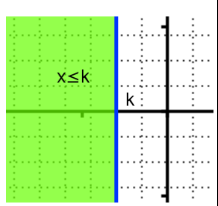
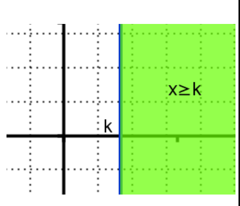
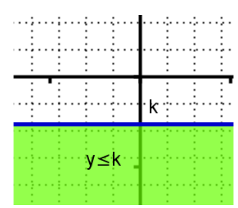
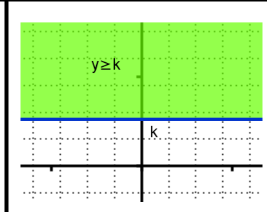
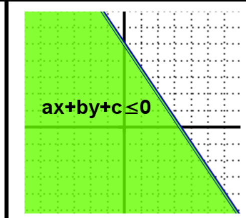
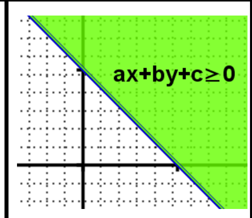
$\sum vf$

Programació lineal. PL

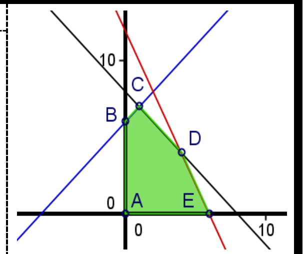
Inequacions lineals. Semiplans

$x \le k$	$x \ge k$	$y \le k$	$y \ge k$	$ax+by+c \le 0$	$ax+by+c \ge 0$
					

Exemple

$$\left.\begin{aligned} x &\ge 0 \\ y &\ge 0 \\ -x+y-6 &\le 0 \\ x+y-8 &\le 0 \\ 2x+y-12 &\le 0 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} A &= r_1 \cap r_2 = (0,0) \\ B &= r_2 \cap r_3 = (0,6) \\ C &= r_3 \cap r_4 = (1,7) \\ D &= r_4 \cap r_5 = (4,4) \\ E &= r_1 \cap r_5 = (6,0) \end{aligned}$$



Problema de programació lineal de dues variables

Consisteix a calcular el valor òptim (màxim o mínim) d'una funció objectiu de dues variables, les quals estan subjectes a certes restriccions. Tant la funció objectiu com les restriccions són lineals. Per resoldre qualsevol problema de programació lineal estudiarem els següents punts: ***elecció de variables, funció objectiu, restriccions, regió factible, conjunt de possibles solucions, solució òptima, rectes de nivell***. ***Dantzig***, matemàtic americà, va idear el mètode *SIMPLEX* per resoldre'ls.

Funció objectiu

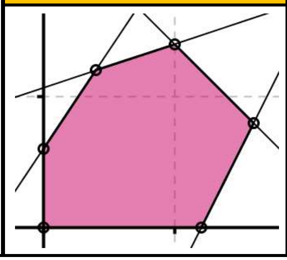
$$z = f(x,y) = ax + by$$

Restriccions

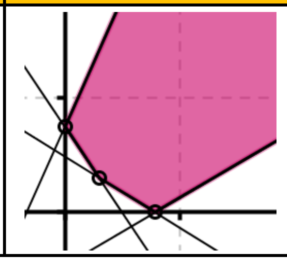
$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &\le 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &\le 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 &\le 0 \\ &\dots \\ a_nx + b_ny + c_n &\le 0 \end{aligned}\right\}$$

Regió factible (sempre convexa)

Fitada

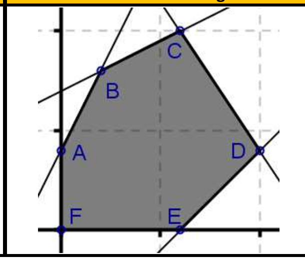


No fitada



Possibles solucions

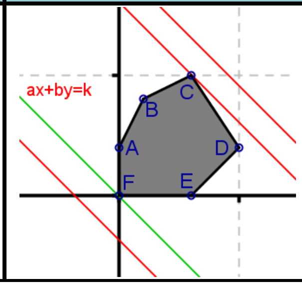
Estan en els vèrtex de la regió factible



Solució òptima

- S'avalua la funció objectiu en cada vèrtex de la regió factible.
- El màxim s'aconsegueix al vèrtex que fa més gran la funció objectiu.
- El mínim s'aconsegueix al vèrtex que fa més menuda la funció objectiu.
- Si hi ha dos vèrtex d'un segment on la funció objectiu aconsegueix el valor òptim, el problema té infinites solucions: tots els punts del segment que determinen els dos vèrtex solució.

