$\sum vf$

π és irracional

Considerem: $f(x) = \dfrac{x^n \cdot (1-x)^n}{n!}$ que acompleix $0 < f(x) < \dfrac{1}{n!}$ si $0 < x < 1$

1

$$f(x) = \frac{x^n \cdot (1-x)^n}{n!}$$

Desenvolupant el binomi tindrem que:

$$f(x) = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{i=n}^{2n} c_i \cdot x^i \; on \; c_i \in \mathbb{Z}$$

Derivant

$$f^{(k)}(0) = 0 \in \mathbb{Z} \; si \; k < n \;\; o \;\; k > 2n$$

Què passa si $n \le k \le 2n$?

$f^{(n)}(x) = \frac{1}{n!} \cdot [n! \cdot c_n + termes \; sols \; en \; x]$

$f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{n!} \cdot [(n+1)! \cdot c_{n+1} + termes \; sols \; en \; x]$

...

$f^{(2n)}(x) = \frac{1}{n!} \cdot (2n)! \cdot c_{2n}$

Per tant:

$f^{(n)}(0) = c_n \in \mathbb{Z}$

$f^{(n+1)}(0) = (n+1) \cdot c_{n+1} \in \mathbb{Z}$

...

$f^{(2n)}(0) = (2n) \cdot (2n-1) \cdots (n+1) \cdot c_{2n} \in \mathbb{Z}$

2

$$f(1-x) = f(x)$$

Derivant

$f'(1-x) = -f'(x)$

$f''(1-x) = f''(x)$

...

$f^{(k)}(1-x) = (-1)^k \cdot f^{(k)}(x)$

3

De **1** i **2** tenim:

$$f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z} \;\; \forall k \in \mathbb{N}$$

$$f^{(k)}(1) \in \mathbb{Z} \;\; \forall k \in \mathbb{N}$$

4 Lema

$$\left.\begin{array}{l} a \in \mathbb{R} \\ 0 < \varepsilon < 1 \end{array}\right\} \longrightarrow Si \; n \; \text{és} \; suficientment \; gran \; \frac{a^n}{n!} < \varepsilon$$

Demostració

Si $|a| < 1$, és evident.

Si $|a| > 1$, ho demostrarem per $a > 1$ (si $a < 1$, és similar)

Com n és suficientment gran, considerem $n \ge 2a$, d'aquesta forma tindrem:

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \cdot \frac{a^n}{n!} \le \frac{1}{2} \cdot \frac{a^n}{n!}$$

Siga $n_0 \in \mathbb{N} \,/\, n_0 \ge 2a$, tindrem que:

$$\frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!} \le \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n_0}}{n_0!}$$

$$\frac{a^{n_0+2}}{(n_0+2)!} \le \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{a^{n_0}}{n_0!}$$

...

$$\frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!} \le \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{a^{n_0}}{n_0!}$$

Si k és tan gran que acompleix $2^k > \frac{a^{n_0}}{\varepsilon \cdot n_0!}$, tindrem:

$$\frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!} < \varepsilon$$

Si $n = n_0 + k$ (suficientment gran) s'acompleix:

$$\frac{a^n}{n!} < \varepsilon$$

Teorema

π és irracional

Demostració. Demostrarem que π^2 és irracional→ π és irracional (perquè si π fora racional→ π^2 seria racional)

Farem la demostració per reducció a l'absurd. **Suposem que $\pi^2 = \frac{a}{b}$ on $a, b \in \mathbb{N}$ i primers entre ells.**

Considerem: $G(x) = b^n \cdot \left[\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} f''(x) + \pi^{2n-4} f^{(4)}(x) + \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)\right]$

Cada coeficient és de la forma $b^n \cdot \pi^{2n-2k} = b^n \cdot (\pi^2)^{n-k} = b^n \cdot \frac{a^{n-k}}{b^{n-k}} = a^{n-k} \cdot b^k$ que és enter.

Com, per **3**, $f^{(k)}(0)$ i $f^{(k)}(1)$ són enters, tenim que: $\boldsymbol{G(0)\, i\, G(1) \in \mathbb{Z}}$ **5**

Calculem $G''(x)$:

$G''(x) = b^n\left[\pi^{2n} f''(x) - \pi^{2n-2} f^{(4)}(x) + \ldots + \pi^2 f^{(2n)}(x) + (-1)^n f^{(2n+2)}(x)\right]$ l'últim terme és 0 ja que $f^{(k)}(0) = 0 \; si \; k > 2n$

Calculem $G''(x) + \pi^2 G(x)$ (Cada sumand està canviat de signe en les respectives funcions) $\boldsymbol{G''(x) + \pi^2 G(x) = \pi^{2n+2} b^n f(x) = \pi^2 a^n f(x)}$ **6**

Considerem la funció: $H(x) = G'(x) \cdot sin(\pi x) - \pi \cdot G(x) \cdot cos\,(\pi x)$.

