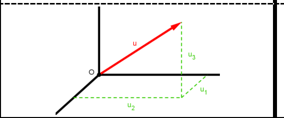
$\sum vf$ Àlgebra. Matrius.

Espai vectorial V_3

Vector $\vec{u} \in V_3$

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ on $u_i \in R; i = 1,2,3$



Suma de vectors

$\left.\begin{array}{l}\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in V_3 \\ \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in V_3\end{array}\right\} \rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \in V_3$

Propietats
- $Si\ \vec{u} \in V_3\ i\ \vec{v} \in V_3 \rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in V_3$
- $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
- $\vec{u} + \overline{-u} = \overline{-u} + \vec{u} = \vec{0}$

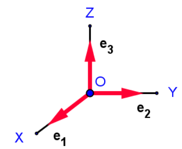
Producte d'un escalar per un vector

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in V_3; k \in R \rightarrow k\vec{u} = (ku_1, ku_2, ku_3) \in V_3$

Propietats
- $Si\ \vec{u} \in V_2\ i\ \lambda \in R \rightarrow \lambda\vec{u} \in V_3$
- $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
- $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
- $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$
- $1\vec{u} = \vec{u}$

Sistema de generadors SG

Un conjunt de vectors $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ de V_3 són SG $\leftrightarrow$ qualsevol vector de V_3 es pot posar com CL d'aquells vectors.
Un espai vectorial direm que és de dimensió finita si pot ser generat per un nombre finit de vectors.



Base d'un espai vectorial

Un conjunt de vectors $\overrightarrow{\boldsymbol{u_1}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u_2}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u_3}}, \ldots, \overrightarrow{\boldsymbol{u_n}}$ de $\boldsymbol{V}_3$ són base $\leftrightarrow$ són LI i SG

Teorema de la base Totes les bases d'un e.v. tenen el mateix nombre de vectors. Aquest nombre és la dimensió de l'espai vectorial. Aixi tenim que $Dim(V_3) = 3$

Conseqüències del T. de la base • En V_3, tres vectors LI formen base. • En V_3, tres vectors SG formen base. • En V_3, tres vectors LI són SG.

Base Canònica de V_3

Els vectors $\overrightarrow{e_1} = (1,0,0) \in V_3$, $\overrightarrow{e_2} = (0,1,0) \in V_3\ i\ \overrightarrow{e_3} = (0,0,1) \in V_3$ són base de V_3 i aquesta base rep el nom de base canònica de V_3

Combinació lineal de vectors CL

Si $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$ direm que $\vec{v}$ és CL de $\vec{u} \leftrightarrow \vec{v} = \lambda\vec{u}$ on $\lambda \in R$
Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$ direm que $\vec{w}$ és CL de $\vec{u}\ i\ \vec{v} \leftrightarrow \vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ on $\alpha, \beta \in R$
Aquest procés pot generalitzar-se a més vectors.

Vectors LD

Si $\vec{u}, \vec{v} \in V_3$ direm que $\vec{u}\ i\ \vec{v}$ són LD $\leftrightarrow$ un d'ells és CL de l'altre
Si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_3$ direm que $\vec{u}, \vec{v}\ i\ \vec{w}$ són LD $\leftrightarrow$ un d'ells és CL dels altres
Aquest procés pot generalitzar-se a més vectors.

Vectors LI

Un conjunt de vectors és LI si no són LD

Matrius

Matriu d'ordre mxn

$A \in \mathcal{M}_{mxn}$ (m files i n columnes) (ordre de la matriu: mxn)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$ on $a_{ij} \in R$, $A = (a_{ij})_{mxn}$

Suma de matrius **(per poder sumar dues matrius han de tindre el mateix ordre)**

Si $A = (a_{ij})\ i\ B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{mxn} \rightarrow A + B = C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{mxn}$ on $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Propietats $Si\ A, B \in \mathcal{M}_{mxn} \rightarrow A + B \in \mathcal{M}_{mxn};\ A + B = B + A,\ \forall A, B \in \mathcal{M}_{mxn}$

$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C,\ \forall A, B, C \in \mathcal{M}_{mxn}$

L'element neutre de la suma és $O_{mxn} = (0)_{mxn}$, $A + O = A, \forall A \in \mathcal{M}_{mxn}$

La matriu oposada de la matriu $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mxn}$ és $-A = (-a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mxn}$

Producte d'un escalar per una matriu

Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mxn}\ i\ \alpha \in R \rightarrow \alpha \cdot A = C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{mxn}$ on $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$

Propietats $Si\ A, B \in \mathcal{M}_{mxn}\ i\ \alpha \in R \rightarrow \alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$

$Si\ \alpha, \beta \in R\ i\ A \in \mathcal{M}_{mxn} \rightarrow (\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

$Si\ \alpha, \beta \in R\ i\ A \in \mathcal{M}_{mxn} \rightarrow (\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$

