = 16 obtenemos la media de la Generación Eólica en Kwh:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N} = \frac{8'5+14'3+24'7+4+2'3+6'4+3'6+9'2+13'5+1'4+7'6+12'8+10'3+16'5+21'4+10'9}{16} = 10'463 \text{ Kwh}$$

En la tercera fila hemos calculado los cuadrados de los valores de la primera variable y los utilizamos para calcular la varianza: Recuerda $s_x^{\,2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2}}{N} - \bar{x}^2$; por tanto

$$s_x^{\,2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2}}{N} - \bar{x}^2 = \frac{13'1^2+10'5^2+4'1^2+14'8^2+19'5^2+11'9^2+18^2+8'6^2+5'7^2+15'9^2+11'2^2+6'8^2+14'2^2+8'2^2+2'6^2+9'7^2}{16} = \frac{1415}{16} - 10'9^2 = 22'16$$

En la cuarta fila los cuadrados de los valores de la segunda variable y calculamos su varianza tal que

$$s_y^{\,2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i^{\,2}}{N} - \bar{y}^2 = \frac{8'5^2+14'3^2+24'7^2+4^2+2'3^2+6'4^2+3'6^2+9'2^2+13'5^2+1'4^2+7'6^2+12'8^2+10'3^2+16'5^2+21'4^2+10'9^2}{16} = \frac{150'48}{16} - 10'5^2 = 41'01$$

La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza, por tanto:

$$s_x = \sqrt{22'16} = 4'71 \text{ y } s_y = \sqrt{41'01} = 6'4$$

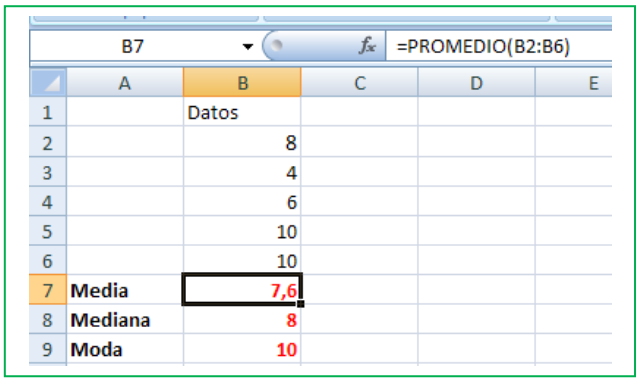
Para calcular el coeficiente de correlación calculamos en la quinta fila los productos de la variable *x* por la variable *y*. Así, 13'1*8'5 = 111'4. Queremos calcula el término: $\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i \cdot y_i)}{N}$. Al sumar obtenemos 1401'2, que dividimos entre 16, le restamos el producto de las medias y dividimos por el producto de las desviaciones típicas:

$$\rho = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i \cdot y_i)}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{s_x \cdot s_y} = \frac{1401'2 - (10'9 \cdot 10'5)}{4'71 \cdot 6'4} = \frac{-26'728}{4'71 \cdot 6'4} = -0'887$$

Este coeficiente de correlación negativo y cercano a –1 nos indica que la relación entre las dos variables es negativa y bastante importante.

Utiliza el ordenador

- *Nieves ha tenido en Matemáticas las siguientes notas: 8, 4, 6, 10 y 10. Calcula su media, su moda y su mediana.*



Para calcular la media, la mediana y la moda con la hoja de cálculo, copiamos en la casilla B2, B3… los datos: 8, 4, 6, 10 y 10. Escribimos en la casilla A7, Media, y para calcular la media escribimos un signo igual en B7. Buscamos, desplegando las posibles funciones, la función PROMEDIO, y escribimos

=PROMEDIO(B2:B6),

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

que significa que calcule la media de los valores que hay en las casillas desde B2 hasta B6.

Del mismo modo calculamos la mediana buscando en las funciones o escribiendo =MEDIANA(B2:B6) y la moda buscando en las funciones o escribiendo =MODA(B2,B6).

	A	B	C	D
1		xi		
2		8		
3		4		
4		6		
5		10		
6		10		
7	MAX	10	Recorrido =	6
8	MIN	4		
9	VARP	5,44		
10	DESVESTP	2,33		
11	CUARTIL 1	6	Intervalo Intercuartil =	
12	CUARTIL 3	10		

Igual que hemos calculado la media, la mediana y la moda, la hoja de cálculo se puede utilizar para obtener:

- El recorrido calculando MAX – MIN → 6.
- La varianza utilizando VARP → 5'44.
- La desviación típica usando DESVESTP →2'33
- Los cuartiles, (CUARTIL), siendo el cuartil 0 el mínimo; el cuartil 1, Q1; el cuartil 2, la mediana; el cuartil 3, Q3; y el cuartil 4, el máximo.
- Q1 = 6.
- Q3 = 10.
- Intervalo intercuartílico = 10 – 6 = 4.

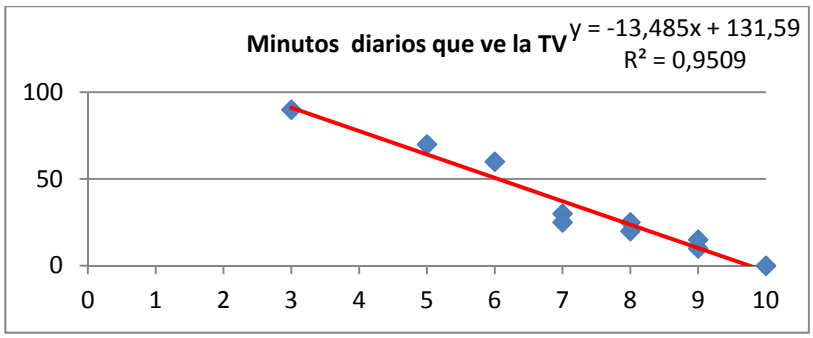
Utiliza el ordenador

- Preguntamos a 10 alumnos de 4º ESO por sus calificaciones en Matemáticas, por el número de minutos diarios que ven la televisión, por el número de horas semanales que dedican al estudio, y por su estatura en centímetros. Los datos se recogen en la tabla adjunta. Queremos dibujar las nubes de puntos que los relacionan con las calificaciones de Matemáticas, el coeficiente de correlación y la recta de regresión.

Calificaciones de Matemáticas	10	3	7	8	5	9	9	8	6	7
Minutos diarios que ve la TV	0	90	30	20	70	10	15	25	60	25
Horas semanales de estudio	15	2	9	12	7	14	13	11	7	8
Estatura (en cm)	177	168	157	159	163	179	180	175	169	170

Para hacerlo, entramos en Excel, y copiamos los datos. Seleccionamos la primera y la segunda fila, luego la primera y la tercera y por último la primera fila y la cuarta.

Con la primera y segunda filas seleccionadas, vamos a *Insertar*, *Dispersión* y elegimos la *nube de puntos*. Podemos conseguir que el eje de abscisas vaya de 0 a 10 en "*Dar formato al eje*". Pinchamos sobre un punto de la nube, y elegimos "*Agregar línea de tendencia*". Para que dibuje el ordenador la recta de regresión la línea de tendencia debe ser *Lineal*. En la pantalla que aparece marcamos la casilla que dice: "*Presentar ecuación en el gráfico*" y la casilla que dice "*Presentar el valor de R cuadrado en el gráfico*".



Observa, la recta de regresión, en color rojo, es decreciente y su ecuación es aproximadamente:

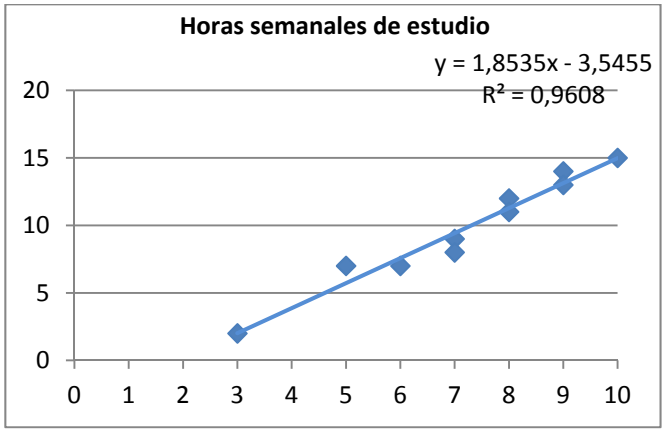
$$y = -13'5\,x + 132.$$

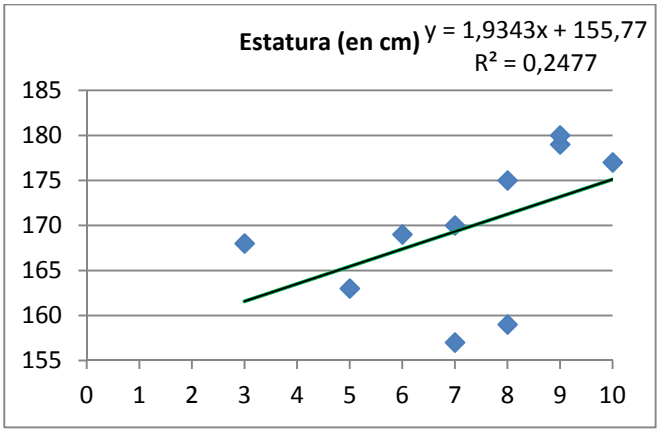
El cuadrado del coeficiente de correlación es $\rho^2 = 0'95$. La correlación es negativa y alta:

$$\rho = \sqrt{0'95} = -0{,}975$$

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Hacemos lo mismo con la primera y tercera fila y con la primera y cuarta fila. Obtenemos los gráficos:





Observa que en ambos casos la pendiente de la recta de regresión es positiva pero en el primero el coeficiente de correlación, positivo, es próximo a 1, $\rho = \sqrt{0'96} = 0{,}98$. La correlación es alta y positiva.

En el segundo $\rho = \sqrt{0'25} = 0{,}5$.

Actividades propuestas

28. Se han medido los pesos y alturas de 6 personas, como muestra de las personas que están en una fila o cola de espera, obteniéndose los siguientes resultados:

Pesos (kg)	65	60	65	63	68	68
Alturas (cm)	170	150	168	170	175	180

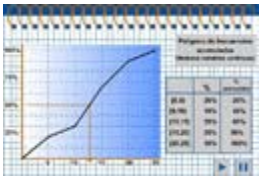
Se pide:

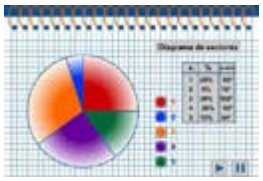
a) Calcular las medias y las varianzas de esos dos conjuntos de datos unidimensionales.
b) ¿Qué medidas están más dispersas, los pesos o las alturas?
c) Representar gráficamente ese conjunto de datos bidimensional. Calcular la covarianza e interpretar su valor.
d) Dar una medida de la correlación entre ambas variables. Interpretar su valor.

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

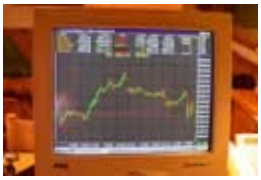
CURIOSIDADES. REVISTA

¿UTILIZAMOS LA ESTADÍSTICA POR ENCIMA DE NUESTRAS POSIBILIDADES?

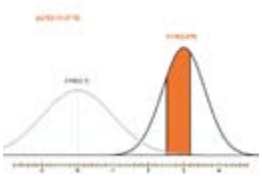




En las últimas décadas el uso de datos estadísticos es una de las principales maneras con las que se presenta información de cualquier tipo, provenga su fuente de los medios de comunicación, a través de mensajes publicitarios o relacionada con trabajos de investigación. Actualmente consumir información se convierte, en muchas ocasiones, entrar en un mundo de números, porcentajes, gráficos, probabilidades, mapas y otros conceptos básicos de esta disciplina que cuesta entender.



"TENGO MIS RESULTADOS HACE TIEMPO, PERO NO SÉ CÓMO LLEGAR A ELLOS"

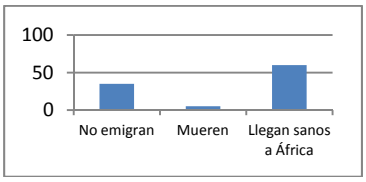
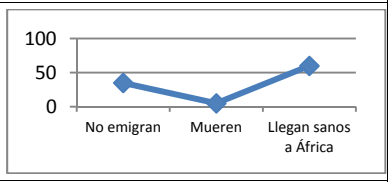


Esta expresiva frase de Gauss -descubridor de la campana que lleva su nombre, y que alude a la distribución normal cuando la cantidad de datos es bastante grande-, es aplicable a muchas de las informaciones erróneas que vemos a diario. Tienen los datos pero no saben cómo llegar al núcleo de su interpretación. Muchas veces cuando un medio de comunicación quiere impresionar mediante un titular sobre la gravedad de una situación que afecta a toda la población, hace uso de números absolutos en lugar de porcentajes.

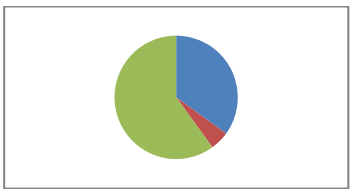
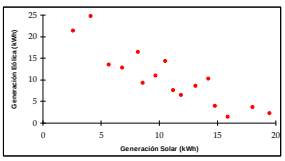
Por ejemplo: Cuando leemos el titular qué duda cabe que todos pensamos que 40 muertos son muchos muertos sean por accidente de tráfico o por otra causa. La argucia está bien pensada para llamar la *atención* del lector, pero informativamente hablando esta presentación de los hechos utilizando números sin compararlos con otros números se merece *"un suspenso"*. Los datos estadísticos no "hablan por sí mismos". Un dato siempre hay que relacionarlo con otros datos para comprender la variabilidad que ha experimentado el caso que estamos analizando. Si la noticia se hubiera acompañado con las estadísticas de muertes por accidente de tráfico de los últimos años en periodos vacacionales de cuatro días, rápidamente el lector se daría cuenta de que no es para alarmarse más que otras veces ya que el número de muertos ni ha subido ni ha bajado, es más o menos el mismo que en cualquier otro puente similar en días. O sea, este "impactante" titular apoyado en datos numéricos, en realidad *ni siquiera es noticia*…

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

		Ejemplos
Población estadística, colectivo o universo	El conjunto de todos los individuos (personas, objetos, animales, etc.) que contengan información sobre el fenómeno que se estudia.	Número de personas en España entre 16-65 años
Muestra	Es un subconjunto representativo que se selecciona de la población y sobre el que se va a realizar el análisis descriptivo. El tamaño de la muestra es el número de sus elementos. Cuando la muestra comprende a todos los elementos de la población, se denomina censo.	Número de personas en un barrio de Madrid entre 16 y 65 años.
Variable observable o estadística *X*	En general, supondremos que se está analizando una determinada población, de la que nos interesa cierta característica que viene dada por la variable *X*.	Las variables que están bajo estudio se pueden clasificar en dos categorías: Variables cualitativas o atributos (datos no métricos) Variables cuantitativas, que tienen un valor numérico.
Frecuencia absoluta	Número de veces que se repite un valor de la variable	Si al tirar un dado hemos obtenido 2 veces el 3, 2 es la frecuencia absoluta de 3.
Frecuencia relativa	Frecuencia absoluta dividido por el número de experimentos	Si se realiza un experimento 500 veces y la frecuencia absoluta de un suceso es 107, la frecuencia relativa es 107/500.
Frecuencia acumulada	Se suman las frecuencias anteriores	
Diagrama de rectángulos o barras	Los valores de la variable se representan mediante rectángulos de igual base y de altura proporcional a la frecuencia. Se indica en el eje horizontal la variable y en el vertical las frecuencias.	
Polígono de frecuencias	De unen los puntos medios superiores de un una diagrama de barras	

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Diagrama de sectores	En un círculo se dibujan sectores de ángulos proporcionales a las frecuencias	
Media aritmética	Es el cociente entre la suma de todos los valores de la variable y el número total de datos.	En los datos 3, 5, 5, 7, 8, la media es: (3 + 5 + 5 + 7 + 8)/5 = 28/5 = 5'6.
Mediana	Deja por debajo la mitad de los valores y por encima la otra mitad	La mediana es 5
Moda	El valor que más se repite.	La moda es 5.
Varianza	Medida de desviación que recoge las desviaciones de los valores de la variable respecto de la media aritmética.	$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left[\left(x_i - \overline{x}\right)^2\right]}{N}$
Desviación típica	La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza	
Coeficiente de variación	Permite comparar la variabilidad de distintas muestras, independientemente de sus unidades de medida.	$g = \frac{s}{\lvert\overline{x}\rvert}$
Rango total o recorrido	Diferencia entre los valores máximos y mínimos que toma la variable en la muestra	$R = x_{\{N\}} - x_{\{1\}}$
Recorrido intercuartílico	Diferencia entre el tercer y el primer cuartil	$R_I = Q_3 - Q_1$
Nube de puntos	Un modo sencillo de representar una muestra bidimensional. Esta técnica consiste en representar en el plano (*x, y*) los valores obtenidos en la muestra.	
Coeficiente de correlación	Nos indica si la dependencia entre dos variables objeto de estudio son dependientes positiva o negativamente.	$\rho = r = \frac{m_{1,1}}{s_x \cdot s_y}$

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Población y muestra. Variables estadísticas. Tablas de frecuencias

1. Se lanza una moneda 700 veces y se obtiene cara 355 veces. Expresa en una tabla las frecuencias absolutas, relativas y calcula también las frecuencias acumuladas absolutas y acumuladas relativas de caras y cruces en este experimento.

2. Se lanzar un dado 500 veces y se obtienen los siguientes resultados:

Resultado	1	2	3	4	5	6
Número de veces	70	81	92	85		81

a) ¿Cuántas veces ha salido el 5?

b) Construir tabla con las frecuencias absolutas y las frecuencias absolutas acumuladas

c) Construir una tabla con las frecuencias relativas y las frecuencias relativas acumuladas

3. Una urna que contiene 10 bolas numeradas del 0 al 9, sacamos una bola, anotamos el número y devolvemos la bola a la urna. Repetimos el experimento 1000 veces y se han obtenido los resultados indicados en la tabla:

Resultado	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frecuencia absoluta	79	102			93	98	104	77		
Frecuencia relativa			0’12	0’13					0’1	
Frecuencia absoluta acumulada	79	181								
Frecuencia relativa acumulada										1

a) ¿Cuál es la frecuencia absoluta de 9?

b) ¿Cuál es la frecuencia absoluta acumulada de 2?

c) ¿Cuál es la frecuencia relativa acumulada de 1?

d) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

4. Pepa ha tirado un dado 25 veces y ha obtenido los siguientes resultados:

1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4

a) Construir una tabla de frecuencias absolutas.

b) Construir una tabla de frecuencias relativas.

c) Dibuja un diagrama de barras.

d) Dibuja un polígono de frecuencias y una representación por sectores.

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

5. En una clase se ha medido el tamaño de las manos de cada uno de los alumnos y alumnas, y el resultado en centímetros ha sido el siguiente:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,

16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,

23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

a) ¿Qué tamaño ha sido el valor mínimo? ¿Y el máximo? ¿Cuál es el rango total de la variable?

b) Construir una tabla de frecuencias absolutas y otra de frecuencias relativas.

c) Construir una tabla de frecuencias absolutas acumuladas y otra de frecuencias relativas acumuladas.

6. Calcula la frecuencia absoluta de los datos de una encuesta en la que se ha elegido entre ver la televisión, t, o leer un libro, l:

t, l, t, t, t, l, t, t, l, t, l, t, l, t, t, t, l, l, t, l, t, l, t, l, t.

7. La duración en minutos de unas llamadas telefónicas ha sido:

7, 3, 6, 3, 7, 5, 4, 3, 5, 7, 10, 1, 9, 12, 2

Construir una tabla de frecuencias absolutas y una tabla de frecuencias relativas.

Gráficos estadísticos

8. Se ha preguntado en un pueblo de la provincia de Madrid el número de hermanos que tenían y se ha obtenido la siguiente tabla de frecuencias absolutas sobre el número de hijos de cada familia:

Número de hijos	1	2	3	4	5	6	7	8 o más
Número de familias	46	249	205	106	46	21	15	6

a) Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias relativas.

b) Haz un diagrama de barras de frecuencias absolutas y otro de frecuencias relativas.

c) Haz un polígono de frecuencias absolutas y otro de frecuencias absolutas acumuladas.

9. Haz una encuesta similar con tus compañeros y compañeras de curso preguntando el número de hermanos y confeccionando una tabla sobre el número de hijos y el número de familias.

a) Construye una tabla de frecuencias relativas

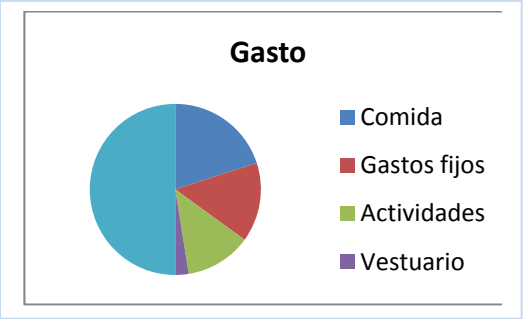
b) Haz un diagrama de barras de frecuencias absolutas y relativas. Completa con un polígono de frecuencias

c) Compara la tabla de frecuencias relativas y el diagrama de barras de frecuencias relativas que obtengas con el obtenido en el ejercicio anterior.

10. Un batido de frutas contiene 25 % de naranja, 15 % de plátano; 50 % de manzana y, el resto de leche. Representa en un diagrama de sectores la composición del batido.

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

11. En un campamento de verano se han gastado diez mil euros. El gráfico muestra la distribución del gasto:



1. Comida: 40 %
2. Limpieza y mantenimiento: 30 %
3. Agua, gas, electricidad y teléfono: 25 %
4. Vestuario: .....

a) ¿Qué porcentaje se gastó en vestuario?

b) ¿Cuántos euros se gastaron en comida?

c) ¿Cuánto mide el ángulo del sector correspondiente a actividades?

12. Busca en revistas o periódicos dos gráficas estadísticas, recórtalas y pégalas en tu cuaderno. En muchas ocasiones estas gráficas tienen errores. Obsérvalas detenidamente y comenta las siguientes cuestiones:

a) ¿Está clara la variable a la que se refiere? ¿Y las frecuencias?

b) ¿Son correctas las unidades? ¿Pueden mejorarse?

c) Comenta las gráficas.

13. Se hace una encuesta sobre el número de veces que van al cine unos jóvenes al mes. Los valores de la variable están en la tabla:

Veces que van al cine	0	1	2	3	4	5
Frecuencia absoluta	1	7	9	5	2	1

a) Representa un diagrama de barras de frecuencias absolutas.

b) Representa un polígono de frecuencias relativas.

c) Representa los valores de la variable en un diagrama de sectores.

14. Se hace un estudio sobre lo que se recicla en una ciudad y se hace una tabla con el peso en porcentaje de los distintos tipos de residuos:

Tipo de residuo	Porcentaje
Orgánico	15
Papel y cartón	1
Vidrio	15
Plástico	1
Pilas	15

a) Construye un diagrama de barras

b) Representa un polígono de frecuencias.

c) Representa los valores de la variable en un diagrama de sectores.

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

15. En un ejercicio anterior se ha tenido el resultado de medir en una clase el tamaño de las manos de cada uno de los alumnos y alumnas, y el resultado en centímetros ha sido el siguiente:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,

16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,

23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

Representa los valores de la variable en un diagrama de barras y en un polígono de frecuencias.

16. El 35 % de las cigüeñas no ha emigrado este año a África y el 6 % murió por el camino. Dibuja un diagrama por sector que describa esta situación.

17. En una clase se ha preguntado por las preferencias deportivas y se ha obtenido:

Futbol	Baloncesto	Natación	Kárate	Ciclismo
8	9	7	6	10

a) Copia la tabla en tu cuaderno y construye una tabla de frecuencias relativas.

b) Representa estos valores de la variable en un diagrama de sectores.

Medidas de centralización y dispersión

18. Pepa ha tirado un dado 25 veces de un ejercicio anterior y ha obtenido los siguientes resultados:

1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4

a) Calcula la media aritmética

b) Calcula la mediana

c) ¿Cuál es la moda? ¿Es única?

d) Calcula la varianza y desviación típica interpretando su resultado

19. Sara ha tenido las siguientes notas en sus exámenes de Matemáticas: 9, 7, 8, 6, 9, 10, 9

a) Calcula la media aritmética

b) Calcula la mediana

c) ¿Cuál es la moda? ¿Es única?

d) Calcula el percentil 45 interpretando su resultado

e) Calcula el percentil 75 interpretando su resultado. ¿qué otro nombre recibe?

f) Calcula la varianza y desviación típica interpretando su resultado

g) Calcula el coeficiente de variación interpretando su resultado

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

20. En un ejercicio anterior se ha tenido el resultado de medir en una clase el tamaño de las manos de cada uno de los alumnos y alumnas, y el resultado en centímetros ha sido el siguiente:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,

16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,

23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

a) Calcula la media aritmética

b) Calcula la mediana

c) ¿Cuál es la moda? ¿Es única?

d) Calcula el percentil 45 interpretando su resultado

e) Calcula el percentil 75 interpretando su resultado. ¿qué otro nombre recibe?

f) Calcula la varianza y desviación típica interpretando su resultado

g) Calcula el coeficiente de variación interpretando su resultado

21. Nos interesa conocer la distribución de notas obtenidas por 40 estudiantes. Las notas son:

4, 1, 7, 10, 3, 2, 8, 9, 0, 0, 5, 8, 2, 7, 1, 2, 8, 10, 2, 10,

3, 4, 8, 9, 3, 6, 3, 7, 2, 4, 9, 4, 9, 5, 1, 3, 3, 9, 7, 8, 10

a) Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas.

b) Haz un polígono de frecuencias absolutas.

c) Calcula la media

d) Calcula la mediana

e) Calcula la moda

f) Calcula el percentil 45 interpretando su resultado

g) Calcula el percentil 75 interpretando su resultado. ¿qué otro nombre recibe?

h) Calcula la varianza y desviación típica interpretando su resultado

i) Calcula el coeficiente de variación interpretando su resultado

j) Si las notas de los mismos alumnos respecto a otra asignatura tienen una media de 5,3 y desviación típica de 2, ¿cuál de las dos asignaturas tiene una media más homogénea?

