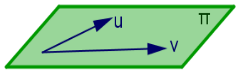
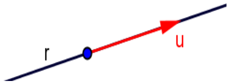
Geometria mètrica

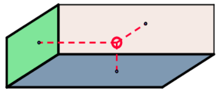
$\sum vf$

Graus de llibertat, lligams i equacions implícites

Un lligam és una equació implícita Queden dos graus de llibertat. Una equació determina un pla. $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$	Dos lligams són dues equacions implícites LI Queda un grau de llibertat. Dues equacions LI determinen una recta. $r \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$	Tres lligams són tres equacions implícites LI Queden zero graus de llibertat. Tres equacions LI determinen un punt. $P \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$







Equació de la recta	Punt(s) de la recta	Vector director de la recta
$r \equiv (x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + \lambda(v_1,v_2,v_3);\ \lambda \in R$	$P(x_0,y_0,z_0)$	$\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$
$r \equiv \frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$	$P(x_0,y_0,z_0)$	$\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$
$r \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases}$	Es calcula donant valors a una incògnita i calculant les altres dues.	$\vec{v} = (A_1,B_1,C_1) \wedge (A_2,B_2,C_2)$

Equació del pla	Punt(s) del pla	Vector associat al pla
$\pi \equiv (x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + \alpha(u_1,u_2,u_3) + \beta(v_1,v_2,v_3)\ \alpha,\beta \in R$	$P(x_0,y_0,z_0)$	$\vec{v_\pi} = (u_1,u_2,u_3) \wedge (v_1,v_2,v_3)$
$\pi \equiv Ax + By + Cz = D$	Es calcula donant valors a dues incògnites i calculant la tercera.	$\vec{v_\pi} = (A,B,C)$

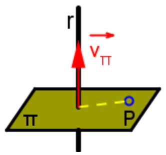
Problemes mètrics

Plans

Pla π que passa per un punt P i és $\perp$ a una recta r

$r \equiv \begin{cases} Q \\ \vec{v} = (v_1,v_2,v_3) \neq \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\pi} \equiv \begin{cases} \boldsymbol{P(x_0,y_0,z_0)} \\ \boldsymbol{\vec{v_\pi} = \vec{v}} \end{cases}$

$\boldsymbol{\pi \equiv v_1(x-x_0) + v_2(y-y_0) + v_3(z-z_0) = 0}$

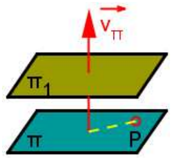


Pla π que passa per un punt P $\parallel$ a un altre π_1

$\pi_1 \equiv Ax + By + Cz = D$; $\vec{v_\pi} = (A,B,C)$

$\pi \equiv \begin{cases} P(x_0,y_0,z_0) \\ \vec{v_\pi} \end{cases}$

$\boldsymbol{\pi \equiv A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0}$



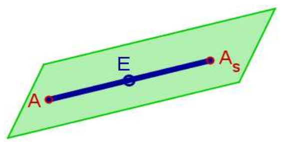
Punt simètric A_s

d'un punt A respecte d'un altre E

$A(a,b,c)$ i $E(e_1,e_2,e_3)$

Si $\boldsymbol{A_s(a_s,b_s,c_s)}$

$\frac{a+a_s}{2} = e_1;\ \frac{b+b_s}{2} = e_2;\ \frac{c+c_s}{2} = e_3$

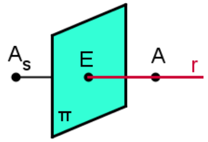


d'un punt A respecte d'un pla π

Calculem la recta r que passa per A i és perpendicular a π.

$r \equiv \begin{cases} A \\ \vec{v_\pi} = \vec{u} \end{cases}$ Calculem $E = r \cap \pi$.

Calculem A_s, punt simètric del punt A respecte del punt E.

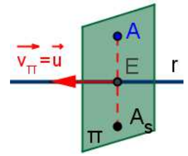


d'un punt A respecte d'una recta r

$r \equiv \begin{cases} Q \\ \vec{u} \neq \vec{0} \end{cases}$

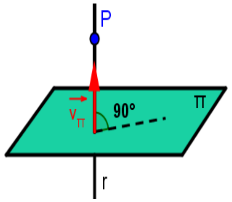
Calculem $\pi \equiv \begin{cases} A \\ \vec{v_\pi} = \vec{u} \end{cases}$ Calculem $E = r \cap \pi$

Calculem A_s, punt simètric del punt A respecte del punt E.



