Geometria mètrica

$\sum vf$

Producte escalar

Si $\vec{u},\vec{v}\in V_3$ definim: $\vec{u}\cdot\vec{v}$ de forma que: $\cdot: V_3 x V_3 \to R$ i $\vec{u}\cdot\vec{v}\in R\ \ \forall\vec{u},\vec{v}\in V_3$

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}\ \ \forall\vec{u},\vec{v}\in V_3$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}\ \ \forall\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V_3$
- $\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})=(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}\ \ \forall\vec{u},\vec{v}\in V_3\ i\ \forall\lambda\in R$
- $\vec{u}\cdot\vec{u}\geq 0\ \ \forall\vec{u}\in V_3$
- $\vec{u}\cdot\vec{u}=0\ \leftrightarrow\ \vec{u}=\vec{0}$

$\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^2$ per conveni

Producte escalar referit a la base canònica

$$Si\ \vec{u}=(u_1,u_2,u_3)\ i\ \vec{v}=(v_1,v_2,v_3)\to\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$$

Norma d'un vector

$$Si\ \vec{u}\in V_3, \|\vec{u}\|=+\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}};\ \ Si\ \vec{u}=(u_1,u_2,u_3)\to\|\vec{u}\|=+\sqrt{u_1{}^2+u_2{}^2+u_3{}^2}$$

Propietats de la norma

- $\|\vec{u}\|^2=\vec{u}^2\ \forall\vec{u}\in V_3$
- $\|\vec{u}\|\geq 0\ \forall\vec{u}\in V_3$
- $\|\vec{u}\|=0\leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$
- $\|k\vec{u}\|=|k|\|\vec{u}\|\ \ \forall\vec{u}\in V_3\ i\ \forall k\in R$
- $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2\leq\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2\ \forall\vec{u},\vec{v}\in V_3$ desigualtat de Cauchy-Schwartz
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|\leq\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|\ \forall\vec{u},\vec{v}\in V_3$ desigualtat triangular o de Mikowski

Vector unitari $\vec{u}\in V_3-\{\vec{0}\}\ és\ unitari\leftrightarrow\|\vec{u}\|=1$

Angle que formen dos vectors

Si $\vec{u},\vec{v}\in V_3-\{\vec{0}\}\to -1\leq\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\leq 1$ per la D. C. Schwartz

Definim: $\cos(\alpha)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$ on $\alpha=\angle\vec{u},\vec{v}\leq 180^o$

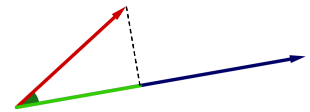
De la definició anterior tenim: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\alpha)$

- Si $\vec{u}\cdot\vec{v}>0\to\alpha<90^o$
- Si $\vec{u}\cdot\vec{v}<0\to\alpha>90^o$
- Si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\to\alpha=90^o$, vectors ortogonals

Projecció ortogonal

Si $\vec{u},\vec{v}\in V_3-\{\vec{0}\}$, definim:

$$P_{\vec{v}}^{\vec{u}}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\to\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{v}\|P_{\vec{v}}^{\vec{u}}$$

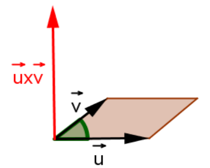


Producte vectorial

Definició.

Siguen $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)\in V_3$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)\in V_3$ definim:

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{u}\,x\,\vec{v}=\left(\begin{vmatrix}u_2&u_3\\v_2&v_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}u_1&u_3\\v_1&v_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}u_1&u_2\\v_1&v_2\end{vmatrix}\right)\in V_3$$



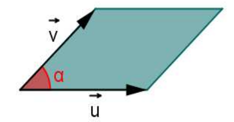
Propietats

- $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}\ \ \forall\vec{u},\vec{v}\in V_3$
- $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}\ \ \forall\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V_3$
- $(k\,\vec{u})\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge(k\,\vec{v})=k\,(\vec{u}\wedge\vec{v})\ \forall\vec{u},\vec{v}\in V_3\ i\ k\in R$
- $\vec{u}\ i\ \vec{v}$ són LD $\to\vec{u}\wedge\vec{v}=0$
- $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\ \ \forall\vec{u},\vec{v}\in V_3{}^*$
- $\vec{u}\wedge\vec{v}$ és perpendicular a: $\vec{u}\ \ i\ \ \vec{v}\ \ \forall\vec{u},\vec{v}\in V_3{}^*$

