$\sum vf$

Espai afí E_3

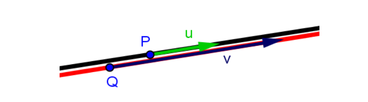
Posició relativa. Estudi vectorial

Posició relativa entre rectes

Donades les rectes $r \equiv \begin{cases} P \in E_3 \\ \vec{u} \in V_3 - \{\vec{0}\} \end{cases}$ i $s \equiv \begin{cases} Q \in E_3 \\ \vec{v} \in V_3 - \{\vec{0}\} \end{cases}$

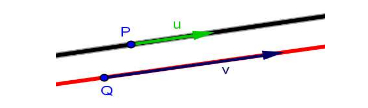
Rectes coincidents

$r = s \leftrightarrow rang(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = 1$



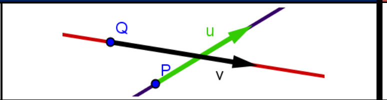
Rectes paral·leles

$r \parallel s \leftrightarrow \begin{cases} rang(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \\ rang(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = 2 \end{cases}$



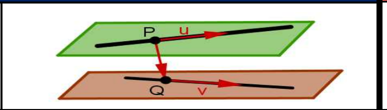
Rectes secants. Es tallen

$r \nmid s \leftrightarrow \begin{cases} rang(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \\ rang(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = 2 \end{cases}$



Rectes que s'encreuen

$r \# s \leftrightarrow \begin{cases} rang(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \\ rang(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}) = 3 \end{cases}$



Posició relativa entre dos plans

Donats els plans:

$\pi_1 \equiv \begin{cases} P \in E_3 \\ \vec{u_1}, \vec{v_1} \in V_3 - \{\vec{0}\}\ LI \end{cases}$ i $\pi_2 \equiv \begin{cases} Q \in E_3 \\ \vec{u_2}, \vec{v_2} \in V_3 - \{\vec{0}\}\ LI \end{cases}$

Considerem:

$M = (\vec{u_1}, \vec{v_1}, \vec{u_2}, \vec{v_2})$ i $M' = (\vec{u_1}, \vec{v_1}, \vec{u_2}, \vec{v_2}, \overrightarrow{PQ})$

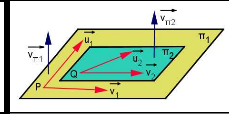
$\pi_1 \equiv \begin{cases} P \in E_3 \\ \vec{v_{\pi_1}} \end{cases}$

$\pi_2 \equiv \begin{cases} Q \in E_3 \\ \vec{v_{\pi_2}} \end{cases}$

Considerem:

$A = (\vec{v_{\pi_1}}, \vec{v_{\pi_2}})$

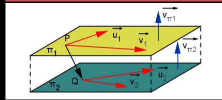
Plans coincidents



$\pi_1 = \pi_2 \leftrightarrow \begin{cases} rang(M) = 2 \\ rang(M') = 2 \end{cases}$

$\pi_1 = \pi_2 \leftrightarrow \begin{cases} rang(A) = 1 \\ P \in \pi_2 \end{cases}$

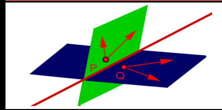
Plans paral·lels



$\pi_1 \parallel \pi_2 \leftrightarrow \begin{cases} rang(M) = 2 \\ rang(M') = 3 \end{cases}$

$\pi_1 \parallel \pi_2 \leftrightarrow \begin{cases} rang(A) = 1 \\ P \notin \pi_2 \end{cases}$

Plans secants. Es tallen



$\pi_1 \nmid \pi_2 \leftrightarrow \begin{cases} rang(M) = 3 \\ rang(M') = 3 \end{cases}$

$\pi_1 \nmid \pi_2 \leftrightarrow rang(A) = 2$

Posició relativa entre recta i pla

Donada la recta r i el pla π:

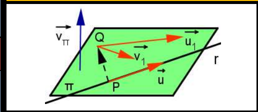
$r \equiv \begin{cases} P \in E_3 \\ \vec{u} \in V_3 - \{\vec{0}\} \end{cases}$ $\quad \pi \equiv \begin{cases} Q \in E_3 \\ \vec{u_1}, \vec{v_1} \in V_3 - \{\vec{0}\}\ LI \end{cases}$

Considerem: $M = (\vec{u_1}, \vec{v_1}, \vec{u})$ i $M' = (\vec{u_1}, \vec{v_1}, \vec{u}, \overrightarrow{PQ})$

$r \equiv \begin{cases} P \in E_3 \\ \vec{u} \in V_3 - \{\vec{0}\} \end{cases}$

$\pi \equiv \begin{cases} Q \in E_3 \\ \vec{v_\pi} \end{cases}$

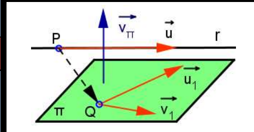
El pla conté la recta



$r \subset \pi \leftrightarrow \begin{cases} rang(M) = 2 \\ rang(M') = 2 \end{cases}$

$r \subset \pi \leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v_\pi} \leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v_\pi} = 0 \\ P \in \pi \end{cases}$