Rectes

Recta r que passa per un punt P i és $\perp$ a un pla π

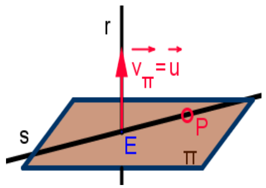


$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

$\vec{v_\pi} = \vec{u} = (A,B,C)$

$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} P \\ \vec{u} \neq \vec{0} \end{cases}}$

Recta s que passa per un punt P i és $\perp$ a una recta r

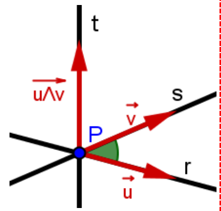


$r \equiv \begin{cases} Q \\ \vec{u} \neq \vec{0} \end{cases}$

Calculem $\pi \equiv \begin{cases} P \\ \vec{v_\pi} = \vec{u} \end{cases}$ i $E \equiv r \cap \pi$

$\boldsymbol{s \equiv \begin{cases} P \\ E \end{cases}}$

Recta t $\perp$ comú a dues rectes que es tallen r i s

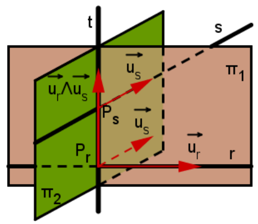


$r \equiv \begin{cases} Q_1 \\ \vec{u} \neq \vec{0} \end{cases}$ i $s \equiv \begin{cases} Q_2 \\ \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases}$

Calculem $P = r \cap s$

$\boldsymbol{t \equiv \begin{cases} P \\ \vec{u} \wedge \vec{v} \end{cases}}$

Recta t $\perp$ comú a dues rectes que s'encreuen r i s



$r \equiv \begin{cases} P_r \\ \vec{u_r} \neq \vec{0} \end{cases}$ i $s \equiv \begin{cases} P_s \\ \vec{u_s} \neq \vec{0} \end{cases}$

$\boldsymbol{t} \equiv \begin{cases} \boldsymbol{\pi_1} \equiv \begin{cases} \boldsymbol{P_r} \\ \boldsymbol{\vec{u_r}} \\ \boldsymbol{\vec{u_r} \wedge \vec{u_s}} \end{cases} \\ \boldsymbol{\pi_2} \equiv \begin{cases} \boldsymbol{P_s} \\ \boldsymbol{\vec{u_s}} \\ \boldsymbol{\vec{u_r} \wedge \vec{u_s}} \end{cases} \end{cases}$

Rectes. Punt genèric

Recta t que passa per un punt P i es recolza en dues rectes que s'encreuen r i s

$r \equiv \begin{cases} A \equiv (a_1,a_2,a_3) \\ \vec{u} = (u_1,u_2,u_3) \neq \vec{0} \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} B \equiv (b_1,b_2,b_3) \\ \vec{v} = (v_1,v_2,v_3) \neq \vec{0} \end{cases}$ i $P(x_0,y_0,z_0)$

Es calculen els punts de les rectes r i s per on passa la recta demanada.

Punt genèric de r: $P_r \equiv (a_1,a_2,a_3) + \alpha(u_1,u_2,u_3)$

Punt genèric de s: $P_s \equiv (b_1,b_2,b_3) + \beta(v_1,v_2,v_3)$

Per calcular P_r i P_s sabem que: $\overrightarrow{P_rP}$ i $\overrightarrow{P_sP}$ són LD. Per tant les coordenades respectives dels vectors són proporcionals. D'aquesta manera calculem α i β i els punts P_r i P_s. La recta demanada serà: $t \equiv \begin{cases} P_r \\ P_s \end{cases}$

Recta t $\perp$ comú a dues rectes que s'encreuen r i s

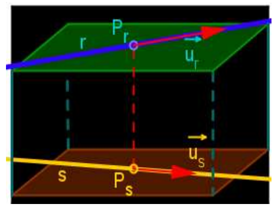
$r \equiv \begin{cases} A \equiv (a_1,a_2,a_3) \\ \vec{u} = (u_1,u_2,u_3) \neq \vec{0} \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} B \equiv (b_1,b_2,b_3) \\ \vec{v} = (v_1,v_2,v_3) \neq \vec{0} \end{cases}$

Es calculen els punts de les rectes r i s per on passa la recta demanada.

Punt genèric de r: $P_r \equiv (a_1,a_2,a_3) + \alpha(u_1,u_2,u_3)$

Punt genèric de s: $P_s \equiv (b_1,b_2,b_3) + \beta(v_1,v_2,v_3)$

Per calcular P_r i P_s sabem que: $\overrightarrow{P_rP_s} \perp \vec{u_r} \rightarrow \overrightarrow{P_rP_s} \cdot \vec{u_r} = 0$ i $\overrightarrow{P_rP_s} \perp \vec{u_s} \rightarrow \overrightarrow{P_rP_s} \cdot \vec{u_s} = 0$. D'aquesta manera calculem α i β i els punts P_r i P_s. La recta demanada serà: $t \equiv \begin{cases} P_r \\ P_s \end{cases}$

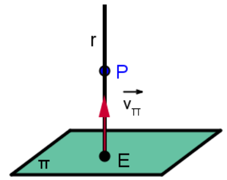


Projecció ortogonal

E d'un punt P sobre un pla π

Calculem $r \equiv \begin{cases} P \\ \vec{v_\pi} \end{cases}$

Calculem $E = \pi \cap r$



s d'una recta r sobre un pla π

Calculem P i Q punts de r. Calculem les projeccions ortogonals sobre π, E i H. $\boldsymbol{s \equiv \begin{cases} E \\ H \end{cases}}$