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

22. Los jugadores de un equipo de balonmano tiene las siguientes edades:

12, 14, 13, 12, 15, 11, 12, 12, 13, 14, 11, 12, 12.

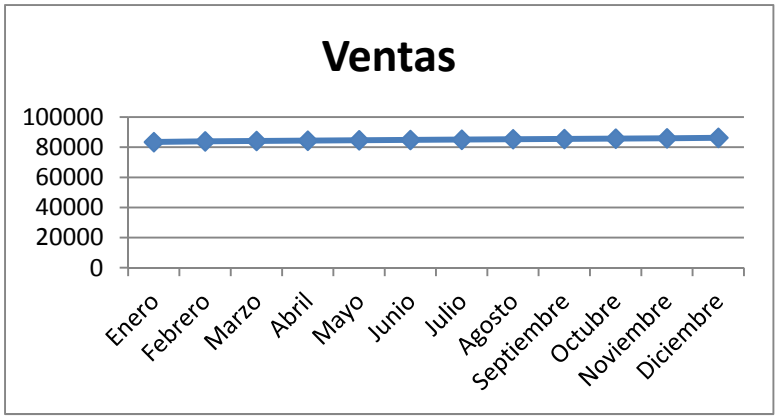
a. Calcula la media
b. Calcula la mediana
c. Calcula la moda
d. Calcula el percentil 45 interpretando su resultado
e. Calcula el percentil 75 interpretando su resultado. ¿qué otro nombre recibe?
f. Calcula la varianza y desviación típica interpretando su resultado
g. Calcula el coeficiente de variación interpretando su resultado

Problemas

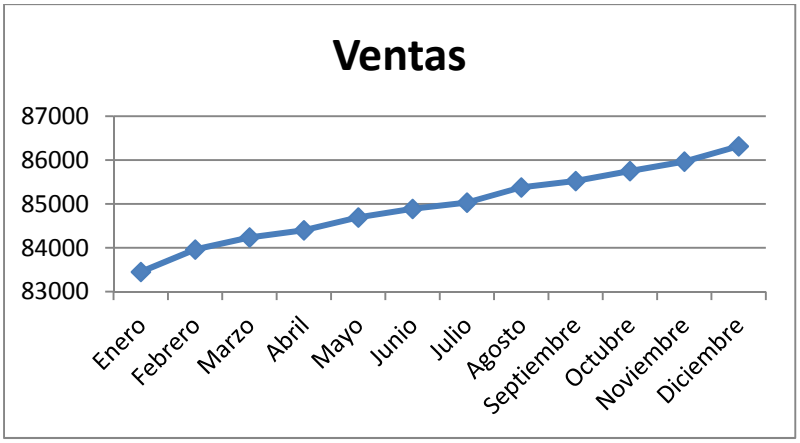
23. El Director Comercial de una empresa va a ser evaluado. Para ello debe dar cuanta de los resultados obtenidos. Quiere quedar bien, pues eso le puede suponer un aumento de sueldo. Se han vendido las siguientes cantidades:

Meses	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Ventas	83451	83962	84238	84401	84693	84889	85032	85378	85524	85751	859967	86316

El estadístico de la empresa le ha entregado la siguiente gráfica:



No le ha gustado nada, y para la presentación él se ha confeccionado el siguiente gráfico:



Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ambos gráficos son correctos. Escribe un informa sobre cómo pueden los distintos gráficos dar impresiones tan diferentes.

24. Tira una moneda 15 veces y anota las veces que cae cara y las que no. Construye luego dos tablas: una de frecuencias absolutas y otra de frecuencias relativas. Representa el resultado en un diagrama de frecuencias y en un polígono de frecuencias.

25. La media de seis números es 5. Se añaden dos números más pero la media sigue siendo 5. ¿Cuánto sumas estos dos números?

26. La siguiente tabla expresa las estaturas, en metros, de 1000 soldados:

Talla	1'50 - 156	1'56 – 1'62	1'62 - 168	1'68 - 1'74	1'74 - 1'80	1'80-1'92
Nº de soldados	20	150	200	330	200	100

Calcula:

a) La media y la desviación típica.

b) Los intervalos donde se encuentran la mediana y los cuartiles.

c) El intervalo ($\bar{x}$ - σ, $\bar{x}$ + σ) y el porcentaje de individuos en dicho intervalo.

d) Representa los datos en un histograma.

27. Una compañía aérea sospecha que existe una relación entre las variables *X*, tiempo de un vuelo, en horas; e *Y*, consumo de combustible (gasóleo) para dicho vuelo, en litros. Por esta razón, se han obtenido los siguientes datos, dentro del rango de niveles de interés para X en esta compañía.

X_i	0´4	0´5	0´6	0´65	0´7	0´8	1	1´15	1´2
Y_i	1.350	2.220	2.900	3.150	3.350	3.550	3.900	4.330	4.500

X_i	1´4	1´5	1´6	1´8	2´2	3
Y_i	5.050	5.320	5.650	6.400	7.500	10.250

Se pide:

a) Mediante la representación del diagrama de dispersión razonar el interés de relacionar dichas variables.

b) Obtener la covarianza y el coeficiente de correlación entre ambas variables. Interpretar los resultados.

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. Un diagrama de caja informa sobre:

a) Los cuartiles y curtosis. b) Asimetría y varianza. c) Datos atípicos y simetría.

2. Sea la variable aleatoria número de personas que es capaz de levantar un ascensor. Para calcular el nº de personas a partir del cual se recoge el 30 % de los valores de la variable necesitamos obtener

a) El percentil 30 b) El percentil 3 c) El percentil 70

3. El 25 % de los madrileños gastan en la factura del móvil por encima de 100 euros, mientras que el 25 % gastan por debajo de 20 euros. Entonces conocemos:

a) 100 y 20 son valores que corresponden al cuartil 1 y 3, respectivamente.

b) 100 y 20 son valores que corresponden al cuartil 3 y 1, respectivamente.

c) 100 y 20 son valores que no corresponden a ningún cuartil.

4. En un diagrama de barras de frecuencias absolutas, la suma de sus alturas es proporcional a:

a) 100 b) 1 c) Total de valores de la variable d) Suma de sus bases

5. La media de los siguientes valores de la variable 3, 4, 6, 7, 5, 8, es:

a) 6 b) 7 c) 4,8 d) 5,5

6. La mediana de los siguientes valores de la variable 3, 4, 6, 7, 8, es:

a) 6 b) 7 c) 4 d) 5

7. La moda de los siguientes valores de la variable 3, 4, 6, 7, 5, 8, 7, 7, es:

a) 6 b) 7 c) 4 d) 5

8. La media de 7 números es 8. Se añaden dos números más pero la media sigue siendo 8. ¿Cuánto suman estos dos números?

a) 10 b) 16 c) 20 d) 14

9. Dos revistas especializadas en empleo, A y B, han publicado una media de ofertas de trabajo, de m_A = 10 y m_B = 20 con varianzas, respectivamente de $s^2_A = 4$ y $s^2_B = 9$.

a) La revista B presenta mayor dispersión absoluta que la revista A, mientras que la revista A presenta mayor dispersión relativa que la B

b) La revista A presenta mayor dispersión absoluta que la revista B, mientras que la revista B presenta mayor dispersión relativa que la A

c) La revista B presenta mayor dispersión absoluta y relativa que la A

10. El 70 % de los madrileños gastan en regalos navideños por encima de 100 euros, mientras que el 5 % gastan por encima de 500 euros. Entonces conocemos:

a) El valor correspondiente al percentil 30.

b) El valor correspondiente al percentil 70.

c) El valor correspondiente al percentil 5.

Autora: Raquel Caro
Revisoras: María Molero y Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.

4ºB de ESO
Capítulo 14: Combinatoria

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-027363

Fecha y hora de registro: 2014-01-11 19:51:14.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autoras: Adela Salvador y María Molero

Revisores: Andrés Hierro y Sergio Hernández

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y María Molero

Índice

1. PERMUTACIONES

1.1. DIAGRAMAS EN ÁRBOL

1.2. PERMUTACIONES U ORDENACIONES DE UN CONJUNTO

2. VARIACIONES

2.1. VARIACIONES CON REPETICIÓN

2.2. VARIACIONES SIN REPETICIÓN

3. COMBINACIONES

3.1. COMBINACIONES

3.2. NÚMEROS COMBINATORIOS

3.3. BINOMIO DE NEWTON

3.4. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

4. OTROS PROBLEMAS DE COMBINATORIA

4.1. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

4.2. PERMUTACIONES CIRCULARES

4.3. PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

4.4. COMBINACIONES CON REPETICIÓN

Resumen

Saber contar es algo importante en Matemáticas. Ya Arquímedes en su libro "*Arenario*" se preguntaba cómo contar el número de granos de arena que había en la Tierra.

En este capítulo vamos a aprender técnicas que nos permitan contar. Vamos a aprender a reconocer las permutaciones, las variaciones y las combinaciones; y a utilizar los números combinatorios en distintas situaciones, como para desarrollar un binomio elevado a una potencia.

Estas técnicas de contar las utilizaremos en otras partes de las Matemáticas como en *Probabilidad* para contar el número de *casos posibles* o el número de *casos favorables*.

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Andrés Hierro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y María Molero

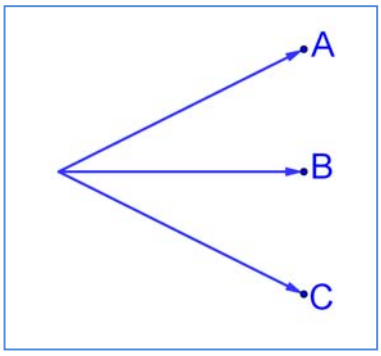
1. PERMUTACIONES

1.1. Diagramas en árbol

Actividades resueltas

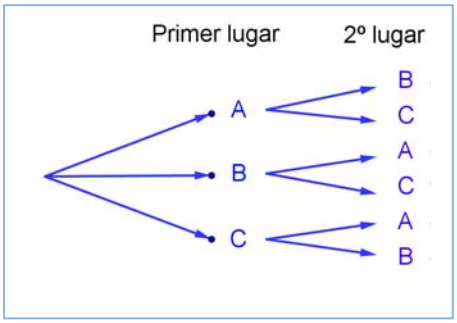
- *En una fiesta se cuenta con tres grupos musicales que deben actuar. Para organizar el orden de actuación, ¿cuántas posibilidades distintas hay?*

Una técnica que puede ayudar mucho es confeccionar un **diagrama en árbol**. Consiste en una representación por niveles en la que cada rama representa una opción individual para pasar de un nivel al siguiente, de tal manera que todos los posibles recorridos desde la raíz hasta el último nivel, el nivel de las hojas, son todos los posibles resultados que se pueden obtener.



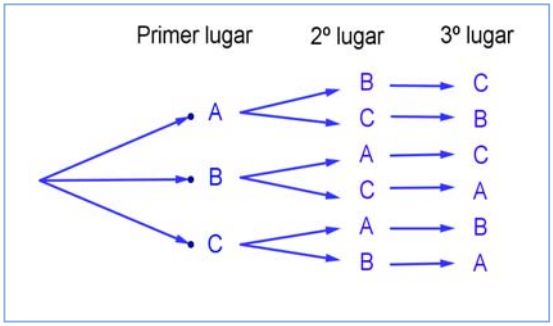
Llamamos a los tres grupos musicales A, B y C.

Primer nivel del árbol: En primer lugar podrán actuar o bien A, o bien B o bien C.



Segundo nivel del árbol: Una vez que el grupo A ha sido elegido para actuar en primer lugar, para el segundo puesto sólo podremos colocar a B o a C. Igualmente, si ya B va en primer lugar, sólo podrán estar en el segundo lugar A o C. Y si actúa en primer lugar C, para el segundo puesto las opciones son A y B.

Tercer nivel del árbol: Si ya se hubiera decidido que en primer lugar actúa el grupo A y en segundo el grupo B, ¿para el tercer lugar, que se puede decidir? Sólo nos queda el grupo C, y de la misma manera, en todos los otros casos, sólo queda una única posibilidad



Confeccionar el diagrama en árbol, incluso únicamente comenzar a confeccionarlo, nos permite contar con seguridad y facilidad. Para saber cuántas formas tenemos de organizar el concierto, aplicamos el principio de multiplicación: sólo tenemos que multiplicar los números de ramificaciones que hay en cada nivel: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas de organizar el orden de actuación de los grupos.

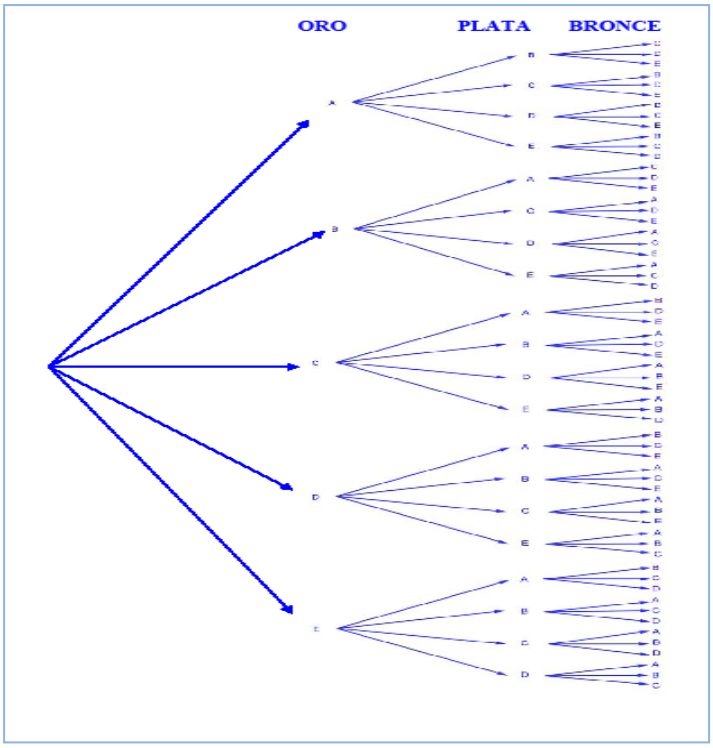
También permite escribir esas seis posibles formas sin más que seguir al árbol: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

- *En una carrera compiten* 5 *corredores y se van a repartir tres medallas, oro, plata y bronce, ¿de cuántas formas distintas pueden repartirse?*

Hacemos el diagrama en árbol. El oro lo pueden ganar los cinco corredores que vamos a llamar A, B, C, D y E. Hacemos las cinco flechas del diagrama. Si el oro lo hubiese ganado el corredor A, la plata sólo la podría ganar alguno de los otros cuatro corredores: B, C, D o E. Si el oro lo hubiera ganado B también habría cuatro posibilidades para la medalla de plata: A, C, D y E. Y así con el resto.

Si suponemos que la medalla de oro la ha ganado A y la de plata B, entonces la medalla de bronce la pueden ganar C, D o E.

Por tanto hay 5 · 4 · 3 = 60 formas distintas de repartir las tres medallas entre los cinco jugadores.



Actividades propuestas

1. Haz diagramas en árbol para calcular:

a) Cuántas palabras de dos letras (con significado o sin él) puedes escribir con las letras A, B o C.

b) Cuántas palabras de tres letras que empiecen por vocal y terminen por consonante se pueden formar con las letras del alfabeto. (*Recuerda* que hay 5 vocales y 22 consonantes).

2. Ana tiene 5 camisetas, 3 pantalones y 4 pares de zapatillas. ¿Puede llevar una combinación diferente de camiseta, pantalón y zapatilla durante dos meses (61 días)? ¿Cuántos días deberá repetir combinación? *Ayuda*: Seguro que un diagrama en árbol te resuelve el problema.

3. En un tablero cuadrado con 25 casillas, ¿de cuántas formas diferentes podemos colocar dos fichas idénticas, de modo que estén en distinta fila y en distinta columna? *Sugerencia*: Confecciona un diagrama de árbol. ¿Cuántas casillas hay para colocar la primera ficha? Si descartamos su fila y su columna, ¿en cuántas casillas podemos colocar la segunda ficha?

1.2. Permutaciones u ordenaciones de un conjunto

Llamamos **permutaciones** a las posibles formas distintas en que se puede ordenar un conjunto de elementos distintos.

Cada cambio en el orden es una permutación.

Ejemplos:

- *Son permutaciones:*
  - Las formas en que pueden llegar a la meta 10 corredores.

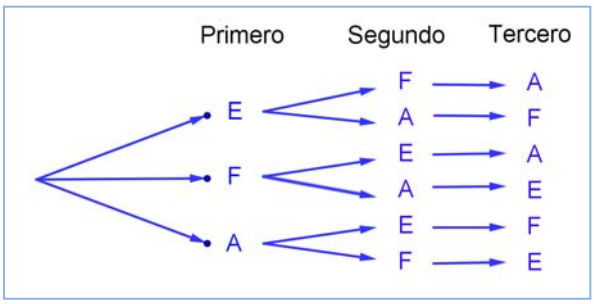
- Las palabras de cuatro letras, sin repetir ninguna letra, con o sin sentido que podemos formar con las letras de la palabra MESA.
- Los números de 5 cifras distintas que se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4 y 5.

El número de permutaciones de un conjunto de *n* elementos se designa por P_n, y se lee *permutaciones de n elementos*.

La actividad resuelta de los tres grupos musicales que iban a actuar en una fiesta era de permutaciones, era una ordenación, luego lo escribiríamos como P_3, y se lee *permutaciones de 3 elementos*.

Actividades resueltas

- *En la fase preparatoria de un campeonato del mundo están en el mismo grupo España, Francia y Alemania. Indica de cuántas formas pueden quedar clasificados estos tres países.*



Son permutaciones de 3 elementos: P_3. Hacemos un diagrama de árbol. Pueden quedar primeros España (E), Francia (F) o Alemania (A). Si ha ganado España, pueden optar por el segundo puesto F o A. Y si ya hubiesen ganado España y luego Francia, para el tercer puesto sólo quedaría Alemania.

Pueden quedar de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas distintas.

En general para calcular las permutaciones de *n* elementos se multiplica *n* por $n - 1$, y así, bajando de uno en uno, hasta llegar a 1: $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. A este número se le llama factorial de *n*, y se indica $n!$

$$\mathbf{P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!}$$

Corresponde a un árbol de *n* niveles con n, $n - 1$, $n - 2$, … , 3, 2, 1 posibilidades de elección respectivamente.

Para realizar esta operación con la calculadora se utiliza la tecla **!**

Ejemplos:

- Las formas en que pueden llegar a la meta 10 corredores son:

$$P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800.$$

- Las palabras con o sin sentido que podemos formar con las letras, sin repetir, de la palabra MESA son $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
- Los números de 5 cifras, todas distintas, que se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4 y 5 son:

$$P_5 = 5! = 120.$$

- España, Francia y Alemania pueden quedar clasificados de $P_3 = 3! = 6$ formas distintas.

Actividades propuestas

4. ¿De cuántas formas pueden repartirse cuatro personas, cuatro pasteles distintos, comiendo cada persona un pastel?

5. En una carrera de caballos participan cinco caballos con los números 1, 2, 3, 4 y 5. ¿Cuál de ellos puede llegar el primero? Si la carrera está amañada para que el número cuatro llegue el primero, ¿cuáles de ellos pueden llegar en segundo lugar? Si la carrera no está amañada, ¿de cuántas formas distintas pueden llegar a la meta? Haz un diagrama en árbol para responder.

6. ¿De cuántas maneras puedes meter cuatro objetos distintos en cuatro cajas diferentes, si sólo puedes poner un objeto en cada caja?

7. ¿Cuántos países forman actualmente la Unión Europea? Puedes ordenarlos siguiendo diferentes criterios, por ejemplo por su población, o con respecto a su producción de acero, o por la superficie que ocupan. ¿De cuántas maneras distintas es posible ordenarlos?

8. En el año 1973 había seis países en el Mercado Común Europeo. ¿De cuántas formas puedes ordenarlos?

9. En una oficina de colocación hay siete personas. ¿De cuántas formas distintas pueden haber llegado?

Actividades resueltas

- *Cálculo de* $\frac{6!}{3!}$.

Cuando calculamos cocientes con factoriales siempre simplificamos la expresión, eliminando los factores del numerador que sean comunes con factores del denominador, antes de hacer las operaciones. En general siempre suele ser preferible simplificar antes de operar, pero en este caso resulta imprescindible, para que no salgan números demasiado grandes.

$$\text{Es } \frac{6!}{3!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1}=6\cdot5\cdot4=120.$$

- *Expresa, utilizando factoriales, los productos siguientes:* a) 10·9·8; b) (n+4)·(n+3)·(n+2);

a) $10\cdot9\cdot8=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{10!}{7!}$

b) $(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2)=\frac{(n+4)!}{(n+1)!}$

Actividades propuestas

10. Calcula: a) $\frac{6!}{4!}$; b) $\frac{7!}{3!}$; c) $\frac{8!}{5!\cdot3!}$; d) $\frac{6!}{5!}$; e) $\frac{12!}{11!}$; f) $\frac{347!}{346!}$.

11. Calcula: a) $\frac{(n+1)!}{n!}$; b) $\frac{(n+4)!}{(n+3)!}$; c) $\frac{(n+4)!}{(n+2)!}$; d) $\frac{n!}{(n-1)!}$.

12. Expresa utilizando factoriales: a) 5·4·3; b) 10·11·12·13; c) 8·7·6; d) 10·9.

13. Expresa utilizando factoriales: a) $(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)$; b) $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$; c) $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)$.

14. Escribe en forma de factorial las distintas formas que tienen de sentarse en una clase los 30 alumnos en los 30 puestos que hay. (No lo calcules. El resultado es un número muy grande, para calcularlo se necesita un ordenador o una calculadora, y habría que recurrir a la notación científica para expresarlo de forma aproximada).

15. Nueve ciclistas circulan por una carretera en fila india. ¿De cuántas formas distintas pueden ir ordenados?

2. VARIACIONES

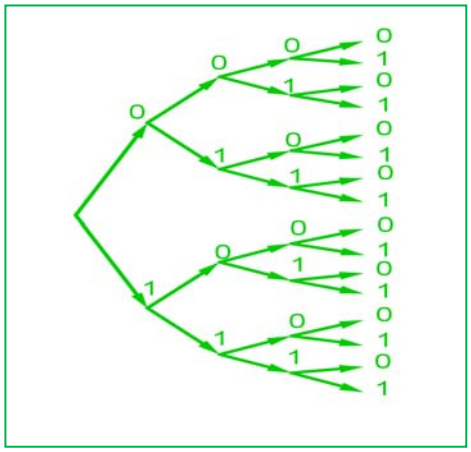
2.1. Variaciones con repetición

Ya sabes que las quinielas consisten en adivinar los resultados de 14 partidos de fútbol señalando un 1 si pensamos que ganará el equipo de casa, un 2 si gana el visitante y una X si esperamos que haya empate. En una misma jornada, ¿cuántas quinielas distintas podían rellenarse?

Observa que ahora cada diferente quiniela consiste en una secuencia de los símbolos 1, 2 y X, en las que el mismo símbolo puede aparecer varias veces **repetido** a lo largo de la secuencia y dos quinielas pueden diferenciarse por los **elementos** que la componen o por el **orden** en que aparecen.

Actividades resueltas

- *Con dos símbolos,* 0 *y* 1*, ¿cuántas tiras de* 4 *símbolos se pueden escribir?*



Igual que en anteriores ejemplos, formamos el diagrama de árbol. Observando que en el primer lugar de la tira podemos poner los dos símbolos. En el segundo lugar, aunque hayamos puesto el 0, como se puede repetir, podemos volver a poner el 0 y el 1. Lo mismo en el tercer y en el cuarto lugar. Es decir, el número de ramificaciones no se va reduciendo, siempre es igual, por lo tanto el número de tiras distintas que podemos formar es

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16 \text{ tiras distintas.}$$

Las diferentes secuencias de longitud n que se pueden formar con un conjunto de m elementos diferentes, se llaman **variaciones con repetición** de m elementos tomados de n en n. El número de diferentes secuencias que se pueden formar se designa con la expresión $VR_{m,n}$. y se calcula con la fórmula:

$$\mathbf{VR_{m,n} = m^n}$$

En la ***actividad resuelta*** anterior son variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 4 en 4:

$$VR_{2,4} = 2^4 = 16 \text{ tiras distintas.}$$

Actividad resuelta

- En el cálculo del *número de quinielas distintas,* los elementos son 3 (1, 2, X) y se forman secuencias de longitud 14, por lo tanto se trata de *variaciones con repetición* de 3 elementos tomados de 14 en 14:

$$VR_{3,14} = 3^{14} = 4\ 782\ 969.$$

  Para tener la certeza absoluta de conseguir 14 aciertos hay que rellenar 4 782 969 apuestas simples.