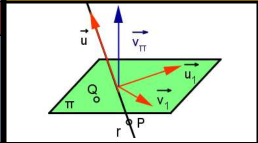
El pla i la recta són paral·lels



$r \parallel \pi \leftrightarrow \begin{cases} rang(M) = 2 \\ rang(M') = 3 \end{cases}$

$r \parallel \pi \leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v_\pi} \leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v_\pi} = 0 \\ P \notin \pi \end{cases}$

La recta talla el pla



$r \nmid \pi \leftrightarrow \begin{cases} rang(M) = 3 \\ rang(M') = 3 \end{cases}$

$r \nmid \pi \leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v_\pi} \neq 0$

Posició relativa. Estudi per equacions implícites. Sistema d'equacions lineals. (A matriu dels coeficients i $\bar{A}$ matriu ampliada)

Posició relativa entre rectes

Donades les rectes:

$r \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases}$ i $s \equiv \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z = D_3 \\ A_4x + B_4y + C_4z = D_4 \end{cases}$

Considerem el sistema:

$$S \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z = D_3 \\ A_4x + B_4y + C_4z = D_4 \end{cases}$$

S és $SC \to$ *té solució*	Si $rang(A) = rang(\bar{A}) = 3 \to r$ i s es tallen
	$rang(A) = rang(\bar{A}) = 2 \to$ r i s són coincidents
S és $SI \to$ *no té solució*	Si $rang(A) = 2$ i $rang(\bar{A}) = 3 \to r$ i s són paral·leles
	Si $rang(A) = 3$ i $rang(\bar{A}) = 4 \to$ r i s s'encreuen

Posició relativa entre dos plans

Donats els plans π_1 i π_2:

$\pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ i $\pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z = D_2$

Considerem el sistema:

$$S \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases}$$

S és $SC \to$ *té solució*	Si $rang(A) = rang(\bar{A}) = 1 \to \pi_1$ i π_2 són coincidents Si $A_2 \neq 0, B_2 \neq 0, C_2 \neq 0,\ D_2 \neq 0$ i $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} \to \pi_1 = \pi_2$
	Si $rang(A) = rang(\bar{A}) = 2 \to \pi_1$ i π_2 són secants
S és $SI \to$ *no té solució*	Si $rang(A) = 1$ i $rang(\bar{A}) = 2 \to \pi_1$ i π_2 són paral·lels Si $A_2 \neq 0, B_2 \neq 0, C_2 \neq 0,\ D_2 \neq 0$ i $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2} \to \pi_1 \parallel \pi_2$

Posició relativa entre recta i pla

Donades la recta r i el pla π:

$r \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases}$ i $\pi \equiv A_3x + B_3y + C_3z = D_3$

Considerem el sistema:

$$S \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z = D_3 \end{cases}$$

S és $SC \to$ *té solució*	Si $rang(A) = rang(\bar{A}) = 2 \to r \subset \pi$
	Si $rang(A) = rang(\bar{A}) = 3 \to r$ *talla a* π
S és $SI \to$ *no té solució*	Si $rang(A) = 2$ i $rang(\bar{A}) = 3 \to r$ és paral·lela a π

Posició relativa de tres plans. (A matriu dels coeficients i $\bar{A}$ matriu ampliada)

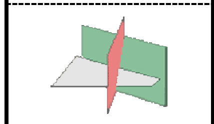
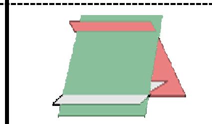
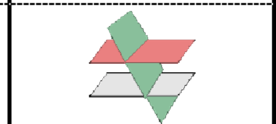
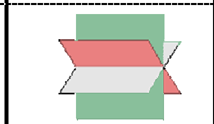
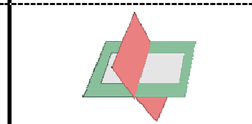
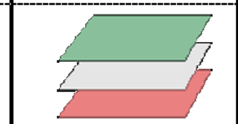
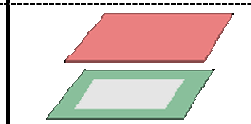
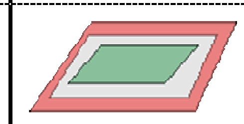
Donats els plans:

$\pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z = D_1$

$\pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z = D_2$

$\pi_3 \equiv A_3x + B_3y + C_3z = D_3$

$r = rang(A)$ i $k = rang(\bar{A})$

$r = k = 3$	$r = 2;\ k = 3$	$r = 2;\ k = 3$ i dos files dels coeficients són proporcionals	$r = 2;\ k = 2$	$r = 2;\ k = 2$ i dos files de l'ampliada són proporcionals	$r = 1;\ k = 2$	$r = 1;\ k = 2$ i dos files de l'ampliada són proporcionals	$r = 1;\ k = 1$
							
Plans secants en un punt	Plans secants dos a dos	Dos plans paral·lels tallats pel tercer	Tres plans secants en una recta	Dos plans coincidents tallats pel tercer	Tres plans paral·lels	Dos plans coincidents paral·lels al tercer	Tres plans coincidents