Derivant: $H'(x) = G''(x) \cdot sin(\pi x) + \pi \cdot G'(x) \cdot cos(\pi x) - \pi \cdot G'(x) \cdot cos(\pi x) + \pi^2 \cdot G(x) \cdot sin(\pi x)$

Per tant: $H'(x) = G''(x) \cdot sin(\pi x) + \pi^2 \cdot G(x) \cdot sin(\pi x) = sin(\pi x) \cdot [G''(x) + \pi^2 \cdot G(x)] = \boldsymbol{\pi^2 \cdot a^n \cdot f(x) \cdot sin(\pi x)}$ per **6**

Pel teorema fonamental del càlcul integral, tenim:

$$\pi^2 a^n \int_0^1 f(x)\, sin(\pi x)\, dx = H(1) - H(0) = G'(1)\, sin(\pi) - \pi G(1)\, cos(\pi) - G'(0)\, sin(0) + \pi G(0)\, cos(0) = \pi[G(1) + G(0)]$$

Tenim, per tant: $\pi^2 a^n \int_0^1 f(x)\, sin(\pi x)\, dx = \pi[G(1) + G(0)] \rightarrow \boldsymbol{\pi a^n \int_0^1 f(x)\, sin(\pi x)\, dx = G(1) + G(0) \in \mathbb{Z}}$ **7** per **5**

Sabem que: $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$ si $0 < x < 1 \longrightarrow 0 < \boldsymbol{\pi\, a^n\, f(x)\, sin(\pi x)} < \boldsymbol{\frac{\pi a^n}{n!}\, sin(\pi x)} < \boldsymbol{\frac{\pi a^n}{n!}}$ ja que $0 < x < 1$. Per tant:

$$0 < \boldsymbol{\pi a^n \int_0^1 f(x)\, sin(\pi x)\, dx} < \int_0^1 \boldsymbol{\frac{\pi a^n}{n!}\, dx} \longrightarrow 0 < \boldsymbol{\pi a^n \int_0^1 f(x)\, sin(\pi x)\, dx} < \boldsymbol{\frac{\pi a^n}{n!}} < \varepsilon < 1 \; \textbf{per 4}$$

Arribem a un absurde, un nombre enter: $\boldsymbol{\pi a^n \int_0^1 f(x)\, sin(\pi x)\, dx}$ 7 entre els valors 0 i 1. Impossible, per tant, π és irracional.

e és irracional

Teorema de Taylor

Si $f', f'', \ldots, f^{(n)}, f^{(n+1)}$ estan definides sobre $[x_0, x] \longrightarrow \boldsymbol{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + R_{n,x_0}(x)}$ **on**

$$\begin{cases} \boldsymbol{R_{n,x_0}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-x_0) \; on \; t \in \,]x_0, x[\;\; R.\,Cauchy} \\ \boldsymbol{R_{n,x_0}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \; on \; t \in \,]x_0, x[\;\; R.\,Lagrange} \end{cases}$$

Si $f^{(n+1)}$ és integrable en $[x_0, x] \longrightarrow$ $\boldsymbol{R_{n,x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\, dt}$

$f(x) = e^x$

$$\boldsymbol{f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n,0}(x) \;\; on \; 0 < R_{n,0}(x) = \int_0^x \frac{e^t}{n!}(x-t)^n dt \le \frac{e^x}{n!}\int_0^x (x-t)^n dt = \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3^x x^{n+1}}{(n+1)!}}$$

$$\boldsymbol{e = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_{n,0}(1) \;\; on \; 0 < R_{n,0}(1) < \frac{3}{(n+1)!}}$$

e és irracional

Ho demostrarem per reducció a l'absurd. Suposem que **e és racional**. És a dir, $e = \frac{a}{b}$ on a i b són naturals i primers entre ells. Elegim $n > b$ i també $n > 3$. D'aquesta manera, tindrem:

$\boldsymbol{\frac{a}{b} = e = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_{n,0}(1) \; on \; 0 < R_{n,0}(1) < \frac{3}{(n+1)!}}$ De manera que: $\boldsymbol{\frac{n! \cdot a}{b} = n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + n! \cdot R_{n,0}(1)}$ Com $\boldsymbol{n > b \rightarrow \frac{n! \cdot a}{b}}$ *és enter*. Tots els termes de l'igualtat són enters per tant.

També deu ser enter: $\boldsymbol{n! \cdot R_{n,0}(1)}$ **.** Però:

$\boldsymbol{0 < R_{n,0}(1) < \frac{3}{(n+1)!} \longrightarrow 0 < n! \cdot R_{n,0}(1) < \frac{3 \cdot n!}{(n+1)!} \longrightarrow 0 < n! \cdot R_{n,0}(1) < \frac{3}{(n+1)} < \frac{3}{4}} < 1$ perquè $\boldsymbol{n > 3}$. És impossible perquè tenim un enter, $\boldsymbol{n! \cdot R_{n,0}(1)}$ entre 0 i 1. El que havíem suposat és fals i, per tant, ***e* és irracional.**