Interpretació geomètrica

Àrea del paral·lelogram

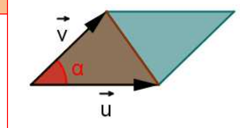
$àrea(p)=base\cdot altura$
$base=\|\vec{u}\|$
$altura=\|v\|\cdot sin(\alpha)$
$àrea(p)=\|\vec{u}\|\cdot\|v\|\cdot sin(\alpha)$
$àrea(p)=\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$



Àrea del triangle

$àrea(t)=\frac{1}{2}\cdot àrea(p)$

$àrea(t)=\frac{1}{2}\cdot\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$



Producte mixt

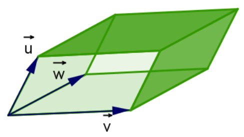
Definició.

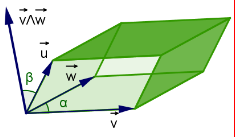
Siguen $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)\in V_3$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)\in V_3$, $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)\in V_3$ definim: $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})\in R$

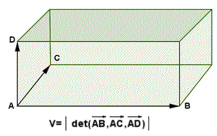
Expressió analítica

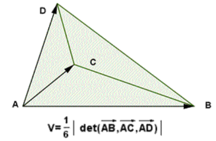
$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\\w_1&w_2&w_3\end{vmatrix}$$

Interpretació geomètrica $|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|=|\vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})|=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\wedge\vec{w}\|\cdot|cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}\wedge\vec{w}})|=V_{paral\cdot lelepipede}$









Propietats. Les propietats es deriven de ser un determinant.

- $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=-[\vec{u},\vec{w},\vec{v}]$ • $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=-[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]$ • $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=-[\vec{w},\vec{v},\vec{u}]$
- $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0\leftrightarrow\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ són LD
- $[a\vec{u},b\vec{v},c\vec{w}]=abc[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\ \ \forall a,b,c\in R$
- $[\vec{u},\vec{v}_1+\vec{v}_2,\vec{w}]=[\vec{u},\vec{v}_1,\vec{w}]+[\vec{u},\vec{v}_2,\vec{w}]$

Propietats mètriques

Angle

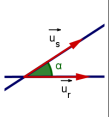
Entre rectes secants o s'encreuen

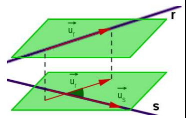
Donades les rectes $r\equiv\begin{cases}P\in E_3\\\vec{u_r}\in V_3\end{cases}$ i $s\equiv\begin{cases}Q\in E_3\\\vec{u_s}\in V_3\end{cases}$

$$cos(\widehat{r,s})=|cos(\widehat{\vec{u_r},\vec{u_s}})|=\frac{|\vec{u_r}\cdot\vec{u_s}|}{\|\vec{u_r}\|\,\|\vec{u_s}\|}$$

Rectes perpendiculars

$$r\perp s\leftrightarrow\vec{u_r}\perp\vec{u_s}\leftrightarrow\vec{u_r}\cdot\vec{u_s}=0$$





Entre plans

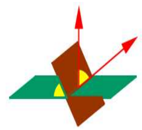
Donats els plans $\pi_1\equiv A_1x+B_1y+C_1z=D_1$ i $\pi_2\equiv A_2x+B_2y+C_2z=D_2$

Els seus vectors associats: $\vec{u_{\pi_1}}=(A_1,B_1,C_1)$ i $\vec{u_{\pi_2}}=(A_2,B_2,C_2)$

$$cos(\widehat{\pi_1,\pi_2})=|cos(\widehat{\vec{u_{\pi_1}},\vec{u_{\pi_2}}})|=\frac{|\vec{u_{\pi_1}}\cdot\vec{u_{\pi_2}}|}{\|\vec{u_{\pi_1}}\|\,\|\vec{u_{\pi_2}}\|}$$