- *La probabilidad de que te toque una quiniela en una apuesta simple es*, por tanto, $\frac{1}{4782969}$.

Actividades propuestas

16. Con los 10 dígitos, ¿cuántos números distintos pueden formarse de 6 cifras?

17. Con los 10 dígitos y las 22 consonantes del alfabeto, ¿cuántas matriculas de coche pueden formarse tomando cuatro dígitos y tres letras?

18. Un byte u octeto es una secuencia de ceros y unos tomados de 8 en 8. ¿Cuántos bytes distintos pueden formarse?

19. Calcula: a) $VR_{4,2}$; b) $VR_{4,4}$; c) $VR_{11,2}$; d) $VR_{2,11}$.

20. Expresa con una fórmula:

a) Las variaciones con repetición de 3 elementos tomadas de 5 en 5.

b) Las variaciones con repetición de 7 elementos tomadas de 2 en 2.

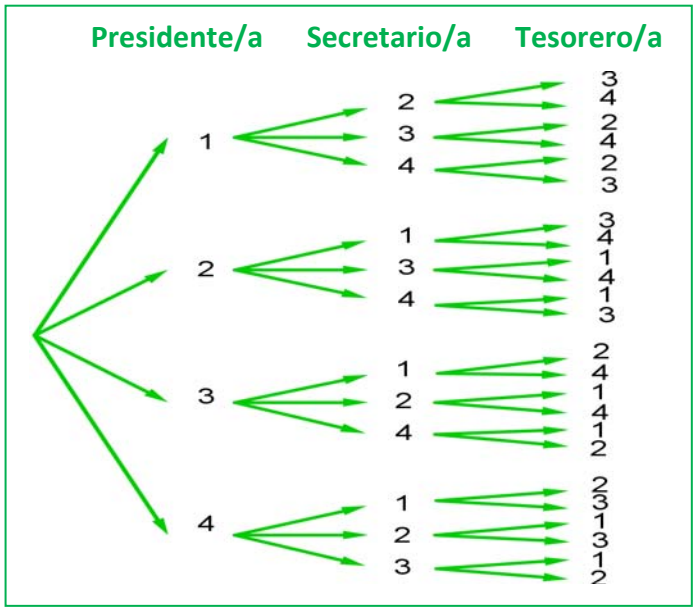
c) Las variaciones con repetición de 5 elementos tomadas de 4 en 4.

21. ¿Cuántas palabras de tres letras (con significado o no) puedes formar que empiecen por consonante y terminen con la letra R?

2.2. Variaciones sin repetición

Actividades resueltas

- *Una asociación de vecinos va a renovar la junta directiva. Ésta consta de tres cargos, presidencia, secretaría y tesorería. a) Si únicamente se presentan cuatro personas. ¿De cuántas maneras puede estar formada la junta? b) Si, antes de que empiece la votación, se presentan otros dos candidatos, ¿cuántas juntas diferentes podrán formarse ahora?*



a) Confeccionamos nuestro diagrama en árbol. Numeramos los candidatos del 1 al 4. A la presidencia pueden optar los 4 candidatos, pero si un determinado candidato ya ha sido elegido para la presidencia, no podrá optar a

los otros dos cargos, por lo que desde cada una de las primeras cuatro ramas, sólo saldrán tres ramas. Una vez elegida una persona para la presidencia y la secretaría, para optar a la tesorería habrá únicamente dos opciones, por lo cual de cada una de las ramas del segundo nivel, salen dos ramas para el tercer nivel.

De este modo, multiplicando el número de ramificaciones en cada nivel, tenemos que la junta puede estar formada de $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ maneras.

b) Si en lugar de 4 candidatos fuesen 6, podría estar formada de $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ maneras.

Estas agrupaciones de elementos, en que un elemento puede aparecer en cada grupo como máximo una vez, sin repetirse, y cada grupo se diferencia de los demás por los elementos que lo componen o por el orden en que aparecen se denominan *variaciones sin repetición*.

En las variaciones, tanto con repetición como sin repetición, se tienen en cuenta el **orden** y los **elementos** que forman el grupo. La diferencia es que en las variaciones con repetición pueden repetirse los elementos y en las variaciones ordinarias no. En el ejemplo anterior no tendría sentido que un mismo candidato ocupara dos cargos, **no se repiten los elementos**.

Las **variaciones sin repetición** (o simplemente **variaciones**) de m elementos tomados de n en n se designan como $V_{m,n}$. Son los grupos de n elementos distintos que se pueden formar de modo que un grupo se diferencie de otro bien por los **elementos** que lo componen bien por el **orden** en que aparecen.

El número de variaciones es igual al producto de multiplicar n factores partiendo de m y decreciendo de uno en uno:

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \text{ (}n\text{ factores)}$$

Observaciones

1) m debe ser siempre mayor o igual que n.
2) Las variaciones de m elementos tomados de m en m coinciden con las permutaciones de m elementos: $V_{m,m} = P_m$.

Actividades resueltas

- *Observa las siguientes variaciones e intenta encontrar una expresión para el último factor que se multiplica en el cálculo de las variaciones:*

  a) $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2$

  b) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4$

  c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$

  d) $V_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

En el caso a) 2 es igual a $4 - 3 + 1$.

En b) $4 = 6 - 3 + 1$.

En c) $5 = 10 - 6 + 1$.

En d) $6 = 9 - 4 + 1$.

En general el último elemento es $(m - n + 1)$.

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)$$

- *Escribe la fórmula de las variaciones utilizando factoriales:*

a) $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{4!}{1!}$

b) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!}$

c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{10!}{4!}$

d) $V_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{9!}{5!}$

Para escribirlo como cociente de factoriales se debe dividir por $(m - n)!$.

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Para realizar esta operación con la *calculadora* se utiliza la tecla etiquetada **nPr**

Actividades propuestas

22. Tres personas van a una pastelería en la que únicamente quedan cuatro pasteles, distintos entre sí. ¿De cuántas formas distintas pueden elegir su pastel si cada una compra uno?

23. Con los 10 dígitos se desean escribir números de cuatro cifras, todas ellas distintas. ¿Cuántas posibilidades hay para escribir la primera cifra? Una vez elegida la primera, ¿cuántas hay para elegir la segunda? Una vez elegidas las dos primeras, ¿cuántas hay para la tercera? ¿Cuántas posibilidades hay en total?

24. Si tienes 9 elementos diferentes y los tienes que ordenar de 5 en 5 de todas las formas posibles, ¿cuántas hay?

25. Con las letras A, B y C, ¿cuántas palabras de 2 letras no repetidas podrías escribir?

26. Con los dígitos 3, 5, 7, 8 y 9, ¿cuántos números de 3 cifras distintas puedes formar?

27. Calcula: a) $V_{11,6}$; b) $V_{7,5}$; c) $V_{8,4}$.

28. Calcula: a) $\frac{7!}{3!}$; b) $\frac{6!}{4!}$; c) $\frac{10!}{8!}$.

Otra observación

Hemos dicho que $V_{m,m} = P_m$ pero si utilizamos la fórmula con factoriales tenemos que $V_{m,m} = P_m = \frac{m!}{(m-m)!} = \frac{m!}{0!}$. Para que tenga sentido se asigna a 0! el valor de 1.

$$0! = 1.$$

3. COMBINACIONES

3.1. Combinaciones

Actividades resueltas

- *En una librería quieren hacer paquetes de tres libros, usando los seis libros más leídos. ¿Cuántos paquetes diferentes podrán hacer?*

En este caso cada grupo de tres libros se diferenciará de los otros posibles por los libros (**elementos**) que lo componen, sin que importe el orden en que estos se empaquetan. A esta agrupación se la denomina combinación.

Se llama **combinaciones** de *m* elementos tomados de *n* en *n* y se designa $C_{m,n}$ a los grupos de *n* elementos que se pueden formar a partir de un conjunto de *m* elementos diferentes entre sí, de modo que cada grupo se diferencie de los demás por los **elementos** que lo forman (no por el orden en que aparecen).

Designamos los libros con las letras A, B, C, D, E y F.

Paquetes con A				Paquetes sin A pero con B			Paquetes sin A ni B pero con C		
ABC				BCD			CDE		
ABD	ACD			BCE	BDE		CDF	CEF	DEF
ABE	ACE	ADE		BCF	BDF	BEF			
ABF	ACF	ADF	AEF						

Hemos formado primero todos los paquetes que contienen el libro A, hay 10; Luego seguimos formando los que no contienen el libro A pero si contienen el B. Luego los que no contienen ni A ni B pero sí C. Y por último, el paquete DEF que no contiene los libros A, B ni C. Con este recuento hemos identificado un total de 20 paquetes distintos. $C_{6,3} = 20$.

Esta forma de hacerlo es poco práctica. Para encontrar una fórmula general que nos permita calcular el número de grupos, vamos a apoyarnos en lo que ya sabemos.

Si fuera relevante el orden en que aparecen los libros en cada paquete, además de los libros que lo componen, sería un problema de variaciones y calcularíamos: $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ diferentes:

ABC, ABD, ABE, ABF, ACB, ACD, ACE, ACF, ADB, ADC, ADE, ADF, AEB, AEC, AED, AEF, AFB, AFC, AFD, AFE, BAC, BAD, BAE, BAF, BCA, BCD, BCE, BCF, BDA, BDC, BDE, BDF, BEA, BEC, BED, BEF, BFA, BFC, BFD, BFE, CAB, CAD, CAE, CAF, CBA, CBD, CBE, CBF, CDA, CDB, CDE, CDF, CEA, CEB, CED, CEF, CFA, CFB, CFD, CFE, DAB, DAC, DAE, DAF, DBA, DBC, DBE, DBF, DCA, DCB, DCE, DCF, DEA, DEB, DEC, DEF, DFA, DFB, DFC, DFE, EAB, EAC, EAD, EAF, EBA, EBC, EBD, EBF, ECA, ECB, ECD, ECF, EDA, EDB, EDC, EDF, EFA, EFB, EFC, EFD, FAB, FAC, FAD, FAE, FBA, FBC, FBD, FBE, FCA, FCB, FCD, FCE, FDA, FDB, FDC , FDE, FEA, FEB, FEC, FED.

En la lista anterior hemos señalado con el mismo color algunos de los paquetes que contienen los mismos tres libros, verás que el paquete con los libros A, B y C se repite seis veces: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Las mismas veces se repite el paquete ABD, el ACF, etc. Puedes probar a señalar cualquier otra combinación y verás que todas están repetidas exactamente seis veces. Ello es debido a que hay seis variaciones posibles con la misma composición de elementos, que se diferencian por el orden (las permutaciones de esos tres elementos que son $P_3 = 6$). Así pues, como en el recuento de variaciones,

cada paquete está contado $P_3 = 6$ veces. Para saber el número de paquetes diferentes dividimos el total de variaciones entre $P_3 = 6$.

Por tanto basta con dividir las variaciones entre las permutaciones:

$$C_{6,3} = \frac{V_{6,3}}{P_3} = \frac{120}{6} = 20.$$

Y, en general, de acuerdo con el mismo razonamiento se calculan las combinaciones de *m* elementos tomados de *n* en *n*, dividiendo las variaciones entre las permutaciones, con la fórmula:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$$

Para realizar esta operación con la calculadora se utiliza la tecla etiquetada **nCr**

Actividades resueltas

- *Un test consta de* 10 *preguntas y para aprobar hay que responder* 6 *correctamente. ¿De cuántas formas se pueden elegir esas* 6 *preguntas?*

No importa en qué orden se elijan las preguntas, sino cuáles son las preguntas elegidas. No pueden repetirse (no tiene sentido que respondas 3 veces la primera pregunta). Únicamente influyen las preguntas (los elementos). Se trata de un problema de combinaciones, en que tenemos que formar grupos de 6, de un conjunto formado por 10 preguntas diferentes, luego son combinaciones, $C_{10,6}$.

$$C_{10,6} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210 \text{ maneras.}$$

- *Tenemos 5 libros sin leer y queremos llevarnos tres para leerlos en vacaciones, ¿de cuántas maneras distintas podemos elegirlos?*

Son combinaciones de 5 elementos tomados de 3 en 3. $C_{5,3} = 10$ formas.

- *Tienes* 7 *monedas de euro que colocas en fila. Si* 3 *muestran la cara y 4 la cruz, ¿de cuántas formas distintas puedes ordenarlas?*

Bastará con colocar en primer lugar las caras y en los lugares libres poner las cruces. Tenemos 7 lugares para colocar 3 caras, serán por lo tanto las combinaciones de 7 elementos tomados de 3 en 3. $C_{7,3} = 35$. Observa que se obtiene el mismo resultado si colocas las cruces y dejas los lugares libres para las caras ya que $C_{7,4} = 35$.

Actividades propuestas

29. Tenemos 5 bombones (iguales) que queremos repartir entre 7 amigos, ¿de cuántas formas se pueden repartir los bombones si a ninguno le vamos a dar más de un bombón?

30. Juan quiere regalar 3 DVDs a Pedro de los 10 que tiene, ¿de cuántas formas distintas puede hacerlo?

31. En el juego del póker se da a cada jugador una mano formada por cinco cartas, de las 52 que tiene la baraja francesa, ¿cuántas manos diferentes puede recibir un jugador?

3.2. Números combinatorios

Las combinaciones son muy útiles, por lo que su uso frecuente hace que se haya definido una expresión matemática denominada número combinatorio.

El **número combinatorio** *m* sobre *n* se designa $\binom{m}{n}$ y es igual a:

$$\binom{m}{n} = C_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!}$$

Propiedades de los números combinatorios

Actividades resueltas

- *Calcula* $\binom{7}{0}, \binom{5}{0}, \binom{9}{0}, \binom{4}{0}$.

Habrás comprobado que: $\binom{7}{0} = 1$, $\binom{5}{0} = 1$, $\binom{9}{0} = 1$ y $\binom{4}{0} = 1$. Razona el motivo. ¿Podemos generalizar y decir que $\binom{m}{0} = 1$? En efecto: $\binom{m}{0} = \frac{m!}{m!\cdot 0!} = 1$. Recuerda que 0! = 1.

- *Calcula* $\binom{7}{7}, \binom{5}{5}, \binom{9}{9}, \binom{4}{4}$.

Habrás comprobado que: $\binom{7}{7} = 1$, $\binom{5}{5} = 1$, $\binom{9}{9} = 1$ y $\binom{4}{4} = 1$. Razona el motivo. ¿Podemos generalizar y decir que $\binom{m}{m} = 1$? En efecto: $\binom{m}{m} = \frac{m!}{(m-m)!\cdot m!} = \frac{m!}{0!\cdot m!} = 1$. Recuerda que 0! = 1.

- *Calcula* $\binom{7}{1}, \binom{5}{1}, \binom{9}{1}, \binom{4}{1}$.

Habrás comprobado que: $\binom{7}{1} = 7$, $\binom{5}{1} = 5$, $\binom{9}{1} = 9$ y $\binom{4}{1} = 4$. Razona el motivo. ¿Podemos generalizar y decir que $\binom{m}{1} = m$? En efecto: $\binom{m}{1} = \frac{m!}{(m-1)!\cdot 1!} = m$.

- *Calcula* $\binom{7}{4}, \binom{7}{3}, \binom{9}{7}, \binom{9}{2}$ *e indica cuáles son iguales.*

Habrás comprobado que: $\binom{7}{4} = \binom{7}{3}$ y que $\binom{9}{7} = \binom{9}{2}$. Razona el motivo. ¿Podemos generalizar y decir que $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$?

En efecto: $\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!} = \frac{m!}{(m-(m-n))!(m-n)!} = \binom{m}{m-n}$.

Hasta ahora todas las propiedades han sido muy fáciles. Tenemos ahora una propiedad más difícil. Veamos que: $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$.

Pero antes lo comprobaremos con un problema.

- *Luis y Miriam se han casado y les han regalado seis objetos de adorno. Quieren poner tres en una estantería, pero Miriam quiere que en la estantería esté, sí o sí, el regalo de su madre. Sin embargo, a Luis no le gusta ese objeto, y le da igual cualquier combinación en la que no esté. Uno de los dos se saldrá con la suya. Calcula cuantas son las posibilidades de cada uno.*

A Luis y Miriam les han regalado 6 objetos de adorno y quieren poner 3 en una estantería. Las formas de hacerlo con $C_{6,3} = \binom{6}{3}$.

Pero Miriam quiere que en la estantería esté, sí o sí, el regalo de su madre. ¿De cuántas formas lo haría Miriam? Son $C_{5,2} = \binom{5}{2}$.

Sin embargo a Luis, ese objeto no le gusta, y le da igual cualquier combinación en la que no esté. ¿De cuántas formas lo haría Luis? Son $C_{5,3} = \binom{5}{3}$.

Las opciones de Miriam más las de Luis son las totales: $\binom{6}{3} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2}$.

- *Comprueba que* $\binom{6}{3} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2}$ *y que* $\binom{7}{5} = \binom{6}{5} + \binom{6}{4}$.

En general, $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$.

¿Te atreves a demostrarlo?

Para demostrarlo recurrimos a la definición y realizamos operaciones:

$\binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} = \frac{(m-1)!}{(m-1-n)!\cdot n!} + \frac{(m-1)!}{(m-1-(n-1))!\cdot (n-1)!}$ reducimos a común denominador

$= \frac{(m-n)\cdot(m-1)!}{(m-n)\cdot(m-1-n)!\cdot n!} + \frac{n\cdot(m-1)!}{n\cdot(m-n)!\cdot(n-1)!}$ Recuerda: $m\cdot(m-1)! = m!$

$= \frac{(m-n)\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!} + \frac{n\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!}$ Ponemos el denominador común y sumamos los numeradores

$$= \frac{(m-n)\cdot(m-1)!+n\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!}$$ Sacamos $(m-1)!$ factor común

$$= \frac{(m-n+n)\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!}$$ De nuevo usamos que $m\cdot(m-1)! = m!$

$$= \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!} = \binom{m}{n}.$$

Triángulo de Pascal o Triángulo de Tartaglia

A un matemático italiano del siglo XVI, llamado Tartaglia pues era tartamudo, se le ocurrió disponer a los números combinatorios así:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

....

O bien calculando sus valores correspondientes:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

...

A ambos triángulos se les llama **Triángulo de *Pascal*** o **Triángulo de *Tartaglia***.

Los valores que hay que poner en cada fila del triángulo se calculan, sin tener que usar la fórmula de los números combinatorios, de una forma más fácil basada en las propiedades de los números combinatorios que acabamos de probar:

Por la propiedad $\binom{m}{0} = 1 = \binom{m}{m}$, cada fila empieza y termina con 1.

Por la propiedad $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$, sabemos que el *Triángulo de Tartaglia* es simétrico o sea que el primer elemento de cada fila coincide con el último, el segundo con el penúltimo y así sucesivamente.

Por la propiedad $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$, podemos obtener las siguientes filas sumando términos de la anterior, ya que cada posición en una fila es la suma de las dos que tiene justo encima de la fila anterior.

De este modo el triángulo se construye secuencialmente, añadiendo filas por abajo hasta llegar a la que nos interesa. Si sólo necesitamos conocer un número combinatorio aislado, tal vez no valga la pena desarrollar todo el triángulo, pero en muchas ocasiones necesitamos conocer los valores de toda una fila del triángulo (por ejemplo cuando desarrollamos un binomio de Newton, o cuando resolvemos problemas de probabilidad).

Actividades propuestas

32. Añade tres filas más al triángulo de *Tartaglia* de la derecha.

33. Suma los números de cada fila y comprueba que la suma de los elementos de la fila *m* es siempre igual a 2^m.

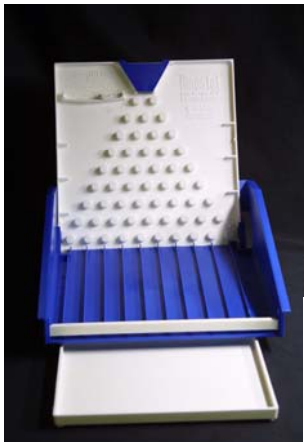
34. Sin calcularlos, indica cuánto valen $C_{5,3}$; $C_{5,4}$; $C_{5,2}$ y $C_{5,5}$ buscando su valor en el triángulo.

1	$1 = 2^0$
1 1	$2 = 2^1$
1 2 1	$4 = 2^2$
1 3 3 1	$8 = 2^3$
1 4 6 4 1	$16 = 2^4$
1 5 10 10 5 1	$32 = 2^5$

Recorridos aleatorios o caminatas al azar

Los números combinatorios sirven como modelo para resolver situaciones muy diversas.

Actividades resueltas



El dispositivo que aparece a la izquierda se denomina *aparato de Galton*. Su funcionamiento es el siguiente: cuando se introduce una bola por el embudo superior, va cayendo por los huecos que existen en cada fila. En cada paso puede caer por el hueco que tiene a su derecha o por el que tiene a su izquierda con igual probabilidad, de forma que es imposible, cuando ponemos una bola en el embudo predecir en cuál de los carriles inferiores acabará cayendo.

- *Si introducimos muchas bolas por el agujero superior, por ejemplo* 1024*, ¿crees que al llegar abajo se distribuirán uniformemente entre todos los carriles o habrá lugares a los que lleguen más bolas?*

Observa que para llegar a la primera fila, sólo hay un camino posible, que es el que va siempre hacia la izquierda, y para llegar a la última, el único camino posible es el que va siempre a la derecha.

Mientras que para llegar a los huecos centrales de cada fila el número de caminos posibles es mayor. Por ejemplo, para llegar al segundo hueco de la segunda fila, hay dos caminos. En general, al primer hueco de cada fila sólo llega un camino, igual que al último y a cada uno de los otros huecos llegan tantos caminos como la suma de los caminos que llegan a los dos huecos que tiene justo encima.

Comprueba que para llegar al hueco *n* de la fila *m* hay $\binom{m}{n}$ caminos.

En resumen, el número de caminos aleatorios que llegan a cada hueco se calcula igual que los números en el triángulo de *Tartaglia*. Si nuestro *aparato de Galton* tiene 9 filas, el número de caminos que llegan a cada uno de los compartimentos de salida es el que se obtiene con la novena fila del Triángulo de *Tartaglia*: 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1, de un total de 2^9 = 512 caminos diferentes que puede realizar la bola. Así que cuando echamos en el aparato 1024 bolas, habrá aproximadamente 2 bolas que hagan cada uno de los 512 recorridos posibles, ya que todos tienen la misma probabilidad de ocurrir. Por tanto el número de bolas que podemos esperar que caigan en cada compartimento es el siguiente:

Compartimento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número aproximado de bolas	$\frac{1024}{512}=2$	9·2 = 18	36·2 = 72	84·2 = 168	126·2 = 252	126·2 = 252	84·2 = 168	36·2 = 72	9·2 = 18	2

Vemos que no se deposita el mismo número de bolas en todos los compartimentos. Mientras que en los extremos habrá aproximadamente 2 bolas, en los centrales habrá unas 252.

De acuerdo con ley de los grandes números, los resultados experimentales serán más parecidos a los teóricos cuanto mayor sea el número de veces que se realiza el experimento (es decir, cuanto mayor sea el número de bolas). En *Youtube* buscando la expresión "*máquina de Galton*" puedes ver muchos vídeos en que se realiza el experimento y se verifica este hecho.

Número de éxitos

Actividades resueltas

- *En una sesión de tiro al plato se realizan sucesivamente 10 disparos. ¿Cuántas posibilidades habrá de acertar en el blanco exactamente tres veces (tener tres éxitos)?*

Son las $C_{10,3} = \binom{10}{3} = 120$.

En resumen

$\binom{m}{n}$ = Número de combinaciones de *m* elementos tomados de *n* en *n*

= Número de caminos posibles para llegar al hueco *n* de la fila *m* del aparato de Galton

= Número de subconjuntos de *n* elementos tomados en un conjunto de *m* elementos

= Número de sucesos en los que obtenemos *n* éxitos en *m* pruebas

= Números de muestras sin ordenar de tamaño *n* en una población de tamaño *m*.

3.3. Binomio de Newton

Vamos a calcular las sucesivas potencias de un binomio. Ya sabes que:

$$(a + b)^0 = 1$$
$$(a + b)^1 = a + b$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Para calcular $(a + b)^4$ multiplicamos $(a + b)^3$ por $(a + b)$.

$$(a + b)^4 = (a + b)^3\cdot(a + b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)\cdot(a + b)$$
$$= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 +$$
$$+ \quad a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$$
$$= \quad a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Observa que para hallar cada uno de los coeficientes de $(a + b)^4$, excepto el primero y el último que valen 1, se suman los coeficientes igual que en el triángulo de Tartaglia. Se obtiene cada elemento sumando los dos que tiene encima.

Actividades resueltas

- *¿Serías capaz de calcular* $(a + b)^5$ *sólo observando?*

Fíjate que siempre aparecen todos los posibles términos del grado que estamos calculando, por lo que para calcular la quinta potencia tendremos: a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4 y b^5. Los exponentes están ordenados de manera que los de a van descendiendo desde 5 hasta 0, y los de b van aumentando desde 0 hasta 5 (recuerda a^0=1).