Rectes de nivell



Són rectes d'equació: $ax + by = k$ on $k \in R$.

Són rectes paral·leles a la recta $ax + by = 0$, que passa pel punt $(0,0)$.

La solució, si n'hi ha, estarà al primer vèrtex que toquen o a l'últim vèrtex.

Solució entera. Pot ser, el problema sols admet solució entera i la solució òptima no hi és. En aquest cas, per tempteig, es busca la solució entera a les proximitats de la solució òptima. La tècnica ***"Branch and Bound"*** (Ramificar i Esporgar) permet trobar ***la solució entera òptima***.

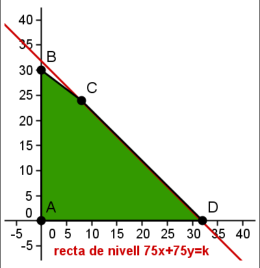
Problemes clàssics de PL

Màxim benefici

Es tracta de saber la quantitat òptima que cal produir perquè els beneficis obtinguts siguen màxims, tenint en compte les restriccions associades a la producció.

Exemple: Una empresa compta amb tres empleats que treballen durant 40 hores setmanals per elaborar dos tipus de guitarres G_1 i G_2. Cada unitat de G_1 requereix 3 hores de treball i cada unitat de G_2, 4 hores. Cada guitarra proporciona 75€ de benefici. Un estudi de mercat aconsella no produir més de 32 guitarres. Calculeu la producció per maximitzar el benefici.

Regió factible



Variables

- x nombre de guitarres G_1
- y nombre de guitarres G_2

Funció objectiu (benefici màxim)

$$z = f(x,y) = 75x + 75y$$

Restriccions

$$\left.\begin{aligned} x &\ge 0 \\ y &\ge 0 \\ 3x + 4y &\le 120 \\ x + y &\le 32 \end{aligned}\right\}$$

Possibles solucions

Tots els punts del segment $\overline{CD}$

$C(8,24)$ i $D(32,0)$

Solució òptima

$x(x \ge 8), y \in N / x + y = 32$

Mínim cost

Es tracta de minimitzar el cost de producció, però assegurant els objectius de fabricació.

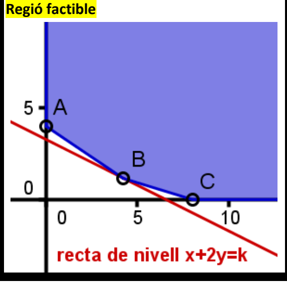
Exemple: En un menjador escolar es vol dissenyar un menú que ha de complir les següents propietats:

- El nombre de calories no ha de ser inferior a 2000.
- Ha de contenir un total, almenys, de 60 g de proteïnes.
- Ha de contenir un total, almenys, de 80 g de greixos.

La taula ens mostra les característiques de dos plats possibles. El preu de 100 g del segon plat és el doble del de 100 g del primer plat. Calculeu quants grams cal servir de cada plat per minimitzar el cost.