Plans perpendiculars

$$\pi_1\perp\pi_2\leftrightarrow\vec{u_{\pi_1}}\perp\vec{u_{\pi_2}}\leftrightarrow\vec{u_{\pi_1}}\cdot\vec{u_{\pi_2}}=0$$



Entre recta i pla

Donada la recta $r\equiv\begin{cases}P\in E_3\\\vec{u_r}\in V_3\end{cases}$ i el pla $\pi\equiv Ax+By+Cz=D$

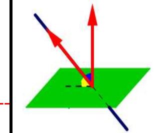
$$sin(\widehat{r,\pi})=|cos(\widehat{\vec{u_r},\vec{u_\pi}})|=\frac{|\vec{u_r}\cdot\vec{u_\pi}|}{\|\vec{u_r}\|\,\|\vec{u_\pi}\|}$$

Recta perpendicular al pla

$r\perp\pi\leftrightarrow\vec{u_r}\parallel\vec{u_\pi}\leftrightarrow\vec{u_r}=\lambda\cdot\vec{u_\pi}$

Recta paral·lela al pla

$r\parallel\pi\leftrightarrow\vec{u_r}\perp\vec{u_\pi}\leftrightarrow\vec{u_r}\cdot\vec{u_\pi}=0$



Distància

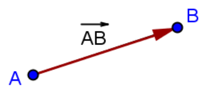
Entre punts

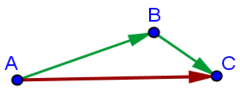
Definició. Donats els punts $A(a_1,a_2,a_3)$ i $B(b_1,b_2,b_3)$, definim:

$$d(A,B)=\|\vec{AB}\|=+\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

Propietats:

- $d(A,B)=d(B,A)$
- $d(A,B)\geq 0$
- $d(A,B)=0\leftrightarrow A=B$
- $d(A,C)\leq d(A,B)+d(B,C)$ desigualtat triangular o de Mikowski





D'un punt a un pla. Entre plans paral·lels

Punt pla.

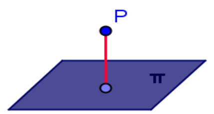
Donats el punt $P(x_0,y_0,z_0)$ i el pla $\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0$

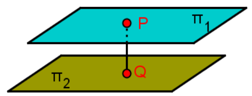
$$d(P,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Plans paral·lels.

Donats els plans $\pi_1\equiv\begin{cases}P\in E_3\\\vec{u_1},\vec{v_1}\in V_3\end{cases}$ i $\pi_2\equiv\begin{cases}Q\in E_3\\\vec{u_2},\vec{v_2}\in V_3\end{cases}$

$$d(\pi_1,\pi_2)=d(P,\pi_2)=d(Q,\pi_1)$$





D'un punt a una recta. Entre rectes paral·leles

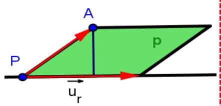
Punt recta. Donats el punt $A\in E_3$ i la recta $r\equiv\begin{cases}P\in E_3\\\vec{u_r}\in V_3\end{cases}$

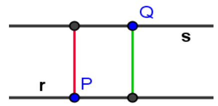
$$d(A,r)=\frac{àrea(p)}{base(p)}=\frac{\|\vec{PA}\wedge\vec{u_r}\|}{\|\vec{u_r}\|};p=paral\cdot lelogram$$

Rectes paral·leles.

Donades les rectes $r\equiv\begin{cases}P\in E_3\\\vec{u_r}\in V_3\end{cases}$ i $s\equiv\begin{cases}Q\in E_3\\\vec{u_r}\in V_3\end{cases}$ paral·leles

$$d(r,s)=d(P,s)=d(Q,r)$$





Entre rectes que s'encreuen

Donades les rectes $r\equiv\begin{cases}P\in E_3\\\vec{u_r}\in V_3\end{cases}$ i $s\equiv\begin{cases}Q\in E_3\\\vec{u_s}\in V_3\end{cases}$ que s'encreuen:

$$d(r,s)=\frac{Volum(p)}{Àrea(p)}=\frac{|[\vec{PQ},\vec{u_r},\vec{u_s}]|}{\|\vec{u_r}\wedge\vec{u_s}\|};p=paral\cdot lelepipede$$