El coeficiente del primer y último término es 1.

Los coeficientes se obtienen sumando los de los términos de la fila anterior, como en el Triángulo de *Tartaglia*. Son la quinta fila del Triángulo de *Tartaglia*.

Luego $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Podemos escribirlo también utilizando números combinatorios:

$$(a + b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5.$$

Actividades propuestas

35. Desarrolla $(a + b)^6$

En general:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Esta igualdad se denomina ***Binomio de Newton***.

Actividades resueltas

- *¿Cómo calcularías* $(a-b)^n$*?*

Basta aplica la fórmula del Binomio de Newton a $(a+(-b))^n$.

Recuerda $(-b)$ elevado a un exponente par tiene signo positivo y elevado a un exponente impar lo tiene negativo. Por tanto $(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}b^n$. Los signos son alternativamente positivos y negativos.

Actividades propuestas

36. Desarrolla

a) $(a-b)^6$;

b) $(x-3)^4$;

c) $(x+2)^7$;

d) $(-x+3)^5$.

37. Calcula el coeficiente de x^7 en el polinomio que se obtiene al desarrollar $\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)^5$

38. Expresa con radicales simplificados el polinomio que se obtiene al desarrollar $\left(-\frac{x}{2}+\sqrt{2}\right)^5$

4. OTROS PROBLEMAS DE COMBINATORIA

4.1. Resolución de problemas

Recuerda: para resolver un problema es conveniente tener en cuenta las siguientes fases:

Fase 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Léelo hasta asegurarte de haber comprendido el enunciado, ¿qué datos te dan?, ¿qué te piden?

Fase 2: Busca una buena estrategia.

Si el problema es de *Combinatoria* una posible buena estrategia puede ser analizar si es un problema de permutaciones, de variaciones o de combinaciones y, en ese caso, aplicar la fórmula que ya conoces. Esta estrategia podríamos llamarla:

Mira si tu problema se parece a alguno que ya conozcas

Pero otra posible buena estrategia, que no excluye la anterior, es comenzar a hacer un diagrama en árbol. A esta estrategia podemos llamarla:

Experimenta, juega con el problema

O bien:

Haz un diagrama, un esquema, una tabla...

La fase siguiente a seguir es:

Fase 3: Lleva adelante tu estrategia

Seguro que utilizando estas estrategias, resuelves el problema. Por último, cuando ya lo hayas resuelto:

Fase 4: Piensa si es razonable el resultado. Comprueba la estrategia. Generaliza el proceso.

4.2. Permutaciones circulares

Vamos a utilizar estas técnicas, u otras distintas, para resolver un problema:

Actividades resueltas

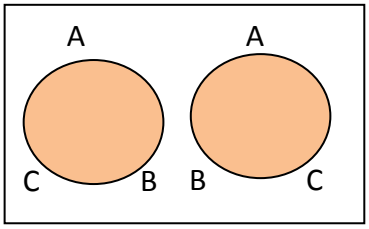
- *Diez amigos y amigas va a comer y en el restaurante les sientan en una mesa redonda. ¿De cuántas formas pueden sentarse?*

Si en lugar de una mesa fuera un banco, ya sabemos resolver el problema, es un problema de *Permutaciones*. La solución sería 10! formas distintas. Pero es una mesa redonda, no tiene un primer asiento ni un último asiento. Tampoco es sencillo, por el mismo motivo, diseñar el diagrama en árbol. ¿Qué hacemos? Piensa. Busca una buena estrategia.

Una buena estrategia quizás sea:

Hazlo más fácil para empezar

Diez son muchos. Piensa en tres: A, B y C. Si fuera un banco, las posibilidades serían 3! = 6. Siéntalos ahora en una mesa redonda. La posibilidad ABC, es ahora la misma que BCA y que CAB. Nos quedan sólo dos formas distintas de sentarlos.



Llamamos PC a esa permutación circular.

Tenemos pues que $P_2 = 2! = 2$ y $PC_2 = 1$; $P_3 = 3! = 6$ y $PC_3 = 2$. ¿Cómo podemos sentar a 4 personas en una mesa circular? La permutación ABCD ahora es la misma que BCDA, y que CDAB y que DABC, luego si $P_4 = 4! = 24$, entonces $PC_4 = P_4/4 = 6$.

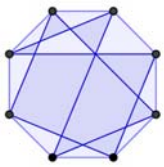
¿Sabemos ya resolver nuestro problema inicial?

Es $PC_{10} = P_{10}/10 = P_9 = 9!$ Razona esta respuesta.

Actividades propuestas

39. Tres amigos "A", "B" y "C" están jugando a las cartas. Cada uno pasa una carta al que está a su derecha. Uno es español, otro italiano y el otro portugués. "A" le pasa una carta al italiano. "B" se la ha pasado al amigo que se la ha pasado al español. ¿Cuál de los amigos es español, cuál italiano y cuál portugués? *Ayuda*: Haz un diagrama circular como el anterior.

40. Ana y Alejandro invitan a cenar a 3 amigos y 3 amigas, ¿cuántas formas tienen de colocarse en una mesa redonda? ¿En cuántas están juntos Ana y Alejandro? ¿En cuántas no hay dos chicos ni dos chicas juntos?



41. ¿Cuántas poligonales cerradas se pueden dibujar con los 8 vértices de un octógono?

4.3. Permutaciones con repetición

Actividades resueltas

- *¿Cuántas palabras 8 letras, con sentido o sin él, se pueden formar on las letras de la palabra RASTREAR?*

Observamos que la letra "R" se repite tres veces y la letra "A", dos veces. Si las 8 letras fueran distintas el número de palabras que se podrían formar sería 8!, pero entre estas 40 320 palabras observamos que todas aquellas en las que están permutadas las dos letras "A" son iguales, por lo tanto tenemos la mitad de las palabras 20 160. Además al considerar las tres letras "R" que hemos considerado distintas y que son iguales tenemos que por cada palabra diferente hay 6, es decir 3!, que son iguales, por lo tanto el número de palabras diferentes es 3 360.

Por tanto, las permutaciones de 8 elementos de los que uno se repite 3 veces y otro 2 será:

$$PR_{8,3,2} = \frac{8!}{2!\ 3!} = 3\ 360.$$

Observa que el número de las permutaciones de dos elementos de los que uno se repite *k* veces y el otro *n* – *k* veces coincide con el número combinatorio $\binom{n}{k}$.

Actividades propuestas

42. Con los dígitos 1, 2, y 3 cuántos números distintos de 7 cifras puedes formar con tres veces la cifra 1, dos veces la cifra 2 y dos veces la cifra 3.

43. Con las letras de la palabra CARCAJADA, ¿cuántas palabras con estas 9 letras, con sentido o sin él, se pueden formar?

44. Tenemos dos fichas blancas, tres negras y cuatro rojas, ¿de cuántas formas distintas podemos apilarlas? ¿En cuántas no quedan las dos fichas blancas juntas?

45. El candado de mi maleta tiene 7 posiciones en las que se puede poner cualquiera de los 10 dígitos del 0 al 9. ¿Cuántas contraseñas diferentes podría poner? ¿Cuántas tienen todos sus números distintos? ¿Cuántas tienen algún número repetido? ¿Cuántas tienen un número repetido dos veces? *Ayuda:* Observa que para calcular las que tienen algún número repetido lo más fácil es restar del total las que tienen todos sus números distintos.

4.4. Combinaciones con repetición

Actividades resueltas

- *Un grupo de* 10 *amigos se van de excursión y uno de ellos se encarga de comprar una bebida para cada uno, pudiendo elegir entre agua, batido o refresco. ¿De cuantas maneras diferentes puede realizarse el encargo?*

Para resolver este problema tenemos que formar una secuencia de 10 elementos, de un conjunto formado por los tres elementos A, B, R. Está claro que no importa el orden en que se compren las bebidas, por lo que se trata de combinaciones. Pero cada elemento puede aparecer en la combinación

más de una vez. Por ejemplo una solución formada por dos de agua, tres de batido y cinco de refresco, se representaría AABBBRRRRR. Cualquier otra combinación tendrá que diferenciarse de ella por al menos un elemento de su composición. Así que viendo que cada secuencia empieza con una repetición del elemento A, sigue con otra del elemento B y termina con repeticiones del elemento R, siendo en total 10 los elementos que se toman, podemos representarlas por una serie de 10 huecos con dos guiones de separación entre ellos.

A A – B B B – R R R R R (Combinación que representa dos de agua, tres de batido y cinco de refresco)

– – R R R R R R R R R R (Combinación que representa sólo diez de refresco)

– B B B B – R R R R R R (Combinación que representa cuatro de batido y seis de refresco)

Así que cada una de las combinaciones se corresponde con **una forma de elegir dónde colocar los guiones**, es decir de 12 posibles posiciones elegir dos. Como no importa en qué orden se coloquen los guiones y no pueden estar los dos en la misma posición, ese número será igual a las combinaciones de 12 elementos tomados de 2 en 2, por lo tanto será:

$$\binom{12}{2} = \frac{12!}{10!\cdot 2!} = \frac{12\cdot 11}{2\cdot 1} = 66$$

En general,

Se llama **combinaciones con repetición** de *m* elementos tomados de *n* en *n* y se designan $CR_{m,n}$ a los grupos de *n* elementos que se pueden formar a partir de un conjunto de *m* elementos diferentes entre sí, de modo que cada grupo se diferencie de los demás por los **elementos** que lo forman y con la posibilidad de que cada elemento aparezca más de una vez.

Coinciden con el número de secuencias que se pueden formar de *m* huecos y *n – 1* guiones, por tanto:

$$CR_{m,n=}\binom{m+n-1}{n-1}$$

Actividades propuestas

46. En una caja hay bolas rojas, negras y azules. Si metemos la mano en la caja y sacamos 8 bolas, ¿de cuántas formas posibles puede realizarse la extracción?

47. ¿De cuántas maneras posibles se pueden comer cuatro amigos 10 caramelos iguales?

Problemas de ampliación

Actividad resuelta

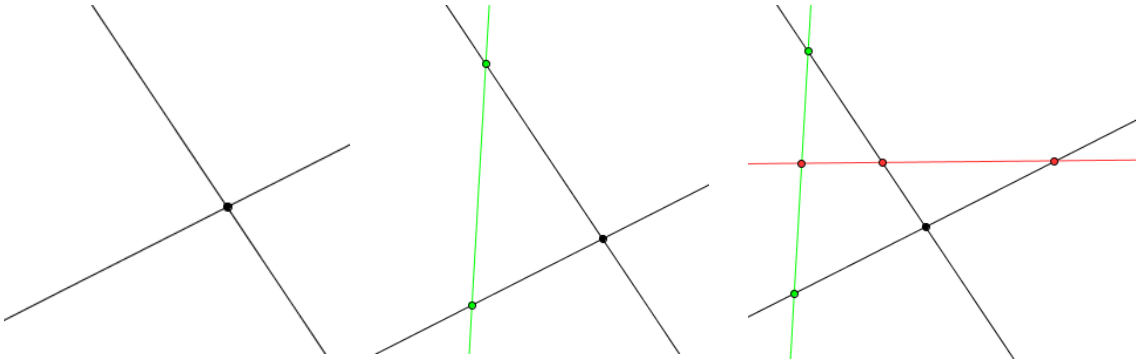
- *Si n rectas de un mismo plano se cortan dos a dos en puntos que son todos distintos, se parte así el plano en regiones distintas. ¿Cuál es el número de esas regiones? ¿Cuántos segmentos hay? ¿Cuántos puntos aparecen?*

Fase 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Para entender bien el problema dibuja rectas en el plano para ir contando puntos, regiones y segmentos

Fase 2: Busca una buena estrategia.

Una buena estrategia consiste en experimentar con casos particulares:



Se observa que:

Con 2 rectas hay 4 regiones, 1 punto y 4 segmentos infinitos (semirrectas).

Con 3 rectas: Al añadir la tercera recta

- Tres de las regiones se han dividido en dos: 4 + 3 = 7 regiones.
- Se añaden los 2 puntos en los que esa recta corta a las anteriores 1 + 2 = 3.
- Se tienen 5 segmentos más: 3 finitos +2 semirrectas: 4 + 5 = 9.
  - En particular las semirrectas han aumentado en dos: 4 + 2 = 6

Con 4 rectas: Al añadir la cuarta recta:

- Cuatro de las regiones se han dividido en dos: 7 + 4 = 11 regiones
- Se añaden los 3 puntos en los que esa recta corta a las anteriores 3 + 3 = 6.
- Se tienen 7 segmentos más: 5 finitos + 2 semirrectas: 9 + 7 = 16.
  - En particular las semirrectas han aumentado en dos: 6 + 2 = 8

Otra buena estrategia es elaborar una tabla con los resultados obtenidos:

Rectas	Puntos	Regiones	Segmentos	Semirrectas
2	1	4	4	4
3	1 + 2 = 3	4 + 3 = 7	9	6
4	3 + 3 = 6	7 + 4 = 11	16	8
5	6 + 4 = 10	11+ 5 = 16	25	10
6	10 + 5 = 15	16 + 6 = 22	36	12

Fase 3: Lleva adelante tu estrategia

En esta fase buscamos expresiones en función del número de rectas, *n*, para poder calcular el número de puntos, segmentos y regiones según los valores de *n*.

La fórmula para las **semirrectas** parece la más fácil de obtener porque aparentemente es el doble que el número de rectas y además cada vez que añadimos una recta tenemos 2 semirrectas más. Si llamamos SS_n al número de semirrectas que aparecen con *n* rectas tenemos que $\mathbf{SS_n = 2n}$.

Para calcular el número de **segmentos** (incluidas las semirrectas) que se obtienen con *n* rectas, a partir de los datos de la tabla, parece plausible sugerir que es el cuadrado del número de rectas, es decir, si S_n designa al el número de segmentos (los finitos y las semirrectas) entonces: $\mathbf{S_n = n^2}$.

Para determinar el número de **puntos**, en la tabla se observa una ley de recurrencia, el número de puntos, para cualquier número de rectas, es igual al número de puntos anterior más el número de rectas también de la fila anterior. Si denominamos P_n al número de puntos que se tienen al cortarse *n* rectas entonces: $\mathbf{P_n = P_{n-1} + n - 1}$

Por otra parte observamos que si numeramos las rectas con 1, 2, 3, …, *n* y nombrando los puntos por el par de rectas que determina cada uno tenemos que son: (1, 2), (1, 3), (1, 4) , … (1, *n*), (2, 3), (2, 4), … (2, *n*), (3, 4) …

El número de estos pares de elementos coincide con las combinaciones de *n* elementos tomados de 2 en 2, es decir, $\mathbf{P_n} = C_{n,2} = \binom{n}{2}$.

La ley de recurrencia que nos sugiere la tabla para obtener el número de **regiones** que se obtienen cuando se cortan *n* rectas, es que el número de regiones de cualquier fila de la tabla es igual al número regiones de la fila anterior más el número de rectas de su fila, por tanto si R_n el número de regiones que se obtienen al cortarse *n* rectas entonces: $\mathbf{R_n = R_{n-1} + n}$.

Para obtener una fórmula observamos que:

$R_n = 4 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n = 1 + (1 + 2) + (3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n) = 1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$.

Sumando 1 + 2 + 3 + … + *n*, obtenemos que:

$$R_n = 1 + (n+1)\frac{n}{2}$$

y por lo tanto

$$R_n = 1 + \binom{n+1}{2}$$

o bien

$$R_n = 1 + \frac{(n-1+2)n}{2} = 1 + n + \frac{(n-1)n}{2}$$

y por consiguiente

$$R_n = 1 + n + \binom{n}{2}$$

Fase 4: Piensa si es razonable el resultado. Comprueba la estrategia. Generaliza el proceso.

En esta fase se trata de justificar o demostrar que todas las conjeturas que hemos realizado son ciertas:

Con respecto al número de **semirrectas** es sencillo comprobar que es el doble del número de rectas ya que por cada recta tenemos dos semirrectas, es decir: $\mathbf{SS_n := 2n}$

El número de **segmentos** es el cuadrado del número de rectas ya que como en cada una de las rectas hay $n - 1$ puntos tenemos n segmentos (finitos y semirrectas) y como hay n rectas se tiene que $\mathbf{S_n = n^2}$

Como cada **punto** es la intersección de dos rectas se tiene que $\mathbf{P_n} = \binom{n}{2}$, esta fórmula cumple la ley de recurrencia $\mathbf{P_n = P_{n-1} + n - 1}$. Aplicando las propiedades de los números combinatorios:

$$P_{n-1} + n - 1 = \binom{n-1}{2} + n - 1 = \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1} = \binom{n}{2} = P_n$$

Respecto a las **regiones** veamos que la hipótesis $\mathbf{R_n} = 1 + \binom{n+1}{2}$, cumple la ley de recurrencia:

$$\mathbf{R_n = R_{n-1} + n}.$$

Si $R_n = 1 + \binom{n+1}{2}$, entonces $R_{n-1} = 1 + \binom{n}{2}$, y por las propiedades de los números combinatorios:

$$R_{n-1} + n = 1 + \binom{n}{2} + n = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} = 1 + \binom{n+1}{2} = R_n$$

En esta fase también se puede generalizar el problema: ¿Qué ocurriría si p de las n rectas fueran paralelas? ¿Y si q rectas de las n rectas convergen en un mismo punto?

Actividades propuestas

48. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 7 bolas idénticas en 5 cajas diferentes colocándolas todas si ninguna caja puede quedar vacía? ¿Y si podemos dejar alguna caja vacía? *Ayuda:* Ordena las bolas en una fila separadas por 4 puntos así quedan divididas en 5 partes, que indican las que se colocan en cada caja.

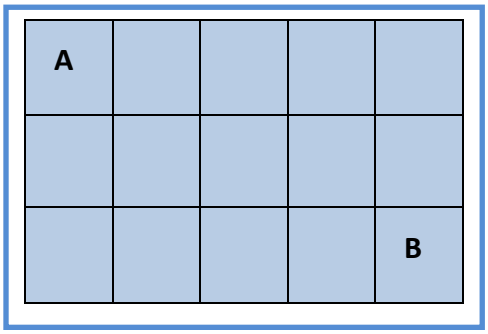
49. ¿Cuántas pulseras diferentes podemos formar con 4 bolas blancas y 6 rojas? *Ayuda:* Este problema es equivalente a introducir 6 bolas iguales en 4 cajas idénticas pudiendo dejar cajas vacías.

50. ¿Cuántas formas hay de colocar el rey blanco y el rey negro en un tablero de ajedrez de forma que no se ataquen mutuamente. ¿Y dos alfiles? ¿Y dos reinas?

CURIOSIDADES. REVISTA

En el año 1494 aparece la primera obra impresa que tiene cuestiones sobre Combinatoria. Es "*Summa*" escrita por Luca Pacioli. (¿Te acuerdas del Número de Oro?). Uno de los problemas que plantea es el de calcular el número de formas distintas en que *n* personas pueden sentarse en una mesa redonda. Problema que ya hemos resuelto en el apartado 4.2.

En el año 1559 escribió Buteo en Francia el libro "*Logística, quae et Aritmética vulgo dicitur*", uno de los primeros libros que tratan sobre Combinatoria. En este libro aparece el siguiente problema: Un cerrajero fabrica candados formados por 7 discos, y en cada disco hay 6 letras. ¿Cuántos candados es posible fabricar de forma que cada uno tenga una combinación diferente para abrir?



Un gato se encuentra en A y un ratón en B. El gato avanza de centro de casilla en centro de casilla moviéndose hacia la derecha o hacia abajo, nunca retrocede. ¿Cuántos caminos distintos puede recorrer el gato para cazar al ratón?

"Por esta razón de independencia, el amor al estudio es de todas las pasiones la que más contribuye a nuestra felicidad".

Mme. de Châtelet

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Andrés Hierro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y María Molero

RESUMEN

		Ejemplos
Permutaciones	Se considera sólo el **orden**. $P_n = n!$	$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Variaciones con repetición	Se consideran el **orden** y los **elementos**. Los elementos pueden **repetirse**. $VR_{m,n} = m^n$.	$VR_{2,4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
Variaciones sin repetición	Influyen el **orden** y los **elementos**. Los elementos **NO** pueden repetirse. $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$	$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!} = 120$
Combinaciones	Influyen sólo los **elementos**. $C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \binom{m}{n}$	$C_{9,7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$
Propiedades de los números combinatorios	$\binom{m}{0} = 1; \binom{m}{m} = 1; \binom{m}{n} = \binom{m}{m-n};$ $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$	$\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1; \binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10;$ $\binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} = 6 + 4$
Triángulo de Tartaglia	$\binom{0}{0}$ $\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$ $\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$ $\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$	1 1 1 1 2 1 1 3 3 1 ...
Binomio de Newton	$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$	$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Los PowerPoint siguientes son un buen resumen: Variaciones y permutaciones; Combinaciones.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Permutaciones

1. Tres nadadores echan una carrera. ¿De cuántas formas pueden llegar a la meta si no hay empates? ¿Y si son 8 nadadores?
2. Loli, Paco, Ana y Jorge quieren fotografiarse juntos, ¿de cuántas maneras pueden hacerse la fotografía? Quieren situarse de manera que alternen chicos con chicas, ¿de cuántas maneras pueden ahora hacerse la fotografía?
3. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 6 objetos distintos en 6 cajas diferentes si sólo se puede poner un objeto en cada caja?
4. En una parada de autobús hay 5 personas, ¿en cuántos órdenes distintos pueden haber llegado a la parada? Al llegar una nueva persona se apuesta con otra a que adivina el orden de llegada, ¿qué probabilidad tiene de ganar?
5. Siete chicas participan en una carrera, ¿de cuántas formas pueden llegar a la meta? No hay empates. ¿Cuál es la probabilidad de acertar el orden de llegada a la meta?
6. ¿Cuántos números distintos y de cinco cifras distintas pueden formarse con los dígitos 3, 4, 5, 6, y 7? ¿Cuántos pueden formarse si todos empiezan por 5? ¿Y si deben empezar por 5 y terminar en 7?

Variaciones

7. ¿Cuántas banderas de 3 franjas horizontales de colores distintos se pueden formar con los colores rojo, amarillo y morado? ¿Y si se dispone de 5 colores? ¿Y si se dispone de 5 colores y no es preciso que las tres franjas tengan colores distintos?
8. ¿Cuántos números de 4 cifras distintas se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? ¿Cuántos de ellos son impares? ¿Cuántos son múltiplos de 4? *Recuerda*: Un número es múltiplo de 4 si el número formado por sus dos últimas cifras es múltiplo de 4.
9. ¿Cuántos números de 4 cifras, distintas o no, se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? Calcula la suma de todos ellos. *Sugerencia*: Ordénalos de menor a mayor y suma el primero con el último, el segundo con el penúltimo, el tercero con el antepenúltimo y así sucesivamente

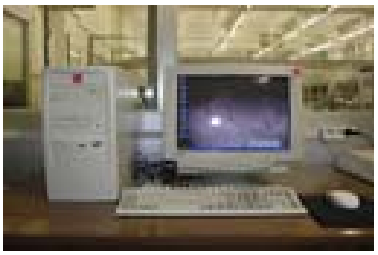
10. A Mario le encanta el cine y va a todos los estrenos. Esta semana hay seis, y decide ir cada día a uno. ¿De cuántas formas distintas puede ordenar las películas? Mala suerte. Le anuncian un examen y decide ir al cine solamente el martes, el jueves y el sábado. ¿Entre cuántas películas puede elegir el primer día? ¿Y el segundo? ¿Y el tercero?
11. Con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, ¿cuántos números de cuatro cifras diferentes se pueden formar? (*Observa:* Si comienza por 0 no es un número de cuatro cifras). ¿Cuántos son menores de 3000?

BY NC SA

12. Con las letras de la palabra "ARQUETIPO" ¿Cuántas palabras de 6 letras se pueden formar que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas? a) Si todas las letras son distintas. b) Si se pueden repetir letras.

13. ¿Cuántos números de tres cifras, diferentes o no, se pueden formar? De éstos, ¿cuántos son mayores que 123?

14. El lenguaje del ordenador está escrito en secuencias de ceros y unos (dígitos binarios o bits) de tamaño fijo. En el contexto de la informática, estas cadenas de bits se denominan palabras. Los ordenadores normalmente tienen un tamaño de palabra de 8, 16, 32 ó 64 bits. El código ASCII con el que se representaban inicialmente los caracteres para transmisión telegráfica tenía 7 bits. Después se aplicó a los ordenadores personales, ampliándolo a 8 bits que es lo que se denomina un byte o ASCII extendido. Más tarde se sustituyo por Unicode, con una longitud variable de más de 16 bits. ¿Cuántos bytes diferentes (8 dígitos) se pueden formar? En un ordenador cuya longitud de palabra tuvieran 16 dígitos, ¿cuántas se podrían formar que fuesen diferentes? Si existiera un ordenador cuya longitud de palabra tuviera 4 dígitos, ¿se podría escribir con ellos las letras del alfabeto?



Combinaciones

15. Escribe dos números combinatorios con elementos diferentes que sean iguales y otros dos que sean distintos.

16. Tienes siete bolas de igual tamaño, cuatro blancas y tres negras, si las colocas en fila. ¿De cuántas formas puede ordenarlas?

