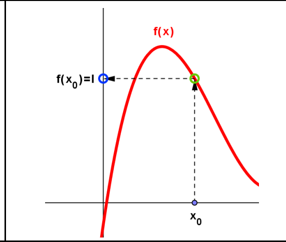
Continuïtat $f: R \longrightarrow R$

Funció contínua en un punt $x = x_0$

$$f(x)\ contínua\ en\ x_0 \leftrightarrow \begin{cases} \exists f(x_0) \\ \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in R \\ f(x_0) = l \end{cases}$$

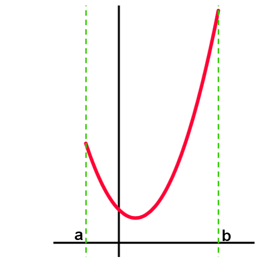


Funció contínua en un interval

$f(x)$ és contínua en un interval $[a,b]$ si és continua en tots els punts de l'interval.

En els punts frontera sols s'estudiaran els límits laterals que tenen sentit. Es a dir:

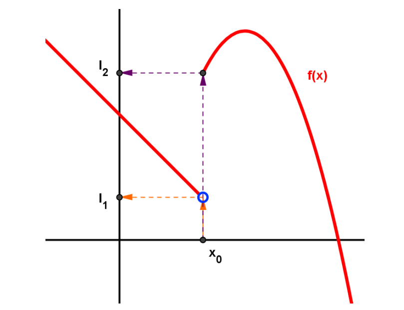
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$



Tipus de discontinuïtat

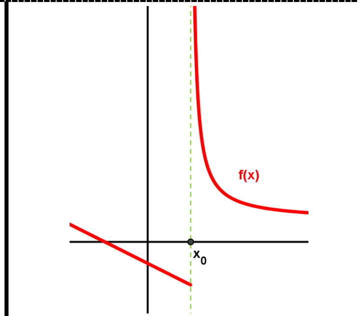
De salt finit

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \in R$$
$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2 \in R$$
$$l_1 \neq l_2$$
$$Salt = |l_2 - l_1|$$



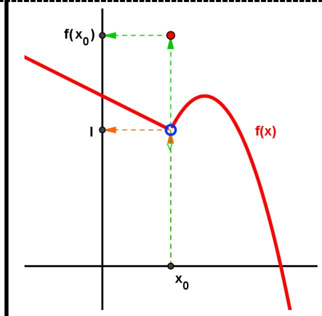
De salt infinit

$$i/ó \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = ó \pm \infty \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = ó \pm \infty \end{cases}$$



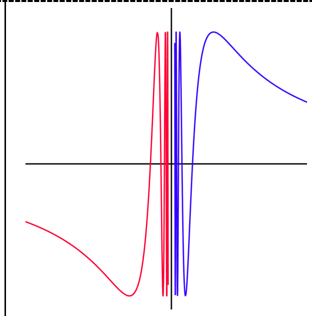
Evitable

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in R$$
$$f(x_0) \neq l$$



En general

$$i/ó \begin{cases} \nexists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \\ \nexists \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \end{cases}$$



Propietats de les funcions contínues $f: R \longrightarrow R$. En totes les propietats, $g(x)$ i $h(x)$ són contínues.

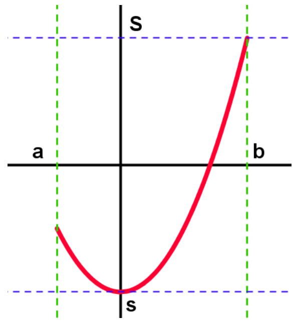
$f(x) = P(x)$ on $P(x)$ és un polinomi	$f(x) = g(x) \pm * \, h(x)$	$f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$	$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$f(x) = Log_a[g(x)]$
$f(x)$ és contínua en R	$f(x)$ és contínua en $D(g) \cap D(h)$	$f(x)$ és contínua en $D(g) \cap D(h) - \{x \in R \,/\, h(x) = 0\}$	$f(x)$ és contínua en $\{x \in R \,/\, g(x) \geq 0\}$	$f(x)$ és contínua en $\{x \in R / g(x) > 0\}$

$(g \circ h)(x)$ és contínua. La composició de funcions contínues és contínua.

Propietats de les funcions contínues en un interval tancat $f: [a,b] \longrightarrow R$

Teorema de la fitació

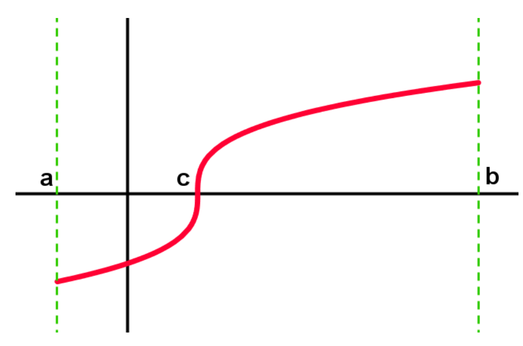
$$f:[a,b] \longrightarrow R\ contínua \Rightarrow f(x) está\ fitada$$



$$s \leq f(x) \leq S\ \forall x \in [a,b]$$

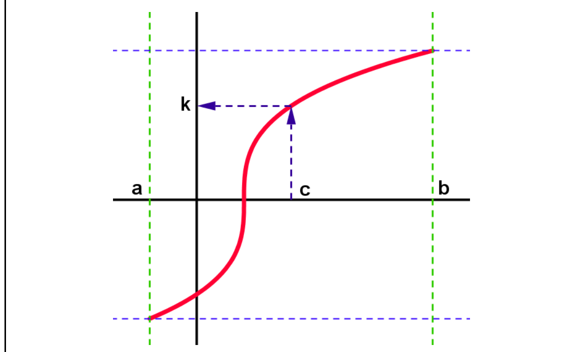
Teorema de Bolzano

$$\left.\begin{matrix} f:[a,b] \longrightarrow R\ contínua \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \end{matrix}\right\} \longrightarrow \exists c \in [a,b] / f(c) = 0$$



T. dels valors intermijos o propietat de Darboux

$$\left.\begin{matrix} f:[a,b] \longrightarrow R\ contínua \\ f(a) \leq k \leq f(b) \end{matrix}\right\} \longrightarrow \exists c \in [a,b] / f(c) = k$$



Teorema de Weierstrass

$$f:[a,b] \longrightarrow R\ contínua \Rightarrow f(x)\ té \begin{cases} màxim\ absolut \\ mínim\ absolut \end{cases}$$