	Calor.	Prot.	Greix.
1r plat (100 g)	250	10	15
2n plat (100 g)	800	15	20

Regió factible



Variables

- x paquets de 100 g del 1r plat
- y paquets de 100 g del 2n plat

Funció objectiu (benefici màxim)

$$z = f(x,y) = x + 2y$$

Restriccions

$$\left.\begin{aligned} x &\ge 0 \\ y &\ge 0 \\ 250x + 800y &\ge 2000 \\ 10x + 15y &\ge 60 \\ 15x + 20y &\ge 80 \end{aligned}\right\}$$

Possibles solucions

$A(0,4) \to z_A = 0 + 8 = 8$

$B(4.24, 1.18) \to z_C = 4.24 + 2.36 = 6.60$

$C(8,0) \to z_B = 8 + 0 = 8$

Solució òptima

$x = 424\ g$ i $y = 118\ g$

La dieta

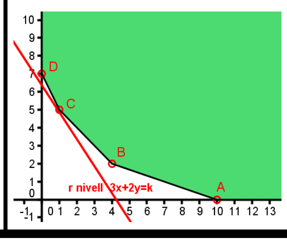
Es tracta de saber quins aliments i quina quantitat s'ha d'incloure en la dieta, de manera que:

- El cost siga mínim.
- Es satisfacen les necessitats nutricionals.

Exemple: Per a l'elaboració d'un aliment per al ramat, una empresa pot adquirir dos productes, P_1 i P_2, i mesclar-los. A la taula es mostren la quantitat de nutrients A, B i C que té cada Kg de P_1 i P_2. També les quantitats mínimes necessàries perquè el producte siga adequat i el cost, en unitats monetàries, de cada Kg de P_1 i P_2. Quina és la mescla que satisfà les necessitats nutricionals de cost mínim?

	A	B	C	Preu
P_1	2	2	1	3
P_2	1	2	3	2
Q. mínimes	7	12	10	

Regió factible



Variables

- $x\ Kg$ del producte P_1
- $y\ Kg$ del producte P_2

Funció objectiu (cost mínim)

$$z = f(x,y) = 3x + 2y$$

Restriccions

$$\left.\begin{aligned} x &\ge 0 \\ y &\ge 0 \\ 2x + y &\ge 7 \\ 2x + 2y &\ge 12 \\ x + 3y &\ge 10 \end{aligned}\right\}$$

Possibles solucions

$A(10,0) \to z_A = 3 \cdot 10 + 2 \cdot 0 = 30$

$B(4,2) \to z_B = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 16$

$C(1,5) \to z_C = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 = 13$

$D(0,7) \to z_D = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 7 = 14$

Solució òptima

$x = 1\ Kg\ de\ P_1$ i $y = 5\ Kg\ de\ P_2$

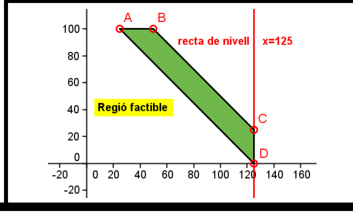
El transport

Es tracta de transportar un producte des de diferents punts d'origen fins a diferents punts de destinació, de manera que:

- El cost del transport siga mínim.
- Els llocs de destinació siguen totalment proveïts.

Exemple: La fàbrica de Frankfurt, que produeix 150 cotxes i, la fàbrica de Milà que produeix 100 cotxes, proveeixen a París que demanda 125 cotxes, a Viena que demanda 100 cotxes i a Praga que demanda 25 cotxes. El cost del transport, en unitats monetàries, de cada cotxe des d'una ciutat a l'altra estan a la taula adjunta. Com s'ha de fer el transport per poder proveir la demanda i que el cost siga mínim?

Cost	París	Viena	Praga
Frankfurt	5	10	15
Milà	20	15	20
Variables	**París**	**Viena**	**Praga**
Frankfurt	x	y	$150-x-y$
Milà	$125-x$	$100-y$	$x+y-125$



Variables

- x cotxes de Franfurt a París
- y cotxes de Frankfurt a Viena

Funció objectiu (cost mínim)

$$z = f(x,y) = -10x + 3750$$

Restriccions

$$\left.\begin{aligned} x &\ge 0 \\ y &\ge 0 \\ 150 - x - y &\ge 0 \\ 125 - x &\ge 0 \\ 100 - y &\ge 0 \\ x + y - 125 &\ge 0 \end{aligned}\right\}$$

Possibles solucions

Tots els punts del segment $\overline{CD}$

$C(125,0)$ i $D(125,25)$

Solució òptima

$x = 125$ i $y \in N / 0 \le y \le 25$