17. Con 5 latas de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de 3 colores podrás hacer?

18. Calcula: a) $\binom{6}{3}$; b) $\binom{8}{5}$; c) $\binom{20}{1}$; d) $\binom{34}{0}$; e) $\binom{47}{47}$.

19. Calcula: a) $C_{9,3}$; b) $C_{10,6}$; c) $C_{8,4}$; d) $C_{20,19}$; e) $C_{47,1}$.

20. ¿De cuántas maneras se puede elegir una delegación de 4 estudiantes de un grupo de 30? ¿Y en tu propio grupo?

21. ¿Cuántos productos diferentes se pueden formar con los números: 2, 1/3, 7, 5 y π tomándolos de 3 en 3? ¿Cuántos de esos productos darán como resultado un número entero? ¿Cuántos un número racional no entero? ¿Cuántos un número irracional?

22. ¿Cuántas aleaciones de 3 metales pueden hacerse con 7 tipos distintos de metal?

23. Calcula:

a) $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$

b) $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$

c) ¿Cuál es la forma más fácil de calcular $\binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}$ sin calcular cada uno de los números combinatorios?

24. ¿De cuántas formas puedes separar un grupo de 10 estudiantes en dos grupos de 3 y 7 estudiantes respectivamente?

25. Una asignatura se compone de 20 temas y se va a realizar un examen en el que caen preguntas de dos temas. ¿Cuántas posibilidades hay para elegir los temas que caen? Si sólo has estudiado 16 temas. ¿Cuántas posibilidades hay de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Cuál es la probabilidad de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Y la de que te toque sólo un tema que no te sepas?

26. Un grupo de 10 alumnos de 4º de ESO van a visitar un museo en el que pueden elegir entre dos actividades diferentes. ¿Cuántas formas distintas puede haber de formar los grupos de alumnos?

27. Desarrolla el binomio a) $(4-x)^5$; b) $(3-2x)^4$; c) $(2ab-3c)^6$; d) $(\frac{x}{2}-\sqrt{2x})^3$.

28. Calcula x en las siguientes expresiones:

a) $\binom{6}{4}+\binom{6}{x}=\binom{x+2}{x}$ b) $\binom{10}{x}=\binom{10}{x+2}$

c) $\binom{7}{4}+\binom{7}{x}=\binom{x+3}{x}$ d) $\binom{12}{x}=\binom{12}{x+2}$

29. Escribe el valor de x en las igualdades siguientes:

a) $\binom{4}{3}=\binom{4}{x}$, $x \neq 3$; b) $\binom{7}{3}=\binom{7}{x}$, $x \neq 3$; c) $\binom{4}{3}=\binom{3}{x}+\binom{3}{2}$;

d) $\binom{2x+1}{5}=\binom{8}{x}+\binom{8}{5}$; e) $\binom{7}{x-3}=\binom{6}{3}+\binom{x}{2}$; f) $\binom{7}{x}=\binom{7}{x+1}$

30. Calcula en función de n la suma de los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{n}{3}+\binom{n}{4}$ b) $\binom{n}{2}+n$ c) $\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}$

31. Halla el sexto término en el desarrollo de: $\left(\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{10}$

32. Halla el coeficiente de x^2 en el desarrollo de: $(-1 - 5x)^9$.

33. ¿Cuántas opciones hay para elegir cuatro asignaturas entre siete optativas?

34. Se juega una partida de tiro al plato en la que se lanzan sucesivamente doce platos. ¿Cuál es el número de sucesos en los que se obtienen cuatro éxitos, es decir se acierta cuatro veces en el blanco? En el mismo caso anterior, ¿cuál es la probabilidad de tener éxito en el último tiro?

Problemas

35. En "*Curiosidades y Revista*" tienes el problema de *Buteo*. Con 7 discos y 6 letras en cada disco, ¿cuántas combinaciones distintas se pueden hacer? *Ayuda:* En el primer disco podemos poner cualquiera de las 6 letras. Lo mismo en el segundo. ¿Y en el tercero? ¡Pero si es facilísimo! Si ya sabemos resolverlo.

36. En un restaurante hay 5 primeros platos, 4 segundos y 6 postres, ¿de cuántas formas diferentes se puede combinar el menú?

37. Lanzamos una moneda y luego un dado, ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener? ¿Y si lanzamos dos monedas y un dado? ¿Y si fuesen 3 monedas y 2 dados?

38. Se están eligiendo los actores y actrices para hacer de protagonistas en una teleserie. Se han presentado 6 chicos y 8 chicas. ¿Cuántas parejas distintas podrían formarse?

39. Una caja de un conocido juego educativo tiene figuras rojas, amarillas y azules, que pueden ser triángulos, círculo o cuadrados, y de dos tamaños, grandes y pequeñas. ¿De cuántas piezas consta la caja?

40. En un restaurante hay 8 primeros platos y 5 segundos, ¿cuántos tipos de postres debe elaborar el restaurante para poder asegurar un menú diferente los 365 días del año?

41. En una reunión todas las personas se saludan estrechándose la mano. Sabiendo que hubo 91 saludos. ¿Cuántas personas había? Y si hubo 45 saludos, ¿cuántas personas había?

42. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 5 objetos distintos en 5 cajas diferentes si sólo se puede poner un objeto en cada caja? ¿Y si se pueden poner varios objetos en cada caja colocando todos? ¿Cuál es la probabilidad de que en la primera caja no haya ningún objeto?

43. La mayor parte de las contraseñas de las tarjetas de crédito son números de 4 cifras. ¿Cuántas posibles contraseñas podemos formar? ¿Cuántas tienen algún número repetido? ¿Cuántas tienen un número repetido dos veces?

44. Tenemos 10 rectas en el plano que se cortan 2 a 2, es decir, no hay rectas paralelas. ¿Cuántos son los puntos de intersección?, ¿y si tienes 15 rectas?, ¿y si tienes *n* rectas?

45. ¿Cuántas diagonales tiene un octógono regular?, ¿y un polígono regular de 20 lados?

46. ¿Cuántas diagonales tiene un icosaedro regular?, ¿y un dodecaedro regular? *Ayuda*: Recuerda que el icosaedro y el dodecaedro son poliedros duales, es decir, el número de caras de uno coincide con el número de vértices del otro. Para saber el número de aristas puedes utilizar la *Relación de Euler*: C + V = A + 2

47. ¿Cuántos números diferentes de 5 cifras distintas puedes formar con los dígitos 1, 2, 3, 5 y 7? ¿Cuántos que sean múltiplos de 5? ¿Cuántos que empiecen por 2? ¿Cuántos que además de empezar por 2 terminen en 7?

48. Con 5 bolas de 3 colores distintos, a) ¿Cuántas filas diferentes puedes formar? b) ¿Cuántas pulseras distintas puedes formar?

49. Hace muchos años las placas de matrícula eran como esta: M 677573; luego fueron como ésta: M 1234 AB; y actualmente como ésta: 6068 BPD. Investiga qué ventajas tiene cada uno de estos cambios respecto al anterior.

50. Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, ¿cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar? Calcula la suma de todos estos números.

51. Calcula *x* en los siguientes casos: a) $V_{x,3} = C_{x,2}$ b) $V_{x,5} = 6\ V_{x,3}$ c) $\dfrac{C_{x+1,4}}{C_{x,2}} = \dfrac{7}{3}$

52. Iker y María juegan al tenis y deciden que gana aquel que primero gane 3 sets. ¿Cuál es el número máximo de sets que tendrán que disputar? ¿Cuántos desarrollos posibles puede tener el encuentro?

53. Pedro conoció ayer a una chica. Lo pasaron muy bien y ella le dio su número de móvil, pero él no llevaba su móvil ni bolígrafo. Pensó que se acordaría, pero… sólo recuerda que empezaba por 656, que había otras cuatro que eran todas distintas entre sí y menores que 5. Calcula cuántas posibilidades tiene de acertar si marca un número. Demasiadas. Hace memoria y recuerda que las dos últimas son 77. ¿Cuántas posibilidades hay ahora de acertar haciendo una llamada?

54. Un club de alpinistas ha organizado una expedición al Kilimanjaro formada por 11 personas, 7 expertos y 4 que están en formación. En un determinado tramo sólo pueden ir 3 expertos y 2 que no lo sean, ¿de cuántas formas puede estar compuesto ese equipo de 5 personas? Tu eres un experto, y vas a ir en ese tramo, ¿cuántas formas hay ahora de componerlo?

55. En un festival de cortometrajes con 15 participantes, se reparten 3000 euros en premios. Indica el número de formas diferentes de realizar el reparto, según cada una de las tres modalidades propuestas.

a. *Modalidad A:* Se reparten tres premios de 1000 euros a tres cortometrajes elegidos por un jurado.

b. Modalidad B: Se realiza una votación y se entregan 1500 euros al más votado, 1000 al segundo y 500 al tercero.

c. *Modalidad C*: Se entregan tres premios de 1000 euros cada uno en tres categorías: mejor guión, mejor realización y mejor interpretación. Nota: Podría ocurrir que un cortometraje fuera el mejor en varias categorías.

56. En los billetes de una línea de autobuses van impresos los nombres de la estación de partida y de la de llegada. Hay en total 8 posibles estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir la empresa de autobuses? Ahora quieren cambiar el formato y sólo imprimir el precio, que es proporcional a la distancia. Las distancias entre las estaciones son todas distintas. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir en este caso?

57. Una pareja tiene un hijo de 3 años que entra en la guardería a las 9 de la mañana. El padre trabaja en una fábrica que tiene 3 turnos mensuales rotativos: de 0 a 8, de 8 a 16 y de 16 a 24 horas. La madre trabaja en un supermercado que tiene dos turnos rotativos mensuales, de 8 a 14 y de 14 a 20 horas. ¿Cuántos días al año, por término medio, no podrá ninguno de los dos llevar a su hijo a la guardería?

58. Un tiro al blanco tiene 10 caballitos numerados que giran. Si se acierta a uno de ellos se enciende una luz con el número del caballito. Tiras 3 veces, ¿de cuántas maneras se pueden encender las luces? ¿Y si el primer tiro no da a ningún caballito?

59. En una fiesta hay 7 chicas y 7 chicos. Juan baila siempre con Ana. Antonio es el más decidido y siempre sale a bailar el primero, ¿de cuántas formas puede elegir pareja en los próximos 4 bailes?

60. Con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5:

a) ¿Cuántos números de cinco cifras se pueden formar?
b) ¿Cuántos hay con dos veces la cifra 1 y tres la cifra 2?
c) Calcula la suma de todos estos últimos números.

61. ¿Cuántas palabras, con o sin sentido, se pueden formar con las letras de la palabra “puerta” que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas?

62. ¿Cuántos números capicúas de dos cifras existen? ¿Y de tres cifras? ¿Y de cuatro cifras?

63. Con las letras de la palabra “ARGUMENTO” ¿Cuántas palabras de 5 letras se pueden formar que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas? a) Si todas las letras son distintas. b) Si se pueden repetir letras.

64. ¿Cuántos números hay entre el 6 000 y el 9 000 que tengan todas sus cifras distintas?

65. Una fábrica de juguetes tiene a la venta 8 modelos distintos. ¿Cuántos muestrarios distintos puede hacer de 4 juguetes cada uno? ¿Cuál es la probabilidad de que el último modelo de avión fabricado llegue a un determinado cliente? Si se quiere que en esos muestrarios siempre esté el último modelo de juguete fabricado, ¿cuántos muestrarios distintos puede hacer ahora?

66. La primera obra impresa con resultados de Combinatoria es "Summa" de *Luca Pacioli*, de 1494. En esta obra se propone el siguiente problema: ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse cuatro personas en una mesa circular?

67. ¿Cuántos números de cuatro cifras tienen al menos un 5?

68. En una compañía militar hay 10 soldados, ¿cuántas guardias de 3 soldados pueden hacerse? Uno de los soldados es Alejandro, ¿en cuántas de estas guardias estará? ¿Y en cuántas no estará?

69. La encargada de un guardarropa se ha distraído, y sabe que de los cinco últimos bolsos que ha recogido a tres bolsos les ha puesto el resguardo equivocado y a dos no. ¿De cuántas formas se puede haber producido el error? ¿Y si fuesen dos los equivocados?

70. Con las letras de la palabra "SABER", ¿cuántas palabras, con o sin sentido, de letras diferentes, se pueden formar que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas. Lo mismo para las palabras "CORTE", "PUERTA" y "ALBERTO".

71. Con las letras de la palabra GRUPO, ¿cuántas palabras de 5 letras con o sin sentido se pueden formar que tengan alguna letra repetida?

72. Un joven tiene en su armario 10 camisetas, 5 pantalones y tres pares de zapatillas. Sabiendo que tiene que hacer el equipaje para un campamento y solo puede meter en la mochila cuatro camisetas, tres pantalones y dos pares de zapatillas, ¿de cuántas maneras diferentes podrá llenar la mochila?

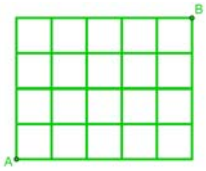
73. Con los dígitos 1, 3 y 5, ¿cuántos números menores de 6 000 se pueden formar? ¿Cuántos hay con 4 cifras que tengan dos veces la cifra 5?

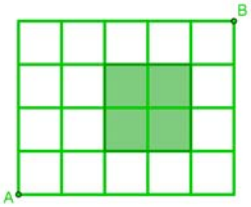
74. Caminos en una cuadrícula:

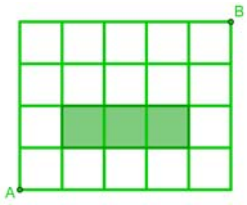
a) ¿Cuántos caminos hay para ir de A hasta B si sólo podemos ir hacia la derecha y hacia arriba?

b) Si no podemos atravesar el cuadrado verde, ni caminar por sus lados, ¿cuántas formas tenemos ahora para ir desde A hacia B?

c) Si no podemos atravesar el rectángulo verde, ni caminar por sus lados, ¿cuántas formas tenemos ahora para ir desde A hacia B?







Generalización

d) ¿Cuántos caminos hay en una cuadrícula cuadrada con *n* cuadrados en cada lado?

e) ¿Cuántos caminos hay en una cuadrícula rectangular con *m* cuadrados verticales y *n* horizontales?

Autoras: Adela Salvador y María Molero
Revisores: Andrés Hierro y Sergio Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y María Molero

AUTOEVALUACIÓN

1. Tienes nueve monedas iguales que colocas en fila. Si cuatro muestran la cara y cinco la cruz ¿De cuántas formas distintas puedes ordenarlas?

a) $V_{9,4}$ b) P_9 c) $C_{9,5}$ d) $VR_{9,5}$

2. En una compañía aérea hay diez auxiliares de vuelo, y un avión necesita llevar cuatro en su tripulación, ¿de cuántas formas se pueden elegir?

a) $V_{10,4}$ b) P_{10} c) $C_{10,4}$ d) $VR_{10,4}$

3. ¿Cuántos productos distintos pueden obtenerse con tres factores diferentes elegidos entre los dígitos: 2, 3, 5 y 7?

a) $V_{4,3}$ b) P_4 c) $C_{4,3}$ d) $VR_{4,3}$

4. Tenemos cinco objetos distintos y queremos guardarlos en cinco cajas diferentes, poniendo un objeto en cada caja, ¿de cuántas formas podemos hacerlo?

a) $V_{5,1}$ b) P_5 c) $C_{5,5}$ d) $VR_{5,1}$

5. Permutaciones de n+4 elementos dividido entre permutaciones de n+1 elementos es igual a:

a) $(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2) = \dfrac{(n+4)!}{(n+1)!}$ b) $V_{n+4,n+2}$ c) $\dfrac{(n+4)!}{n!}$ *d)* $V_{n+4,n+2}/ C_{n+4,n+1}$

6. Las variaciones de 10 elementos tomados de 6 en 6 es igual a

a) $VR_{6,10}$ b) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \dfrac{10!}{6!}$ c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \dfrac{10!}{4!}$ d) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \dfrac{6!}{3!}$

7. Indica qué afirmación es falsa

a) 0! = 1 b) $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n)$ c) $VR_{m,n} = m^n$ d) $P_n = n!$

8. El valor de los siguientes números combinatorios $\binom{5}{0}, \binom{9}{9}, \binom{4}{1}$ es:

a) 0, 1, y 1 b) 0, 9 y 4 c) 1, 1 y 4 d) 5, 9 y 4

9. El valor de x, distinto de 4, en la igualdad $\binom{7}{4} = \binom{7}{x}$ es:

a) 3 b) 7 c) 1 d) 0

10. El coeficiente del término cuarto del desarrollo del Binomio de Newton de $(a + b)^7$ es:

a) $\binom{7}{3}$ b) 1 c) $\binom{7}{4}$ d) $V_{7,4}$

Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas.

4ºB ESO
Capítulo 15:
Azar y Probabilidad

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-044035

Fecha y hora de registro: 2014-05-28 18:15:35.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Fernando Blasco

Revisora: Raquel Caro

Ilustraciones: Fernando Blasco, Banco de Imágenes de INTEF y Wikimedia

1. EXPERIENCIA Y PROBABILIDAD

1.1. LA LEY DE LAPLACE

1.2. SACANDO BOLAS DE UNA BOLSA

1.3. MEZCLANDO CARTAS

2. PROFUNDIZANDO EN LA TEORÍA

2.1. COMBINATORIA PARA CONTAR

2.2. NOMENCLATURA EN PROBABILIDAD

2.3. NO TODOS LOS SUCESOS TIENEN LA MISMA PROBABILIDAD

2.4. USO DE DIAGRAMAS DE ÁRBOL

2.5. PROBABILIDAD CONDICIONADA

3. CÁLCULO DE PROBABILIDADES

3.1. EJEMPLOS COMUNES

3.2. COSAS SORPRENDENTES

3.3. COSAS AÚN MÁS SORPRENDENTES

Resumen

Todos los días utilizamos conceptos probabilísticos informalmente: decidimos si llevarnos abrigo o no cuando salimos por la mañana de casa, jugamos a juegos de azar o de estrategia, leemos estadísticas y sondeos o nos preguntamos si hoy lloverá. Sin embargo nuestra intuición probabilística no está muy desarrollada. En este capítulo introducimos algunas reglas probabilísticas formales y mostramos como se puede utilizar la combinatoria o los diagramas de árbol para calcular probabilidades. En realidad, el único secreto consiste en ser capaces de contar bien. Con estos conocimientos no dejaremos que otros manipulen estadísticas. El conocimiento nos dará la clave para tomar decisiones propias.

También mostraremos algunos ejemplos que pueden parecer contrarios a nuestra intuición. Hay hechos que, haciendo las cuentas, resultan mucho más probables de lo que nos parece a simple vista. Conocerlos nos ayudará a distinguir otros casos similares.

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia
Textos Marea Verde

1. EXPERIENCIA Y PROBABILIDAD

1.1. La ley de Laplace

Todos los días estamos obligados a calcular probabilidades, aunque sea de modo intuitivo: ¿ganará la Liga mi equipo favorito?, ¿lloverá mañana?, ¿le gustaré a esa persona "especial" que hay en clase?, ¿me darán una beca?

A cada suceso se le puede asignar una **probabilidad**, que es un número comprendido entre 0 y 1. Cuanto mayor sea la posibilidad de que ese suceso ocurra, el número que indica la probabilidad será más próximo a 1 y si tenemos pocas opciones de que ocurra ese hecho, su probabilidad estará próxima a 0.

Nuestra experiencia (y también la teoría que puedes consultar en los Apuntes Marea Verde de 3º ESO) nos ayuda a calcular probabilidades mediante **la Ley de *Laplace*** en el caso en el que todos los casos sean equiprobables (esto es, no haya sucesos simples que tengan más probabilidad de salir que otros).

La regla de *Laplace* está basada en el *principio de razón insuficiente*: si a priori no existe ninguna razón para suponer que un resultado se puede presentar con más probabilidad que los demás, podemos considerar que todos los resultados tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

$$P(S)=\frac{\textit{número de casos favorables al suceso S}}{\textit{número de casos posibles}}$$

Un poco más adelante en este capítulo vamos a volver a formalizar (y ampliar) la matemática que hay debajo del cálculo de probabilidades, pero preferimos ahora mostrar unos cuantos ejemplos que nos sirvan para entrenar nuestra intuición.

Ejemplos:

- *En una clase hay* 16 *chicos y* 17 *chicas. Como no se presenta nadie para ser delegado se hace un sorteo. ¿Cuál es la probabilidad de que en la clase haya delegada?*

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia
Textos Marea Verde

Como hay 17 chicas (los casos favorables) sobre una población de 33 individuos, de acuerdo con la Ley de *Laplace*, la probabilidad pedida es

$$P(S)=\frac{\text{número de casos favorables al suceso } S}{\text{número de casos posibles}}=\frac{17}{33}$$

- *En el monedero tenemos 7 monedas de 1 céntimo, 5 monedas de 5 céntimos, 6 monedas de 10 céntimos y 3 monedas de 50 céntimos. Sacamos una moneda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la cantidad obtenida sea un número par de céntimos?*

Al sacar una moneda, para tener un número par de céntimos tiene que ser de 10 c o de 50 c. Por tanto el total de casos favorables es de 9 (hay 6 de 10 y 3 de 50). El número de casos posibles es el de monedas que tenemos en el monedero, que son 7 + 5 + 6 + 3 = 21.

La probabilidad de obtener un número par de céntimos es $P(par)=\frac{casos\,favorables}{casos\,posibles}=\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$.

Actividades propuestas

1. En una caja tenemos mezclados 25 clavos de 2 cm de largo, 15 clavos de 3 cm, 20 clavos de 2,5 cm y 40 clavos de 3,5 cm. Sacamos al azar un clavo de la caja (se asume que todos los clavos tienen la misma probabilidad de ser elegidos). ¿Qué probabilidad hay de que el clavo extraído tenga la menor longitud?

2. a) La ruleta francesa consta de los números que van del 0 al 36. Si sale 0 gana la banca. Decidimos apostar a "*par*" (ganaremos si sale un número par no nulo). ¿Qué probabilidad tenemos de ganar la apuesta?

b) La ruleta americana consta de un 0, un 00 y de los números que van del 1 al 36. Si sale 0 o 00 gana la banca. Decidimos apostar a "*par*" (ganaremos si sale un número par no nulo). ¿Qué probabilidad tenemos de ganar la apuesta?

3. En un instituto de 800 alumnos hay 400 estudiantes que hablan inglés, 300 que hablan francés, 100 que hablan alemán, 100 que hablan inglés y francés, 80 que hablan inglés y alemán, 50 que hablan francés y alemán y 30 que hablan los tres idiomas.

Se elige un estudiante al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que hable solamente una lengua extranjera?

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia
Textos Marea Verde

1.2. Sacando bolas de una bolsa

Una forma sencilla de hacernos una idea de los conceptos probabilísticos es hacer *experimentos* con objetos conocidos. Por ejemplo, son muy típicos los problemas en los que sacamos bolas (o caramelos, o papeletas, …) de una bolsa.

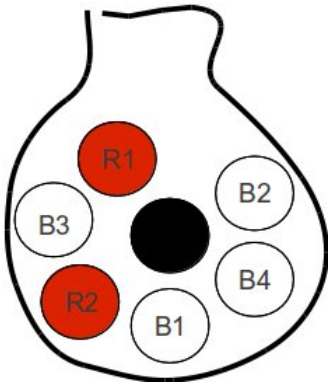
Ejemplo:

- *Una bolsa contiene* 4 *bolas blancas,* 2 *bolas rojas y una bola negra.*

a) Se extraen dos bolas al mismo tiempo. ¿Cuál es la probabilidad de que sean una blanca y una negra?
b) Se extrae una bola de la bolsa. Después se saca una segunda bola, sin volver a meter en la bolsa la primera. ¿Cuál es la probabilidad de que tras la segunda extracción tengamos una bola blanca y una bola negra?
c) Se extrae una bola de la bolsa. Después se saca una segunda bola, sin volver a meter en la bolsa la primera. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea blanca y la segunda negra?
d) Se extrae una bola de la bolsa. Tras mirar de qué color se introduce en la bolsa de nuevo. Se saca una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea blanca y la segunda negra?
e) Se extrae una bola de la bolsa. Tras mirar de qué color se introduce en la bolsa de nuevo. Se saca una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos veces haya salido la bola negra?
f) Se extrae una bola de la bolsa. Tras mirar de qué color se introduce en la bolsa de nuevo. Se saca una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos veces haya salido una bola blanca?

Hay muchas maneras de resolver estos ejemplos. La clave está en contar bien los casos que aparecen. Emplearemos métodos distintos, que vamos a desarrollar después a lo largo del capítulo.

a) Aunque no nos digan nada en el problema, y aunque las bolas sean indistinguibles, vamos a imaginar que cada una tiene un número escrito, como las bolas de billar americano. Eso nos ayudará a contar. Así, la situación es la representada en la figura



Formalmente no nos importa en qué orden salen las bolas. En principio cogemos las dos al mismo tiempo.

Los casos favorables son

Los casos posibles son las combinaciones de 7 elementos tomados de 2 en 2. Esto es,

$$C_{7,2} = \binom{7}{2} = 21$$

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia
Textos Marea Verde

Así, la probabilidad pedida es $\frac{4}{21}$.

b) Aunque parezca distinto por cómo lo hemos enunciado, en este ejemplo preguntamos exactamente lo mismo que en el ejemplo (a). En efecto, solo nos interesa lo que ocurre tras la segunda extracción. Así que ya sabemos el resultado.
Si quisiéramos podríamos plantearlo teniendo en cuenta el orden en el que salen las bolas. En ese caso, para contar el total de casos posibles tendremos que utilizar variaciones de 7 elementos tomados de 2 en 2.

Casos favorables: B1 N, B2 N, B3 N, B4 N, N B1, N B2, N B3, N B4 (se considera orden de extracción)
Casos posibles: son todas las formas de elegir una pareja de bolas en las que sí importa el orden de elección (primero se saca una y después otra)

$$V_{7,2} = 7 \cdot 6 = 42$$

Así, la probabilidad pedida es $\frac{casos\,favorables}{casos\,posibles} = \frac{8}{42} = \frac{4}{21}$

c) Este ejemplo cambia con respecto al anterior en que sí nos importa el orden en el que salen las bolas.
Casos favorables: B1 N, B2 N, B3 N, B4 N
Casos posibles

$$V_{7,2} = 7 \cdot 6 = 42$$

Probabilidad = $\frac{casos\,favorables}{casos\,posibles} = \frac{4}{42} = \frac{2}{21}$.

d) En este ejemplo los casos favorables son los mismos que en el ejemplo anterior. Pero hay muchas más posibilidades, puesto que volvemos a introducir en la bolsa la bola que hemos sacado en la primera extracción. Para contar el número de casos posibles se utilizan las *variaciones con repetición.*
Casos favorables: B1 N, B2 N, B3 N, B4 N

Casos posibles:

$$VR_{7,2} = 7^2 = 49$$

Probabilidad = $\frac{casos\,favorables}{casos\,posibles} = \frac{4}{49}$.

e) En este ejemplo hay un único caso favorable: que salga la bola negra 2 veces. El número de casos posibles es el que hemos calculado en el ejemplo anterior, puesto que realizamos dos extracciones y nos importa el orden.
Casos favorables: N N
Casos posibles:

$$VR_{7,2} = 7^2 = 49$$

Textos Marea Verde

$$\text{Probabilidad} = \frac{casos\,favorables}{casos\,posibles} = \frac{1}{49}$$

f) En esta ocasión volvemos a tener el mismo número de casos posibles que en los dos ejemplos anteriores. Lo que cambia es el modo de contar el número de casos favorables. Podemos hacerlo "a lo bestia" o bien utilizando combinatoria, que para eso la hemos estudiado.

Los casos posibles son B1 B1, B1 B2, B1 B3, B1 B4, B2 B1, B2 B2, B2 B3, B2 B4, B3 B1, B3 B2, B3 B3, B3 B4, B4 B1, B4 B2, B4 B3, B4 B4. Es decir, 16 casos.

Lo podríamos haber calculado de una forma mucho más sencilla teniendo en cuenta que hay 4 bolas blancas y se extraen, con reemplazamiento, 2 veces. Eso da lugar a un problema típico de variaciones con repetición.
Casos favorables:

$$VR_{4,2} = 4^2 = 16$$

Casos posibles:

$$VR_{7,2} = 7^2 = 49$$

$$\text{Probabilidad} = \frac{casos\,favorables}{casos\,posibles} = \frac{16}{49}$$

Actividades propuestas

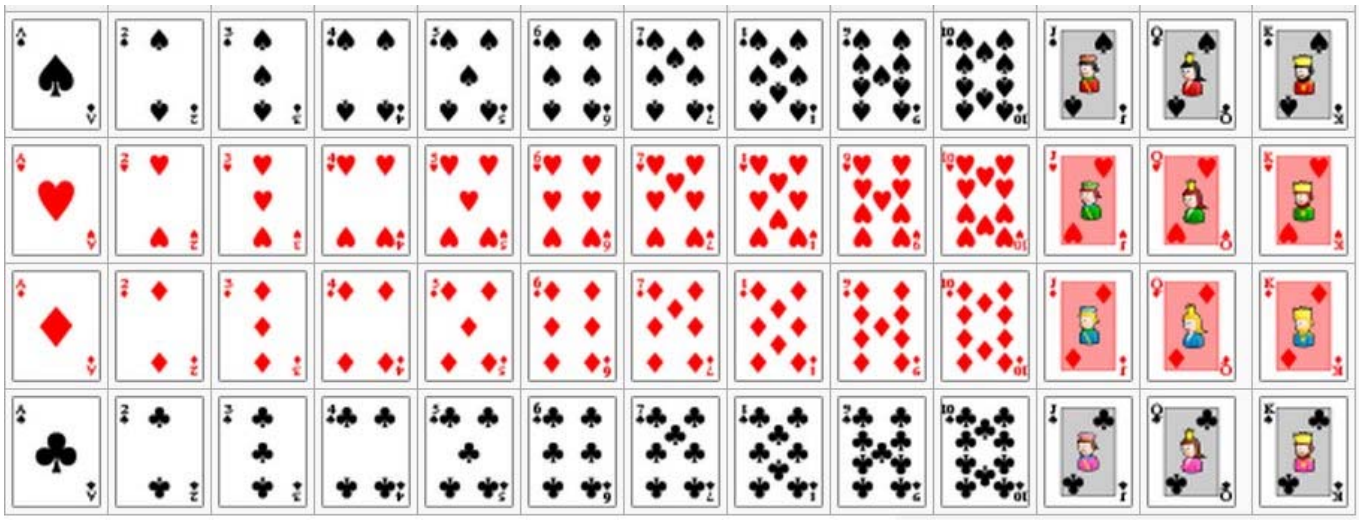
4. Vuelve a hacer todos los apartados del ejemplo anterior pero sustituyendo en cada caso "bola blanca" por "bola roja".

5. En la lotería primitiva una apuesta consiste en marcar 6 casillas de entre 49 posibles. El día del sorteo se extraen 6 bolas (de entre 49). ¿Cuál es la probabilidad de que tu apuesta coincida con la combinación ganadora? ¿Cuál es la probabilidad de que aciertes 5 números? ¿Y la de que aciertes 4 números?

1.3. Mezclando cartas

En una baraja americana tenemos 4 palos: picas, corazones, tréboles y diamantes. Las cartas de picas y de tréboles son negras, mientras que los diamantes y los corazones son cartas rojas. Cada palo tiene 13 cartas, de las que hay cartas con números del 1 al 10 y 3 figuras: la sota (J), la dama (Q) y el rey (K). En la baraja francesa (la original, pero menos vista) en lugar de aparecer J, Q, K aparecen V, D, R (Valet, Dame y Roi). Además, la baraja tiene 2 comodines, pero no los vamos a utilizar en nuestros ejemplos.

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia
Textos Marea Verde



Las mezclas de cartas tienen propiedades muy interesantes. De hecho hay muchos juegos de cartomagia que se basan en propiedades matemáticas de las mezclas (y no precisamente probabilísticas). En los ejemplos que vamos a ver a continuación supondremos siempre que trabajamos con una baraja bien mezclada y la extracción de las cartas se hará siempre de forma aleatoria.

Ejemplos:

- *Se reparten al azar* 5 *cartas de una baraja de póker. ¿Cuál es la probabilidad de que tengas* 4 *cartas del mismo valor?* (esa es la jugada que se llama *póker*).

No nos importa el orden, con lo que el número de manos posibles se calcula mediante combinaciones. Esto es,

$$C_{52,5} = \binom{52}{5} = 2\,598960.$$

Para contar el número de casos favorables pensaremos, de momento, en algo más concreto: cuántas posibilidades hay de obtener un *póker de ases*

La mano que nos interesa es A A A A * , donde * puede ser cualquier carta. Hay 12 posibilidades para esto. En efecto, la única elección posible es la carta que acompaña a los ases.

Así, como tenemos 13 posibles valores (del As al 10 y las 3 figuras), hay 13 · 12 = 156 casos favorables. Con ello, la probabilidad pedida es

$$P(\text{poker}) = \frac{casos\,favorables}{casos\,posibles} = \frac{156}{2598960} = \frac{39}{649740}$$

- *Una jugada de* 5 *cartas se llama full si en ella hay* 3 *cartas de un valor y otras* 2 *de un valor distinto. ¿Cuál es la probabilidad de conseguir un full de Ases y Doses, esto es, AAA 22?*

Los casos posibles son los mismos de antes: el número de posibles jugadas de 5 cartas.
Para conseguir AAA tenemos 4 cartas (los 4 ases) de los que debemos escoger 3. Se calculan con combinaciones.

$$C_{4,3} = \binom{4}{3} = 4.$$

Para conseguir los doses tenemos que elegir 2 doses de entre 4. Volvemos a utilizar combinaciones.

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia
Textos Marea Verde

$$C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6.$$

Combinando las 4 posibilidades que tenemos para conseguir los 3 ases y las 6 posibilidades que tenemos para conseguir los 2 doses, nos queda un total de 24 formas de conseguir ese full de Ases y Doses.
Así,

$$P(AAA22) = \frac{casos\,favorables}{casos\,posibles} = \frac{24}{2598960} = \frac{1}{108290}$$

- *¿Cuál es la probabilidad de conseguir un full (independientemente de su composición)?*

En el ejemplo anterior hemos calculado la probabilidad de conseguir un full concreto: el full AAA22.

Pero para conseguir un full arbitrario tenemos 13 posibilidades de elección para las 3 cartas del mismo valor y 12 para elegir las otras 2 cartas (claro, ya no podemos usar el valor que hemos elegido para el trío). Así, hay 13 · 12 posibilidades de conseguir un full concreto.

Como un full fijado se podía obtener de 24 formas diferentes (lo hemos calculado en el ejemplo anterior), el total de casos favorables es

Casos favorables = 13 · 12 · 24 = 3744.

Y así

$$P(full) = \frac{3744}{2598960} = \frac{78}{54145}.$$

Actividades propuestas

6. a) Se llama *trío* a la jugada que consiste en 3 cartas del mismo valor y otras dos de diferente valor al de esas 3 y además con diferentes valores entre sí. Calcula la probabilidad de obtener un *trío de ases* en una jugada de 5 cartas.

b) Calcula la probabilidad de obtener un *trío* cualquiera.

7. a) Se llama *escalera de color* a una jugada compuesta por 5 cartas del mismo palo ordenadas consecutivamente. Calcula la probabilidad de obtener esta *escalera de color*:

b) Calcula la probabilidad de obtener una *escalera de color* cualquiera.

8. Se llama *color* a una jugada compuesta por 5 cartas del mismo palo que no son consecutivas. Calcula la probabilidad de obtener *color* en una jugada.

Textos Marea Verde
Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia

2. PROFUNDIZANDO EN LA TEORÍA

2.1. Combinatoria para poder contar

Los ejemplos que hemos hecho al principio del capítulo muestran lo importante que es el dominio de la combinatoria para contar los casos favorables y los casos posibles que tenemos. A modo de recordatorio, incluimos un cuadro extraído del resumen del capítulo anterior:

Permutaciones	Influye sólo el **orden**. $P_n = n!$	$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Variaciones con repetición	Influye el **orden** y los **elementos**. Los elementos pueden **repetirse**. $VR_{m,n} = m^n$.	$VR_{2,4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
Variaciones sin repetición	Influye el **orden** y los **elementos**. Los elementos NO pueden repetirse. $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$	$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!} = 120$
Combinaciones	Influyen sólo los **elementos**. $C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \binom{m}{n}$	$C_{9,7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$

2.2. Nomenclatura en probabilidad

Es muy importante llamar a cada cosa por su nombre. La precisión y el lenguaje en Matemáticas pueden convertir en sencillo algo que, en principio, podría parecer muy complicado.

Un **experimento aleatorio** es una acción (experimento) cuyo resultado depende del azar.

A cada uno de los resultados posibles de un experimento aleatorio le llamaremos **caso** o **suceso elemental**.

El conjunto de todos los casos posibles se llama **espacio muestral** o **suceso seguro**.

Un **suceso** es un subconjunto del espacio muestral.

Si S es un suceso se verifica el **suceso contrario** de S siempre que no se verifica S. Lo representaremos por S^C.

Se dice que dos sucesos son **sucesos independientes** si que se verifique uno de ellos no afecta a la probabilidad de verificación del otro.

Ejemplo:

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia
Textos Marea Verde

- *Experimentos aleatorios:*

  a) Elegir una persona al azar y ver en qué día de la semana ha nacido.

  b) Sacar una carta de la baraja de póker y ver de qué palo es.

  c) Lanzar un dado de parchís y observar el número de la cara superior.

  d) Lanzar 3 monedas al aire y observar la posición en la que caen.

- *Espacios muestrales*. Para los experimentos del ejemplo anterior los espacios muestrales son, respectivamente:

  a) {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}

  b) {picas, corazones, tréboles, diamantes}

  c) {1, 2, 3, 4, 5, 6}

  d) {CCC, CCX, CXX, XXX}

- *Sucesos contrarios*. Usaremos los experimentos (a), (b), (c), (d) de este ejemplo.

  a) El suceso contrario a "un día del fin de semana" es {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes}

  b) El suceso contrario a "carta roja" es {picas, tréboles}

  c) El suceso contrario a "número múltiplo de 3" es {1, 2, 4, 5}

  d) El suceso contrario a "salen las 3 caras" es {CCX, CXX, XXX}

- *Sucesos independientes*. Usaremos los experimentos (a), (b), (c), (d) de este ejemplo.

  a) Los sucesos "haber nacido en fin de semana" y "haber nacido en lunes" son independientes. Los sucesos "haber nacido en fin de semana" y "haber nacido en domingo" son dependientes.

  b) Los sucesos "obtener una carta roja" y "obtener una carta de picas" son independientes. Los sucesos "obtener una carta roja" y "obtener una carta de corazones" son dependientes.

  c) Los sucesos "obtener un número par" y "obtener un 5" son independientes. Los sucesos "obtener un número par" y "obtener un 6" son dependientes.

  d) Los sucesos "obtener tres caras" y "obtener tres cruces" son independientes. Los sucesos "Obtener tres resultados iguales" y "obtener tres cruces" son dependientes.

Como la unión de un suceso y su suceso **contrario** es el suceso seguro, se tiene que

$$P(S^C) = 1 - P(S).$$

Cuando dos sucesos son independientes, la probabilidad de que se dé el **suceso intersección** (esto es, que se verifiquen ambos sucesos a la vez) es el producto de las probabilidades de cada uno de ellos

Textos Marea Verde

Si A y B son **independientes**,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Actividades propuestas

9. Se consideran los siguientes experimentos aleatorios:

1) Se tienen 5 fichas de Scrabble formando la palabra CASAS. Se meten en una bolsa y se extraen 3 fichas.
2) Se mezcla una baraja de póker, se corta y se mira el valor de la carta superior.
3) Un monedero contiene 4 monedas de 5 céntimos, 2 monedas de 10 céntimos y 1 moneda de 20 cm. Se extraen al azar dos monedas de él.
4) De los 30 alumnos de una clase se elige uno al azar. Se le pregunta en qué mes ha nacido.

a) Describe los espacios muestrales de cada uno de los 4 experimentos aleatorios anteriores.
b) Indica los sucesos contrarios a
   1. {AAC}
   2. {A, 2, 3, 4, 5}
   3. Sacar una cantidad par de céntimos.
   4. Haber nacido en un mes en el que seguro que es verano.
c) ¿Son independientes estos pares de sucesos?
   1. {AAC} y {{ASA}, {CAS}}
   2. “Obtener un 6” y “obtener un número par”
   3. “Obtener una cantidad par de céntimos” y “sacar dos monedas de 5 céntimos”
   4. “Haber nacido en un mes que seguro es de verano” y “haber nacido en junio”

El lenguaje es muy importante a la hora de **comprender** qué nos están pidiendo en cada caso.

2.3. No todos los sucesos tienen la misma probabilidad

Hay casos en los que intuimos perfectamente que no todos los sucesos tienen la misma probabilidad. Por ejemplo, si lanzamos un dado, la probabilidad de obtener un número par es 1/2 mientras que la de obtener un múltiplo de 3 es 1/3.

En otras ocasiones nos puede costar más.

Ejemplo

- *Considera el experimento aleatorio “mezclar una baraja, cortar y mirar el color de las dos cartas que han quedado arriba”.*
  a) Si escribimos el espacio muestral veremos que es {RR, RN, NN}. Claro: o bien las dos cartas son rojas, o bien las dos son negras, o bien hay una de cada color.
  b) Pero… ¿y si hubiésemos escrito el color de cada carta, por orden de aparición? En esta situación, los casos posibles serían {RR, RN, NR, NN}.

Textos Marea Verde

Como el lenguaje que utilizamos es imperfecto, para un mismo experimento podemos considerar dos espacios muestrales distintos. No hay problema en ello siempre que sepamos qué nos están preguntando y qué debemos hacer.

En realidad, el RN que hemos escrito en (a) se corresponde con los casos RN y NR de (b).

Trabajando con el espacio muestral de (b) todos los casos son equiprobables mientras que si trabajamos con el espacio muestral de (a) los sucesos RR y NN tienen probabilidad 1/4 mientras que RN tiene probabilidad 1/3.

Actividades resueltas

- *Se tienen* 5 *fichas de Scrabble formando la palabra* CASAS. *Se meten en una bolsa y se extraen* 3 *fichas. Da dos casos que sean equiprobables y otros dos que no lo sean.*

  Son equiprobables {AAC} y {SSC}. No son equiprobables {AAC} y {CAS}.

- *Se mezcla una baraja de póker, se corta y se suman los valores de las dos cartas superiores* (asumimos A = 1, J = 11, Q = 12, K = 13). *Da dos casos que sean equiprobables y otros dos que no lo sean.*

  En este ejemplo el espacio muestral es {2, 3, ….., 26} (los números que pueden obtenerse al sumar los valores de las dos cartas).

  Son casos equipobables {2} y {26} o {3} y {25}. No son equiprobables {2} y {3}.

- *De los* 30 *alumnos de una clase se elige uno al azar. Se le pregunta en qué mes ha nacido. Da dos casos que sean equiprobables y dos que no lo sean.*

  El espacio muestral es {enero, febrero, …, noviembre, diciembre}. En realidad no todos estos casos son equiprobables. Para saberlo tenemos que aproximar la probabilidad mediante la frecuencia relativa y para eso es necesaria la estadística. En el año 2012 los datos de nacimientos en España, por meses se reflejan en esta tabla:

enero	febrero	marzo	abril	mayo	junio	julio	agosto	sept	octubre	nov	dic
11.765	10.967	11.776	11.329	11.954	11.314	11.874	12.031	11.672	12.324	11.510	11.318

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia
Textos Marea Verde

2.4. Uso de diagramas de árbol

Ya se ha utilizado la representación en diagrama de árbol para generar variaciones, combinaciones o permutaciones. Ese mismo tipo de estructura es también útil cuando hay que calcular probabilidades.

Ejemplo

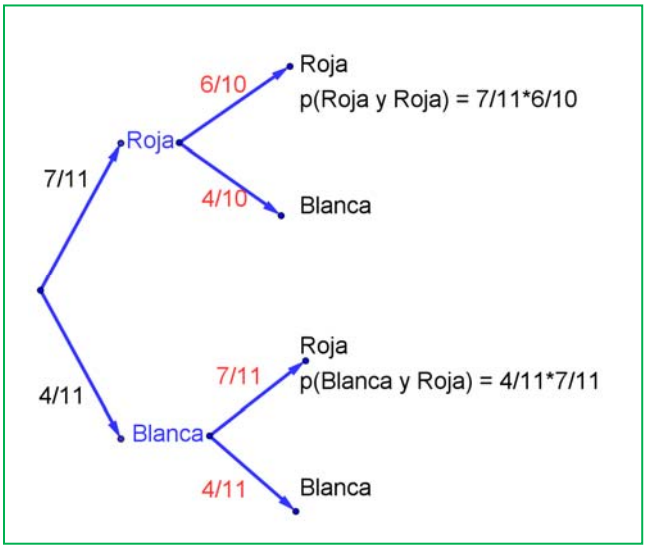
- *Tenemos una caja con 7 bolas rojas y 4 bolas blancas. Se saca una bola al azar. Si es blanca se vuelve a meter en la caja. Si es roja se deja fuera. En estas condiciones se saca otra bola de la caja. ¿Qué probabilidad hay de que esta bola sea roja?*

Pueden ocurrir dos cosas: que la bola de la primera extracción sea roja o que sea blanca.

1.- Si la bola sacada es roja (ocurre con probabilidad 7/11) la bola quedará fuera y la composición de la caja justo antes de la segunda extracción es de 6 bolas rojas y 4 bolas blancas.

La probabilidad de que en este momento se saque una bola roja es de 6/10.

2.- Si la bola sacada es blanca (ocurre con probabilidad 4/11), la bola se vuelve a meter en la caja y la composición de ésta antes de la segunda extracción será la misma que al principio. Así, la probabilidad de que en la segunda extracción salga una bola roja es de 7/11.



Se puede llegar a obtener una bola roja en la segunda extracción por dos vías: dependiendo del color de la bola que se saque en la primera extracción.

La **probabilidad total** de que salga una bola roja en la segunda extracción es:

$$P(roja) = \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{11} = \frac{411}{605}$$

Probabilidad de obtener roja en la primera extracción

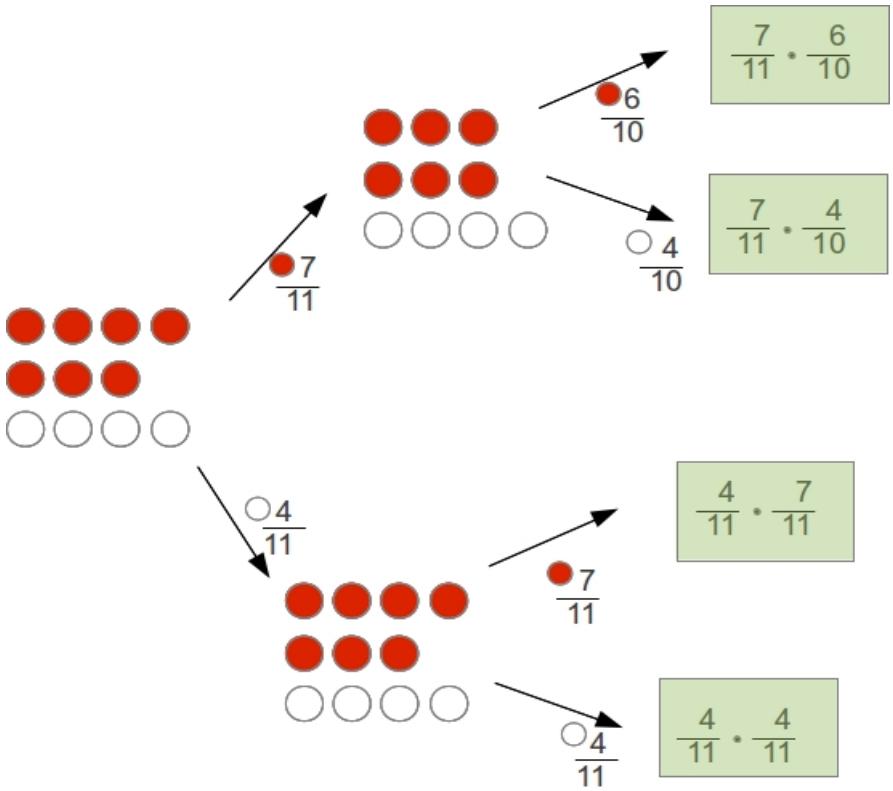
Probabilidad de obtener roja en la 2ª extracción habiendo sacado roja en la 1ª

Probabilidad de obtener blanca en la 1ª extracción

Probabilidad de obtener roja en la 2ª extracción habiendo sacado blanca en la 1ª

Todo este proceso se suele resumir y simplificar utilizando un **diagrama de árbol:**

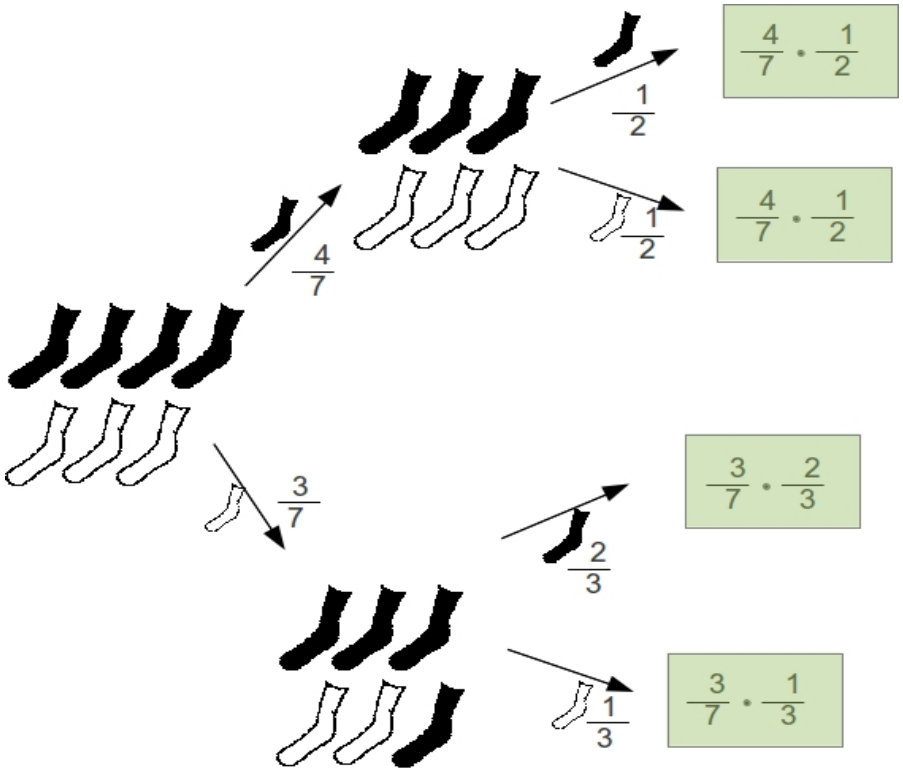
Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia
Textos Marea Verde



Actividad resuelta

- *En un cajón tenemos 7 calcetines: 4 negros y 3 blancos. Sacamos, sin mirar, dos calcetines del cajón. ¿Qué es más probable, que sean ambos del mismo color o que sean de colores distintos?*

Haremos un diagrama de árbol calculando la probabilidad de cada caso.



Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia
Textos Marea Verde

La probabilidad de que obtengamos dos calcetines negros es 2/7, de que obtengamos 2 calcetines blancos es 1/7. Así tenemos que la probabilidad de obtener dos del mismo color es 3/7, frente a la probabilidad de obtener dos de colores distintos, que es 4/7.

Es más probable sacar un par de calcetines de colores distintos.

Observación

También podríamos haber resuelto este problema mediante la Ley de *Laplace*.

Casos posibles: $C_{7,2} = \binom{7}{2} = 21.$

Casos favorables a sacar 2 calcetines negros: $C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6.$

Casos favorables a sacar 2 calcetines blancos: $C_{3,2} = \binom{3}{2} = 3.$

Casos favorables: 6 + 3 = 9.

Probabilidad = $\dfrac{casos\,favorables}{casos\,posibles} = \dfrac{9}{21} = \dfrac{3}{7}.$

Como sacar un calcetín de cada color es el suceso contrario a éste, su probabilidad es $1 - \dfrac{3}{7} = \dfrac{4}{7}$. Es más probable este caso.

Recuerda que los problemas de Matemáticas se pueden abordar desde diferentes puntos de vista. Lo importante es que seas capaz de resolverlos. Por eso es importante conocer más de un método. En unas ocasiones será mejor utilizar uno y en otras será mejor usar un método alternativo. Por ello debes estudiar diversas "herramientas" que te ayuden a resolver los problemas que aparecen.

Actividades propuestas

10. Elabora un árbol de probabilidades para calcular la probabilidad de obtener *doble pareja* en una jugada de 5 cartas de póker. (*Doble pareja* consiste en 2 pares de cartas del mismo valor, diferentes entre sí, y una carta indiferente, de valor distinto a los dos anteriores. Por ejemplo, AA 33 Q).

11. En el monedero tengo 3 monedas de un céntimo, 2 de 5 céntimos, 3 de 10 céntimos, 1 de 20 y 1 de 50 céntimos. Saco 3 monedas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga un número par de céntimos?

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia
Textos Marea Verde

2.5. Probabilidad condicionada

En los casos diagramas de árbol, en cada paso aparecen probabilidades que están condicionadas a un paso anterior. En el ejemplo de la sección 2.4 la probabilidad de que en la segunda extracción la bola sea roja condicionada a que en la primera extracción había salido una bola roja era 6/10, mientras que la probabilidad de sacar una bola roja en la segunda extracción, sabiendo que en la primera había salido una bola blanca era 7/11.

En muchos casos la probabilidad que hay que determinar es una **probabilidad condicionada** a la verificación de un suceso anterior.

La probabilidad de verificación del suceso A condicionada a la verificación del suceso B se representa por *P*(*A/B*).

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ejemplos

- *En el lanzamiento de un dado ha salido un número par. Calcula la probabilidad de que sea un* 6.

No es necesario formalizar esto así, pero para acostumbrarnos a la notación daremos nombres a los sucesos que intervienen:

A = Obtener un 6 = {6}

B = Obtener número par = {2, 4, 6}

Los casos posibles son {2, 4, 6} (porque nos dicen que ha salido un número par}

El único caso favorable es {6}

Así pues

P(*sacar* 6 *condicionado a par*) = $\frac{casos\ \ favorables}{casos\ \ posibles} = \frac{1}{3}$

También podríamos haber calculado esto con álgebra de sucesos:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

- *El* 40 % *de la población fuma, y el* 10 % *fuma y es hipertenso. ¿Cuál es la probabilidad de que un fumador sea hipertenso?*

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia
Textos Marea Verde

Asumiremos que los porcentajes de población se corresponden con probabilidades. Así, la probabilidad de que un individuo elegido al azar sea fumador es 0,4 y la probabilidad de que sea fumador e hipertenso es 0,1. De este modo

A = Ser fumador e hipertenso

B = Ser fumador

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Como $P(A) = 0{,}1 \neq P(A/B) = 0{,}25$ los sucesos "*ser fumador*" y "*ser hipertenso*" son sucesos dependientes.

Actividades propuestas

12. Un analista deportivo, que se equivoca el 20 % de las veces, ha dicho que nuestro equipo favorito va a ganar la liga. El analista de la competencia, que se equivoca el 25 % de las veces, ha dicho que nuestro equipo favorito no va a ganar la liga. A tenor de dichos análisis. ¿Qué probabilidad hay de que nuestro equipo gane la liga?

13. Una compañía de productos avícolas empaqueta docenas de huevos en tres lugares diferentes. El 40 % de la producción tiene lugar en la planta A, el 25 % en B y el resto en C. Un control de calidad nos dice que un 5 % de los paquetes elaborados en A, un 10 % de los de B y un 8 % de los de C contienen algún huevo roto. ¿Qué probabilidad hay de que nos toque una docena de huevos con algún huevo roto?

14. En un instituto con 300 alumnos se está estudiando si la calificación obtenida en *Lengua Española* tiene que ver con la calificación obtenida en *Matemáticas*. Tras hacer una encuesta, se obtienen los siguientes resultados:

		Matemáticas		
		Sobresaliente	**Notable**	**Otro**
Lengua	**Sobresaliente**	110	25	18
	Notable	40	70	40
	Otro	10	5	2

Se elige un alumno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que haya tenido un sobresaliente en *Lengua*, si lo ha tenido en *Matemáticas*?

¿Cuál es la probabilidad de que haya tenido un sobresaliente en *Matemáticas*, si lo ha tenido en *Lengua*?

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia
Textos Marea Verde

3. CÁLCULO DE PROBABILIDADES

3.1. Ejemplos comunes

Actividades resueltas

- *En un cajón tengo un par de calcetines rojos, un par de calcetines negros y un par de calcetines blancos. Al hacer la maleta, con las prisas, cojo 3 calcetines sin mirar. ¿Qué probabilidad tengo de haber cogido 2 del mismo color?*

  Cogeré 2 del mismo color siempre que no coja los 3 de colores diferentes.

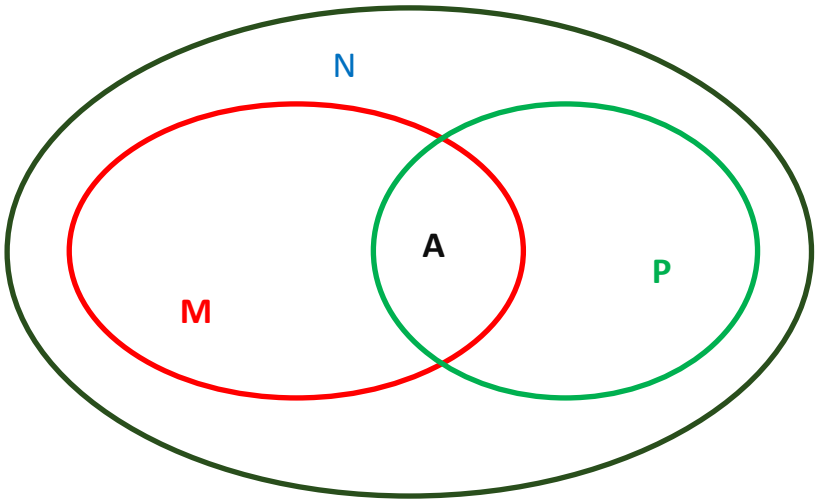
  Me da igual el color del primero que saco. Para el segundo me sirven 2 de entre 5. Y en la tercera extracción, como necesito un color diferente, me sirven 2 de entre 4.

  Así la probabilidad del suceso contrario es $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{5}$.

  Por ello la probabilidad pedida es $\frac{4}{5}$.

- *Se hace un estudio de consumo en una población. Se descubre que al 80 % de las personas a las que les gusta el helado de pistacho también les gusta el de mango y que al 80 % de las personas a las que les gusta el helado de mango también les gusta el de pistacho. Al 60 % de esa población no le gustan los helados de mango ni de pistacho. Se elige al azar una persona de esa población. ¿Cuál es la probabilidad de que le guste tanto el helado de mango como el de pistacho?*

  Vamos a calcular los porcentajes de la población a la que le gusta el helado de mango y de pistacho. Representaremos todos los datos con diagramas de Venn.



  Consideremos

  M = Porcentaje de personas a las que les gusta el helado de mango

  P = Porcentaje de personas a las que les gusta el helado de pistacho

  A = Porcentaje de personas a las que les gustan ambos helados (pistacho y mango)

  N = Porcentaje de personas a las que no les gusta ni el helado de pistacho ni el de mango

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia
Textos Marea Verde

Sabemos que A = 0,8 · P y también que A = 0,8 · M. Por tanto, M = P.

Ahora podemos referir todo a X, el número total de individuos de la población.

El número de personas al que les gusta al menos uno de esos tipos de helado es:

$$M + P - A = 2M - 0{,}8M = 1{,}2M$$

Pero sabemos que eso coincide con el 60 % de la población. Así $1{,}2M = 0{,}4X \Rightarrow M = \frac{4}{5}X$

Y, finalmente, $A = 0{,}8 \cdot \frac{1}{3}X = \frac{4}{15}X$.

Con lo que la probabilidad de que a la persona elegida al azar no le guste ni el helado de pistacho ni el de mango es:

$$P = \frac{casos\ \ favorables}{casos\ \ posibles} = \frac{\frac{4}{15}X}{X} = \frac{4}{15}.$$

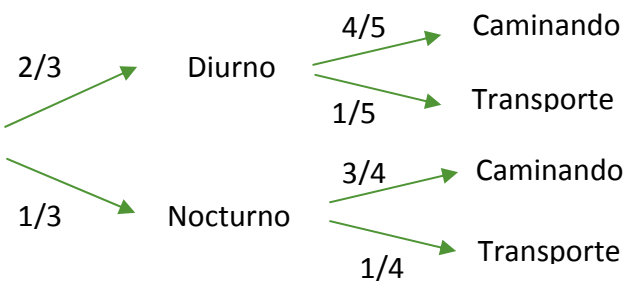
- *En la lotería primitiva se apuestan 6 números de entre 49. Jugando una sola apuesta, ¿cuál es la probabilidad de que te toque un premio de 5 aciertos más complementario?*

  El número de casos posibles son las combinaciones de 49 elementos tomados de 6 en 6: $C_{49,6}$.

  Los casos favorables tienen que incluir necesariamente al *número complementario*. Las otras 5 posiciones se tienen que llenar con 5 de los 6 elementos de la combinación ganadora. Así, el número de casos favorables viene dado por las combinaciones de 6 elementos tomados de 5 en 5: $C_{6,5}$.

  Así, $P(5+complementario) = \frac{C_{6,5}}{C_{49,6}} = \frac{6}{13983816} = \frac{1}{2330636}$.

- *En un IES hay Bachillerato diurno y Bachillerato nocturno. En diurno estudian 2/3 de los alumnos y el tercio restante lo hace en nocturno. La cuarta parte de los alumnos de nocturno y la quinta de los de diurno utiliza un medio de transporte para ir al instituto. El resto llega caminando. Se elige al azar un estudiante de ese instituto. ¿Qué probabilidad hay de que vaya a clase andando?*



Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia
Textos Marea Verde

La probabilidad de que un alumno acuda a clase caminando es $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{47}{60}$.

- *Tras volver de Dublín, en el monedero tenemos 6 monedas de euro procedentes de España y 9 de Irlanda. Tenemos que pagar 3 euros. ¿Qué probabilidad hay de que lo hagamos con monedas del mismo país?*

  Tenemos 6 monedas de euro de España, 9 de Irlanda.

  Debemos tomar 3 monedas al azar.

  Los casos posibles son las combinaciones de 15 elementos tomados de 3 en 3. $C_{15,3}=455$.

  Los casos favorables provienen de coger las 3 monedas españolas o las tres irlandesas. Así resulta:

  $$C_{6,3}+C_{9,3}=20+84=104.$$

  Por lo tanto, la probabilidad pedida es $\frac{104}{455}$.

- *Un tahúr juega con una baraja trucada de 48 cartas. Saca una carta, la mira, la vuelve a meter en la baraja y mezcla. Repite este procedimiento otras 2 veces más. La baraja está preparada de tal modo que el hecho de una de las tres cartas vistas sea una figura tiene una probabilidad de 19/27 ¿Cuántas figuras tiene su baraja?*

  Llamaremos *x* al número de figuras que hay en la baraja trucada. La probabilidad de no obtener figura en la primera carta es $\frac{48-x}{48}$, la de no obtenerla en la segunda vuelve a ser la misma probabilidad y lo mismo con la tercera. Así la probabilidad de no obtener figura es $\left(\frac{48-x}{48}\right)^3$.

  Como *no obtener ninguna figura* es el suceso contrario de *obtener alguna figura*, su probabilidad es:

  $$P(\textit{no obtener ninguna figura}) = 1 - P(\textit{obtener figura}) = 1-\frac{19}{27}=\frac{8}{27}.$$

  Así hemos llegado a la ecuación

  $$\left(\frac{48-x}{48}\right)^3=\frac{8}{27}=\frac{2^3}{3^3}$$

  De donde

  $$\frac{48-x}{48}=\frac{2}{3}$$

  Y, despejando en esa ecuación resulta $x = 16$.

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia
Textos Marea Verde

Actividades propuestas

15. Una bolsa contiene 9 bolas rojas y 6 bolas negras. Se extrae al azar una de ellas y se sustituye por dos del otro color. Tras ello se extrae una segunda bola. ¿Qué probabilidad hay de que la segunda bola sea roja? ¿Qué probabilidad hay de que la segunda bola sea del mismo color que la primera?

16. En el comedor escolar la probabilidad de que no haya pasta una semana es 1/3; la probabilidad de que haya pollo es 3/5 y la probabilidad de que haya pasta y pollo es 4/7. Calcula la probabilidad de que no haya ni pasta ni pollo. Calcula la probabilidad de que no haya pollo sabiendo que ha habido pasta.

17. Tenemos en el bolsillo monedas procedentes de 3 países: españolas (60 %), francesas (30 %) y alemanas (el resto). El 30 % de las monedas españolas y el 20 % de las francesas son de 50 céntimos. También sabemos que del total de monedas, el 30 % son de 50 céntimos. Se extrae una moneda al azar. ¿Qué probabilidad hay de que sea una moneda francesa de 50 céntimos? ¿Qué probabilidad hay de que sea una moneda de 50 céntimos, sabiendo que es alemana?

18. En una clase hay 24 alumnos y 16 alumnas. Se forman equipos de trabajo de 5 personas. Calcula la probabilidad de formar un equipo en las siguientes condiciones:

a) todos los participantes son del mismo sexo.
b) en el equipo hay al menos 3 chicas.
c) en el equipo hay exactamente 3 chicas.
d) En el equipo hay 3 estudiantes de un sexo y 2 de otro.

3.2. Cosas sorprendentes

Llevamos todo el capítulo insistiendo en que no tenemos suficientemente desarrollado el sentido de la probabilidad. Es necesario educar la intuición en este sentido. Por eso hay hechos que siendo totalmente explicables desde las Matemáticas, nos siguen pareciendo paradójicos. Vamos a comentar brevemente tres ejemplos.

Actividades resueltas

- *Aunque parezca una casualidad, por tener el año 365 días, es muy probable que en tu clase haya 2 alumnos que celebren su cumpleaños el mismo día. ¿Lo has comprobado?*

La probabilidad de que eso ocurra en un grupo de 23 personas la probabilidad es 1/2. En un grupo de 30 personas la probabilidad es mayor de 0,7 y en un grupo de 40 personas es 0,89.

¿Cómo podemos calcularlo?

Más fácil que calcular la probabilidad de que haya una coincidencia es calcular la probabilidad del suceso contrario: que no haya coincidencias.

Supondremos en este ejemplo que hay la misma probabilidad de haber nacido en un día o en otro (aunque sepamos que, en realidad, no es así).

- Supongamos que tenemos 2 personas. La primera habrá nacido un día. Para que no coincida la fecha de nacimiento de la segunda tenemos 364 posibilidades de elección. Así la probabilidad de que no haya una coincidencia en un grupo de 2 personas es $\frac{364}{365}$.

Textos Marea Verde

- Si ahora tenemos 3 personas y no queremos que haya coincidencias, hay 364 posibilidades para elegir la segunda persona y 363 para elegir la tercera. Así esta probabilidad es:

$$\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}$$

- Análogamente, la probabilidad de que en un grupo de 4 personas no haya coincidencias es:

$$\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\frac{362}{365}$$

- Siguiendo con este razonamiento, llegamos a que la probabilidad de que en un grupo de 23 personas no haya coincidencias es:

$$\underbrace{\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdots\frac{344}{365}\cdot\frac{343}{365}}_{\text{22 factores}}=0{,}4927\,.$$

Así que, la de que haya coincidencias es 1 – 0,4927 = 0,5073, ¡mayor del 50 %!

Para los otros casos que hemos comentado, puedes hacer tú los cálculos. Son similares a los que acabamos de hacer.

Actividades resueltas

La Administración Pública acostumbra a sortear la letra del apellido por la que se comenzará un proceso. Puede ser el orden de actuación de los concursantes a una oposición, antaño para sortear excedentes de cupo del servicio militar, adjudicación de viviendas protegidas o para adjudicar plazas en un colegio.

A pesar de que los matemáticos insistimos en que esos sorteos no son justos, puesto que no tratan a todos los individuos por igual, la Administración los continúa realizando (e incluso llega a la testarudez defendiendo su ecuanimidad). Efectivamente, los casos del espacio muestral no son equiprobables.

Supongamos que entre las jugadoras de la Selección Femenina de Baloncesto, que ganó el Eurobasket 2013, se sortea cuál de ellas sube a recoger la copa, y se hace sorteando una de las 27 letras del alfabeto español.

Apellido	Letras con las que ganará
Aguilar	yza
Domínguez	bcd
Gil	efg
Lima	hijkl
Nicholls	mn
Ouviña	o
Palau	p
Queralt	r
Sancho	rs
Torrens	t
Valdemoro	uv
Xargay	x

Vemos que Cindy Lima tendría una probabilidad de 5/27 de subir a recoger la copa, frente a 1/27 de Ouviña, Palau, Queralt, Torrens o Xargay.

Tristemente este sistema se sigue utilizando. Incluso lo ha usado la Comunidad de Madrid para asignar plazas en colegios para el curso 2014/2015.

Actividad propuesta

19. Supón que se sortea ser delegado de tu clase por el método descrito antes. ¿Quién tendría más probabilidad de salir? ¿Hay alguien que no tendría ninguna posibilidad? Hazlo con una lista de tu clase.

Textos Marea Verde
Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikipedia

3.3. Cosas aún más sorprendentes

Actividad propuesta

20. Toma 2 cartulinas de colores, cada una de un color distinto (por ejemplo, roja y azul) y recorta en cada una de ellas 3 rectángulos del mismo tamaño. Pega esos rectángulos entre sí de modo que uno sea rojo-rojo, otro azul-azul y otro rojo-azul. Mete las 3 cartulinas así preparadas en un sobre y saca una al azar, con cuidado de no mostrar nada más que un lado. Pregunta a un compañero que "*adivine*" el color de la cara que está oculta. Repite el proceso con todos los compañeros. Escribe los resultados del experimento en una tabla como esta que copies en tu cuaderno:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Oculto																														
Apuesta																														
Sale																														
¿acierta?																														

¿Qué observas? ¿Es mejor decir que el color oculto es el mismo que el visible? ¿O es peor?

Ejemplos

1.- La paradoja de *Bertrand*.

En 1889 *Joseph Bertrand* propuso el siguiente experimento: tenemos tres cajas en las que hemos introducido en una, una moneda de plata y una bronce, en otra dos monedas de plata y en otra dos monedas de bronce. Las monedas de plata y bronce son indistinguibles al tacto. Se elige una caja al azar y se saca una moneda de una de ella. Se ve que la moneda es de plata. ¿De qué material crees que es la otra moneda de la caja, plata o bronce?

En principio pensamos que como vemos una moneda de plata, puede tratarse de la caja que contiene dos monedas de plata o la que tiene una de cada tipo. Por ello, nos inclinamos a pensar que la probabilidad de que la otra moneda sea de plata o de bronce es la misma: 1/2.

Si pensamos un poco más veremos que este problema es, en realidad, equivalente a la actividad propuesta con la que hemos comenzado esta sección. En lugar de tener cartulinas con colores diferentes tenemos cajas con monedas de materiales diferentes. Las matemáticas del problema son las mismas en los dos casos. Así que, si has hecho la actividad anterior, ahora tendrás argumentos para decidir que lo más probable es que la otra moneda de la caja sea de plata.

En efecto, lo que se elige al azar es la caja. La probabilidad de haber elegido una caja con dos monedas iguales es 2/3, mientras que la probabilidad de elegir la caja que tiene una moneda de cada tipo es solamente 1/3. Por ello lo más probable es que hayamos elegido una caja con las dos monedas iguales. Como vemos que una es de plata lo mejor que podemos decir es que la otra también lo es.

Este es un ejemplo típico de probabilidad condicionada, aunque no lo parece.

2.- El problema de *Monty Hall*.

Monty Hall era el presentador del concurso de la televisión americana *Let's have a deal!* En ese

Textos Marea Verde

concurso había un premio final donde se mostraban tres puertas. Detrás de una de ellas había un coche y en cada una de las otras dos había una cabra. Claro, los concursantes lo que querían era llevarse el coche.

Monty Hall procedía siempre del mismo modo:

- decía al concursante que eligiera una puerta: la A, la B o la C
- una vez elegida la puerta por el concursante abría una de las que no había elegido y mostraba que detrás de ella había una cabra
- le daba al concursante la oportunidad de cambiar su elección o mantenerse con lo que había elegido al principio

(Inciso antes de seguir leyendo: ¿tú qué harías?, ¿cambiarías?, ¿mantendrías tu elección?, ¿da igual?, ¿es mejor una cosa que la otra?)

Como enseña una puerta con una cabra, el coche está o en la que elige el concursante o en la otra, en principio al 50 %. En realidad la probabilidad no es del 50 %, como veremos ahora.

Marilyn vos Savant es una persona que presumía (y se ganaba la vida utilizándolo) de tener el record *Guinness* de cociente intelectual. Escribía una columna en la revista *Parade* y en ella dijo que la mejor estrategia era cambiar la elección después de que *Monty Hall* mostrase la cabra. Tras la publicación de esta columna numerosos matemáticos escribieron a la revista quejándose de semejante error. Para todos era obvio que la probabilidad de acierto, tanto si cambiaba la elección como si no lo hacía, era 1/2.

La polémica la zanjó *Paul Erdös* (un matemático húngaro un poco raro, que no tenía un domicilio fijo, ni un trabajo estable, pero que publicó un montón de resultados matemáticos) dando razón a vos *Savant*, para sorpresa de muchos. Sí, algunos matemáticos (incluso algunos importantes) se habían equivocado al calcular probabilidades. No pasa nada, todos cometemos errores.

Volvemos al problema. Vas a ver qué simple es el razonamiento. En realidad hay 3 casos: “eliges la puerta del coche” “eliges la de la cabra 1” o “eliges la de la cabra 2”. Lo importante es que realizas esta elección ANTES de que *Monty Hall* te enseñe nada.

- Supongamos que has elegido la puerta con el coche. *Monty Hall* te enseñará la cabra 1 o la cabra 2. Si cambias pierdes. Si no cambias ganas.
- Supongamos que eliges la puerta con la cabra 1. *Monty Hall* te enseñará la cabra 2. Si cambias ganas: solo queda la puerta que oculta al coche. Si no cambias pierdes.
- Supongamos que eliges la puerta con la cabra 2. *Monty Hall* te enseñará la cabra 1. Si cambias ganas: solo queda la puerta que oculta al coche. Si no cambias pierdes.

Así, cambiando tu elección después de que *Monty Hall* abra la puerta ganarás 2 de cada 3 veces. ¿Sorprendido?

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia
Textos Marea Verde

CURIOSIDADES. REVISTA

Pascal y Fermat

Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1655) mantuvieron una interesante correspondencia durante el año 1654 que se podrían considerar el inicio de la Teoría de la Probabilidad a pesar de tratarse de problemas de juegos y apuestas. Son problemas propuestos por el Caballero de la Mérè que no era matemático.

Uno es éste:

Un jugador apuesta una bolsa de monedas a que saca al menos un 6 en 8 lanzamientos de un dado. Ha tirado ya el dado 3 veces sin sacar ningún 6, y decide dejar el juego, ¿qué parte de la bolsa le correspondería?

Tú sabes resolverlo. Haz un diagrama en árbol, y calcula en primer lugar la probabilidad que tiene el jugador de ganar y la de que tiene de perder en un principio.

Cada tirada es un suceso independiente (no depende de lo que se haya obtenido en las anteriores, así que según Fermat si el jugador renuncia a una jugada tiene derecho a 1/6 de la bolsa.

Si renuncia a 2 lanzamientos entonces debe ser indemnizado con 1/6 + 5/36.

La ruleta

William Jaggers llegó a Montecarlo con unos pocos francos en el bolsillo y, durante un mes anotó los números que salían en cada ruleta, y en cuatro días ganó dos millones cuatrocientos mil francos. *Jaggers* consiguió quebrar a la banca en *Montecarlo* analizando las frecuencias relativas de cada número de la ruleta y observando que se había desgastado algo del mecanismo de una de ellas, con lo que todos los valores no tenían igual probabilidad. Apostó a los números más probables y ganó.

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia
Textos Marea Verde

Caballero de la Meré

Al *Caballero de la Meré* le gustaba jugar y era un gran jugador, por eso sabía que era favorable apostar, al tirar un dado "sacar al menos un 6 en 4 tiradas de un dado" y que no lo era al tirar dos dados el "sacar al menos un 6 doble en 24 jugadas".

Se ve que había jugado mucho para saber que las frecuencias relativas le decían que el primer suceso tenía una probabilidad superior a 0,5, y el segundo la tenía inferior. Pero no lo comprendía. No era matemático y sólo se sabía la regla de tres. ¡Esto no es una proporcionalidad! Dijo 6 : 4 = 36 : 24. Pero las frecuencias relativas le decían que no era así, por lo que escribió a Pascal para que le solucionara el problema.

Tu ya sabes lo suficiente para solucionárselo. Antes de seguir leyendo, intenta resolverlo.

En lugar de calcular la probabilidad de *sacar al menos un 6* en 4 tiradas, calcula la probabilidad de *no sacar un 6*, que es su suceso contrario, y es $\left(\frac{5}{6}\right)^4$. Por tanto la probabilidad de *sacar al menos un 6* en 4 tiradas es:

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}5177 > 0{,}5.$$

Calculamos del mismo modo la probabilidad de sacar *al menos un seis doble* al tirar dos dados 24 veces, calculando la de su suceso contrario, la de *no sacar ningún seis doble*: $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$, por lo que sacar al menos un 6 doble es:

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0{,}4914 < 0{,}5.$$

¡Cuánto debió de jugar el Caballero de la Meré para darse cuenta de esa pequeña diferencia en las probabilidades!

Si quieres saber más, busca:

http://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdfhttp://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdf

El inicio de la Teoría de la Probabilidad, como sabes, fueron los juegos de azar.

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia
Textos Marea Verde

Galileo,

En el siglo XVI planteó el siguiente problema: Al tirar tres dados, ¿por qué es más probable obtener que la suma de las caras superiores sea 10, que sea 9?

Continuaba la reflexión con las posibles descomposiciones en esas sumas:

9 = 3 + 3 + 3	10 = 4 + 3 + 3
9 = 4 + 3 + 2	10 = 4 + 4 + 2
9 = 4 + 4 + 1	10 = 5 + 3 + 2
9 = 5 + 2 + 2	10 = 5 + 4 + 1
9 = 5 + 3 + 1	10 = 6 + 2 + 2
9 = 6 + 2 + 2	10 = 6 + 3 + 1

En ambos casos hay 6 descomposiciones posibles, sin embargo, tirando muchas veces los 3 dados comprobaba que es más probable sacar un 10.

Si haces un diagrama en árbol comprobarás que todas esas descomposiciones no son igualmente probables.

Por ejemplo: (3, 3, 3) tiene una probabilidad de 1/216, mientras que la suma 6 + 2 + 2, puede salir con tres sucesos (6, 2, 2), (2, 6, 2) y (2, 2, 6), luego su probabilidad es 3/216.

- Calcula las probabilidades de cada una de las sumas y la de sacar 10 y de sacar 9.

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia
Textos Marea Verde

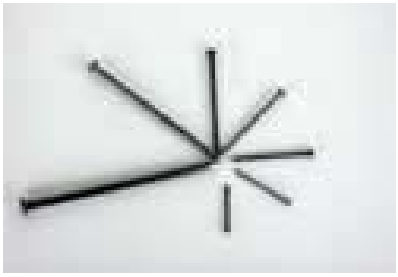
RESUMEN

		Ejemplos
Experimento aleatorio	El resultado depende del azar	Tirar una moneda, o un dado
Suceso elemental	Cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio	Cara o cruz serían sucesos elementales en el experimento "tirar una moneda y observar el resultado"
Espacio muestral	Conjunto de casos posibles	{cara, cruz} {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Suceso	Subconjunto del espacio muestral	{2, 4, 6}
Ley de *Laplace*	Si los sucesos elementales son equiprobables entonces $P(S)=\frac{\text{número de casos favorables al suceso } S}{\text{número de casos posibles}}$	Al tirar un dado: P(sacar 3) = 1/6 P(sacar múltiplo 2) = 3/6.
Combinatoria	Utiliza la combinatoria (combinaciones, variaciones, variaciones con repetición…) para contar bien los casos favorables y los posibles	La probabilidad de tener póker en una baraja francesa es: $P(poker)=\frac{13\cdot 12}{C_{52,2}}$
Diagrama en árbol	Problemas muy difíciles puedes resolver representando un diagrama en árbol	
Suceso contrario	El suceso contrario de S (S^c) se verifica si no se verifica S. $P(S^C) = 1 - P(S)$	Suceso contrario de sacar par es {1, 3, 5} = 1 – 3/6 = 1/2.
Sucesos independientes	Dos sucesos son independientes si la probabilidad de que se verifique uno queda afectada por que se haya verificado el otro.	La probabilidad del sacar un 3, al tirar un dado y volver a tirarlo.
Intersección de sucesos	Si A y B son independientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. En general $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$	En una baraja española la probabilidad de sacar dos ases es (4/40) · (3/39)
Probabilidad condicionada	$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$	Probabilidad de sacar un as habiendo ya sacado otro as sin reemplazamiento es 3/39
Unión de sucesos	Si A y B son incompatibles $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ En general $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	En una baraja española la probabilidad de sacar un as o bien un oro es (4/40) + (10/49) – (1/40) = 13/40

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia
Textos Marea Verde

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. En una clase hay 15 chicos y 18 chicas. Como no se presenta nadie para ser delegado se hace un sorteo. ¿Cuál es la probabilidad de que en la clase haya delegada?
2. En el monedero tenemos 8 monedas de 1 céntimo, 3 monedas de 5 céntimos, 8 monedas de 10 céntimos y 5 monedas de 50 céntimos. Sacamos una moneda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la cantidad obtenida sea un número par de céntimos?



3. En una caja tenemos mezclados 50 clavos de 2 cm de largo, 30 clavos de 3 cm, 35 clavos de 2,5 cm y 60 clavos de 3,5 cm. Sacamos al azar un clavo de la caja (se asume que todos los clavos tienen la misma probabilidad de ser elegidos). ¿Qué probabilidad hay de que el clavo extraído tenga la menor longitud?
4. En un instituto de mil estudiantes hay 700 que hablan inglés, 400 que hablan francés, 50 que hablan alemán, 200 que hablan inglés y francés, 30 que hablan inglés y alemán, 10 que hablan francés y alemán y 5 que hablan los tres idiomas. Se elige un estudiante al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que hable solamente una lengua extranjera?

5. La ruleta francesa consta de los números que van del 0 al 36. Si sale 0 gana la banca. Decidimos apostar a "*par*" (ganaremos si sale un número par no nulo). ¿Qué probabilidad tenemos de ganar la apuesta? ¿Y si apostamos a 7? ¿Y si apostamos a un número impar?
6. Una bolsa contiene 7 bolas blancas, 5 bolas rojas y 3 bolas negras. Se extraen dos bolas al mismo tiempo. ¿Cuál es la probabilidad de que sean una blanca y una negra?
7. Una bolsa contiene 10 bolas blancas, 9 bolas rojas y una bola negra. Se extrae una bola de la bolsa. Después se saca una segunda bola, sin volver a meter en la bolsa la primera. ¿Cuál es la probabilidad de que tras la segunda extracción tengamos una bola blanca y una bola negra?
8. Una bolsa contiene 15 bolas blancas, 4 bolas rojas y una bola negra. Se extrae una bola de la bolsa. Después se saca una segunda bola, sin volver a meter en la bolsa la primera. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea blanca y la segunda negra?
9. Una bolsa contiene 15 bolas blancas, 4 bolas rojas y una bola negra. Se extrae una bola de la bolsa. Tras mirar de qué color se introduce en la bolsa de nuevo. Se saca una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea blanca y la segunda negra?
10. Una bolsa contiene 15 bolas blancas, 4 bolas rojas y una bola negra. Se extrae una bola de la bolsa. Tras mirar de qué color se introduce en la bolsa de nuevo. Se saca una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos veces haya salido la bola negra?
11. Una bolsa contiene 15 bolas blancas, 4 bolas rojas y una bola negra. Se extrae una bola de la bolsa. Tras mirar de qué color se introduce en la bolsa de nuevo. Se saca una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos veces haya salido una bola blanca?
12. En la lotería primitiva una apuesta consiste en marcar 6 casillas de entre 49 posibles. El día del sorteo se extraen 6 bolas (de entre 49). ¿Cuál es la probabilidad de que tu apuesta coincida con la combinación ganadora? ¿Cuál es la probabilidad de que aciertes un número? ¿Y la de que aciertes 2 números?

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia
Textos Marea Verde

13. Se reparten al azar 5 cartas de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de que tengas 4 cartas del mismo número?

14. En una jugada se reparten 5 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de conseguir tres ases y dos reyes? ¿Cuál es la probabilidad de tener tres cartas iguales? ¿Y una pareja? ¿Y de tener tres cartas iguales y las otras dos también iguales entre sí?

15. En una jugada se reparten 5 cartas. Se llama *escalera de color* a una jugada compuesta por 5 cartas del mismo palo ordenadas consecutivamente. Calcula la probabilidad de obtener esta escalera de color de tréboles.

16. En una jugada se reparten 5 cartas. Se llama *color* a una jugada compuesta por 5 cartas del mismo palo que no son consecutivas. Calcula la probabilidad de obtener *color* de tréboles.

17. Considera el experimento aleatorio "mezclar una baraja, cortar y mirar el color de las dos cartas que han quedado arriba". ¿Cuál es la probabilidad de que ambas tengan el mismo color?

18. Tenemos una caja con 12 bolas rojas y 8 bolas blancas. Se saca una bola al azar. Si es blanca se vuelve a meter en la caja. Si es roja se deja fuera. En estas condiciones se saca otra bola de la caja. ¿Qué probabilidad hay de que esta bola sea roja?

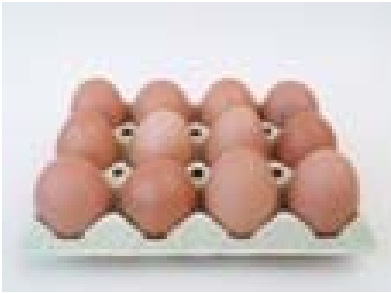
19. En un cajón tenemos 10 calcetines: 6 negros y 4 blancos. Sacamos, sin mirar, dos calcetines del cajón. ¿Qué es más probable, que sean ambos del mismo color o que sean de colores distintos?

20. Elabora un árbol de probabilidades para calcular la probabilidad de obtener *doble pareja* de ases y treses en una jugada de 5 cartas de póker. (*Doble pareja* consiste en 2 pares de cartas del mismo valor, diferentes entre sí, y una carta indiferente, de valor distinto a los dos anteriores. Por ejemplo, AA 33 Q).

21. En el monedero tengo 7 monedas de un céntimo, 4 de 5 céntimos, 6 de 10 céntimos, 5 de 20 y 7 de 50 céntimos. Saco 3 monedas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga un número impar de céntimos?

22. El 60 % de una determinada población fuma, y el 12 % fuma y es hipertenso. Utiliza estas frecuencias para obtener probabilidades y determina si ser hipertenso es dependiente o independiente de fumar. ¿Cuál es la probabilidad condicionada de que una persona fumadora sea hipertensa?

23. Un analista deportivo, que se equivoca el 10 % de las veces, ha dicho que nuestro equipo favorito va a ganar la liga. El analista de la competencia, que se equivoca el 20 % de las veces, ha dicho que nuestro equipo favorito no va a ganar la liga. A tenor de dichos análisis. ¿Qué probabilidad hay de que nuestro equipo gane la liga?



24. Una compañía de productos avícolas empaqueta docenas de huevos en tres lugares diferentes. El 60 % de la producción tiene lugar en la planta A, el 30 % en B y el resto en C. Un control de calidad nos dice que un 5 % de los paquetes elaborados en A, un 7 % de los de B y un 10 % de los de C contienen algún huevo roto. ¿Qué probabilidad hay de que nos toque una docena de huevos con algún huevo roto?

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia
Textos Marea Verde

25. En un cajón tengo un par de calcetines rojos, un par de calcetines negros y un par de calcetines blancos. Al hacer la maleta, con las prisas, cojo 3 calcetines sin mirar. ¿Qué probabilidad tengo de haber cogido 2 del mismo color?

26. Se hace un estudio de consumo en una población. Se descubre que al 70 % de las personas a las que les gusta la mermelada de naranja también les gusta la de grosella y que al 80 % de las personas a las que les gusta la mermelada de grosella también les gusta la de naranja. Al 40 % de esa población no le gustan ni la mermelada de naranja ni la de grosella. Se elige al azar una persona de esa población. ¿Cuál es la probabilidad de que le guste tanto ambas mermeladas?

27. En la lotería primitiva se apuestan 6 números de entre 49. Jugando a dos apuestas, ¿cuál es la probabilidad de que te toque un premio de 5 aciertos más complementario?

28. En un instituto hay Bachillerato y Formación Profesional. En Bachillerato estudian 1/3 de los estudiantes y el resto lo hace en Formación Profesional. La cuarta parte de los estudiantes de Bachillerato y la sesta parte de los Formación Profesional utiliza un medio de transporte para ir al instituto. El resto llega caminando. Se elige al azar un estudiante de ese instituto. ¿Qué probabilidad hay de que vaya a clase utilizando un medio de transporte?

29. Un tahúr juega con una baraja trucada de 40 cartas. Saca una carta, la mira, la vuelve a meter en la baraja y mezcla. Repite este procedimiento otras 2 veces más. La baraja está preparada de tal modo que el hecho de una de las tres cartas vistas sea una figura tiene una probabilidad de 19/27 ¿Cuántas figuras tiene su baraja?

30. Una bolsa contiene 10 bolas rojas y 5 bolas negras. Se extrae al azar una de ellas y se sustituye por dos del otro color. Tras ello se extrae una segunda bola. ¿Qué probabilidad hay de que la segunda bola sea negra? ¿Qué probabilidad hay de que la segunda bola sea del mismo color que la primera?

31. En el comedor escolar la probabilidad de que no haya patatas una semana es 1/5; la probabilidad de que haya pescado es 2/5 y la probabilidad de que haya patatas y pescado es 1/10. Calcula la probabilidad de que no haya ni patatas ni pescado. Calcula la probabilidad de que no haya pescado sabiendo que ha habido patatas.

32. En una clase hay 20 alumnos y 10 alumnas. Se forman equipos de trabajo de 6 personas. Calcula la probabilidad de formar un equipo: a) con todo chicas, b) con 3 chicas, c) con todo chicos, d) con al menos 3 chicas.

33. Aunque parezca una casualidad, por tener el año 365 días, es muy probable que en una clase de 35 alumnos haya dos que celebren su cumpleaños el mismo día. Calcula dicha probabilidad. Lo mismo si la clase tiene 20 estudiantes.

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia
Textos Marea Verde

34. Utiliza la tabla para obtener una tabla de contingencia sobre los accidentes de tráfico:

	En carretera (C)	En zona urbana (U)	Total
Con víctimas (V)	34092	32295	66387
Sólo daños materiales (D)	11712	20791	32503
Total	45804	53086	98890

Calcula P(V); P(D); P(C); P(U); $P(V \cap C)$; $P(D \cap U)$; P(U/V); P(V/U); P(V/C); P(C/V); P(C/D). Se sabe que ha habido un accidente en carretera, ¿cuál es la probabilidad de que haya tenido víctimas? ¿Son independientes los sucesos de accidente con víctimas y accidente en carretera?

35. Se realizan estudios sobre una determinada enfermedad y se conoce que la probabilidad de que una persona la tenga es de 0,04. Una determinada prueba detecta si una persona está enferma con una probabilidad de 0,97, pero también califica como enferma, en ocasiones, a una persona sana con una probabilidad de 0,01. Representa esta situación en un diagrama en árbol. Construye la tabla de contingencia asociada. Calcula la probabilidad de que una persona sana sea detectada como enferma.

36. En el control de calidad de un proceso de fabricación se sabe que la probabilidad de que un circuito sea defectuoso es 0,02. Un dispositivo para detectar los defectuosos tiene una probabilidad de detectarlos de 0,9, pero también califica como defectuosos a 0,03 de los correctos. Representa esta situación en un diagrama en árbol. Construye la tabla de contingencia asociada. Calcula la probabilidad de que un circuito defectuoso sea calificado como correcto.

37. En una clase hay 25 alumnas y 15 alumnos, y se sabe que el 80 % de las alumnas aprueban las matemáticas mientras que las aprueban el 60 % de los alumnos. Utiliza estos porcentajes para asignar probabilidades y calcula la probabilidad que hay al elegir una persona de la clase al azar de que:

a) Sea alumna y apruebe las matemáticas;

b) Sea alumna o apruebe las matemáticas;

c) Sea alumno y suspenda matemáticas;

d) Haya aprobado las matemáticas.

38. Se estudian las familias de tres hijos. Para simplificar hacemos la hipótesis de que la probabilidad de chico sea igual a la de chica. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) A = El primer hijo es chica.
b) B = Al menos hay un varón.
c) $A \cup B$,
d) $A \cap B$.

39. En una bolsa hay 3 bolas verdes, 4 bolas rojas y una bola blanca. Sacamos dos bolas de la bolsa. Calcula la probabilidad de los sucesos: A = "alguna de las bolas es verde", B = "ha salido la bola blanca". Calcula también: $P(A^c)$, $P(B^c)$, $P(A \cup B)$ y $P(A^c \cap B)$. ¿Son A y B sucesos incompatibles? ¿Son sucesos independientes?

40. Dados los sucesos A y B de probabilidades: $P(A^c) = 3/5$; $P(A \cap B) = 1/8$; $P(B \cup A) = 3/4$; calcula las siguientes probabilidades: P(A); P(B); $P(B^c)$; $P(B/A^c)$; $P(A^c \cap B^c)$; P(A/B). ¿Son A y B sucesos independientes?

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia
Textos Marea Verde

41. Determina si son compatibles o incompatibles los sucesos A y B tales que:

a) $P(A) = 1/7$; $P(B) = 3/7$; $P(B \cup A) = 4/7$;

b) $P(A) = 1/5$; $P(B) = 0$;

42. Dados los sucesos A y B de probabilidades: $P(A^c) = 2/5$; $P(B) = 3/5$; $P(A^c \cap B^c) = 1/5$; calcula las siguientes probabilidades: $P(A)$; $P(B^c)$; $P(B \cup A)$; $P(B/A^c)$; $P(A \cap B)$; $P(A/B)$. ¿Son A y B sucesos independientes?

43. Dos tiradores al plato tienen unas marcas ya conocidas. El primero acierta con una probabilidad de 0,8 y el segundo de 0,6. Se lanza un plato y ambos disparan. Expresa mediante un diagrama de árbol y la tabla de contingencia asociada las distintas posibilidades. Calcula: a) ¿Qué probabilidad hay de que al menos uno de los tiradores dé en el plato? b) ¿Probabilidad de que ninguno acierte? c) Sabemos que el disparo ha acertado en el blanco, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya hecho el primer tirador?

44. Se dispone de dos urnas A y B. La urna A tiene 7 bolas verdes y 3 amarillas. La urna B tiene 5 bolas verdes y 7 amarillas. Se saca una bola al azar de una de las dos urnas, también al azar, y resulta ser amarilla. Calcula la probabilidad de que sea de la urna B. (*Ayuda*: Representa las posibilidades mediante un diagrama en árbol, escribe la tabla de contingencia asociada y el otro diagrama en árbol).

45. Se sabe que en cierta población, la probabilidad de ser hombre y daltónico es un décimo y la probabilidad de ser mujer y daltónica es 1/20. La proporción de personas de ambos sexos es la misma. Se elige una persona al azar.

a) Hallar la probabilidad de que no sea daltónico.
b) Si la persona elegida es mujer, hallar la probabilidad de que sea daltónica.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca daltonismo?

46. En cierto instituto se ofrece informática y teatro como asignaturas optativas. El grupo A consta de 32 estudiantes y el B tiene 30 estudiantes. El 70 % del grupo A ha elegido teatro, así como el 40 % del grupo B y el 60 % del resto del grupo B ha elegido informática.

a) Si se pregunta a un estudiante elegido al azar, hallar la probabilidad de que haya elegido informática.
b) Si un estudiante ha elegido teatro, calcula la probabilidad de que pertenezca al grupo B.

47. En una baraja española de cuarenta cartas se han eliminado varias cartas. Se sabe que la probabilidad de extraer un as entre las que quedan 0,1, la probabilidad de que salga una copa es 0,07 y la probabilidad de que no sea ni as ni copa es 0,8.

a) Hallar la probabilidad de que la carta extraída sea as o copa.
b) Calcular la probabilidad de que la carta sea el as de copas. ¿Se puede afirmar que entre las cartas que no se han eliminado está el as de copas?

48. En una ciudad en la que hay doble número de hombres que de mujeres, hay una epidemia. El 10 % de los hombres y el 5 % de las mujeres están enfermos. Se elige al azar un individuo. Calcular la probabilidad de:

a) que sea hombre.
b) que esté enfermo.
c) que sea hombre, sabiendo que está enfermo.

Autor: Fernando Blasco
Revisora: Raquel Caro
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF, Fernando Blasco y Wikypedia
Textos Marea Verde

AUTOEVALUACIÓN

1. En una bolsa hay 6 bolas negras y 3 bolas blancas, la probabilidad de sacar una bola negra es:

a) 1/2 b) 2/3 c) 1/3 d) 5/9

2. Indica cuál de los siguientes experimentos no es un experimento aleatorio:

a) Tirar una tiza y anotar el número de trozos en que se rompe

b) Tirar un dado trucado y anotar el número de la cara superior

c) Cruzar una calle y estudiar si hay un atropello

d) Calcular el consumo de gasolina de un coche

3. El espacio muestral de tirar 3 monedas al aire y anotar si caen en cara (C) o en cruz (X) con sucesos elementales equiprobables es:

a) {CCC, CCX, CXX, XXX} b) {3C, 2C, 1C, 0C}

c) {CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX} d) {CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC}

4. El suceso contrario a sacar al menos una cara en el experimento anterior es:

a) {XXX} b) {CCC, CCX, CXX} c) {CXX, XCX, XXC } d) {CCC, CCX, CXC, XCC }

5. Indica cuál de los siguientes sucesos no son independientes:

a) Sacar un oro y sacar un rey con reemplazamiento

b) Tirar una moneda y sacar cara y volver a tirarla y volver a sacar cara

c) Tirar un dado y sacar 6 y volver a tirarlo y volver a sacar 6

d) Tirar un dado y sacar un múltiplo de 2, y sacar un 6

6. La probabilidad de no sacar un as en una baraja de póker es:

a) 4/56 b) 52/56 c) 36/40 d) 1 – 36/40

7. La probabilidad de que la suma de las caras superiores sea 7 del experimento tirar dos dados es:

a) 1/2 b) 7/36 c) 5/36 d) 2/3

8. En una bolsa hay 7 bolas rojas y 4 blancas. Ser saca una bola al azar y si es blanca se vuelve a meter en la bolsa, mientras que si es roja se deja fuera. Se saca otra bola de la bolsa, la probabilidad de que sea roja es:

a) 42/110 b) 28/121 c) 70/121 d) 411/605

9. En una bolsa hay 4 bolas rojas y 3 blancas. Sacamos sin mirar dos bolas. La probabilidad de que sean del mismo color es:

a) 1/7 b) 2/7 c) 3/7 d) 4/7

10. Al lanzar un dado ha salido un número par, La probabilidad de que sea un 6 es P(sacar 6/ a par):

a) 1/3 b) 1/6 c) 2/5 d) 3/6

Textos Marea Verde

CUARTO B DE ESO

ÍNDICE

NÚMEROS. ÁLGEBRA

1. Números reales 3
2. Potencias y raíces 30
3. Expresiones algebraicas. Polinomios 54
4. Ecuaciones y sistemas 98
5. Inecuaciones 133
6. Porcentajes 152

GEOMETRÍA

7. Semejanza 176
8. Trigonometría 200
9. Geometría 221

FUNCIONES Y ESTADÍSTICA

10. Funciones y gráficas 254
11. Funciones polinómicas, definidas a trozos y de proporcionalidad inversa 286
12. Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas 319
13. Estadística 353
14. Combinatoria 396
15. Azar y probabilidad 431

ÍNDICE

466