$Si\ A \in \mathcal{M}_{mxn} \rightarrow 1 \cdot A = A$

Espai vectorial de les matrius

$(\mathcal{M}_{mxn}, +, \cdot)$ és un espai vectorial sobre R

Atenció

El producte de matrius no compleix la propietat commutativa. **En general:**

- $\boldsymbol{A \cdot B \neq B \cdot A}$
- $\boldsymbol{(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm 2\,A \cdot B + B^2}$
- $\boldsymbol{(A + B) \cdot (A - B) \neq A^2 - B^2}$

Producte de matrius

Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mxn}\ i\ B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{nxr} \rightarrow A \cdot B = C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{mxr}$; $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$; $i = 1 \ldots m, j = 1 \ldots r$ **Exemple:** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{A \cdot B} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}_{3x2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}_{2x3} = \begin{pmatrix} -5 & 5 & -19 \\ 5 & 5 & 3 \\ 0 & 10 & -16 \end{pmatrix}_{3x3}$

Tipus de matrius

Matriu fila

Matriu amb una sola fila. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

Matriu columna

Matriu amb una sola columna. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Matriu quadrada

Diagonal principal

Matriu amb igual nombre de files que de columnes. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Matriu triangular superior

Matriu quadrada on els elements que estan per sota la diagonal principal són 0. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Matriu triangular inferior

Matriu quadrada on els elements que estan per dalt de la diagonal principal són 0. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Matriu identitat

Matriu quadrada on la diagonal principal són 1 i la resta 0. $\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriu transposada d'una matriu

Donada da la matriu $A \in \mathcal{M}_{mxn}$ s'anomena matriu transposada de la matriu A a: $A^t \in \mathcal{M}_{nxm}$ que és la matriu que resulta d'intercanviar, respectivament, files per columnes.

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{A^t} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

Matriu simètrica

Donada la matriu quadrada A, direm que és simètrica sii $A^t = A$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriu antisimètrica

Donada la matriu quadrada A, direm que és antisimètrica sii $A^t = -A$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriu inversa

Si $A \in \mathcal{M}_{nxn}$, anomenem matriu inversa d'A a: $A^{-1} \in \mathcal{M}_{nxn}$, una altra matriu que compleix: $\begin{cases} A \cdot A^{-1} = I \\ A^{-1} \cdot A = I \end{cases}$ Exemple: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Mètode de Gauss-Jordan Està permés:
. Intercanviar files. (No està permés les columnes)
. Multiplicar una fila per un número no zero.
. Sumar a una fila una CL de les paral·leles.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{f1\sim f1-f2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{f2\sim f2-f1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{f3\sim f3-f2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{f1\sim f1-f3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{f1\sim f1-f2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Rang d'una matriu

Rang d'una matriu **Nombre de vectors fila que són LI. Coincideix amb el nombre de vectors columna que són LI.** Per calcular el rang d'una matriu emprarem el mètode de Gauss. El **Mètode de Gauss** es basa en les següents propietats:

- Si d'una matriu eliminem una línia de zeros, el rang de la matriu no varia.
- Si d'una matriu eliminem una línia que és CL de les seues paral·leles, el rang de la matriu no varia.
- Si substituïm una línia d'una matriu per ella mateix, més una CL de les seues paral·leles, el rang de la matriu no varia.
- Si multipliquen una línia d'una matriu per un número diferent de zero, el rang de la matriu no varia.
- Si intercanviem d'ordre dues línies paral·leles d'una matriu, el rang de la matriu no varia.
- Si cada línia d'una matriu té, escalonadament, un zero més que l'anterior, sense haver-hi cap línia $\vec{0}$; totes les línies són LI.

Exemple del càlcul del rang d'una matriu. Mètode de Gauss.

$$rang\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{f2\sim f2+2f1} = rang\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{c2\sim c3} = rang\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{f3\sim f3-3f2} = rang\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -16 & -1 & 13 \end{pmatrix} = 3$$

Equacions matricials

Siguen A, B, C matrius quadrades del mateix ordre i $\boldsymbol{\beta \in R}$.

- $\boldsymbol{A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B}$
- $\boldsymbol{A \cdot X + B = C \longrightarrow A \cdot X = C - B \longrightarrow X = A^{-1} \cdot (C - B)}$
- $\boldsymbol{A \cdot X + B \cdot X = C \longrightarrow (A + B) \cdot X = C \longrightarrow X = (A + B)^{-1} \cdot C}$
- $\boldsymbol{\beta \cdot X + A \cdot X = B \longrightarrow \beta \cdot I \cdot X + A \cdot X = B \longrightarrow (\beta \cdot I + A) \cdot X = B \longrightarrow X = (\beta \cdot I + A)^{-1} \cdot B}$

Si A, B, C no són quadrades. Exemple: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 8 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$. Necessariament X és d'ordre 2x2,

$$\boldsymbol{si\ X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 8 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 2a + c = 7 \\ a + 2c = 8 \\ -a + 4c = 10 \\ 2b + d = -1 \\ b + 2d = -2 \\ -b + 4d = -4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = 3 \\ d = -1 \end{cases} \longrightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}$$

Propietats

Producte de matrius
- $\boldsymbol{(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C}$
- $\boldsymbol{A \cdot I = A,\ també\ I \cdot A = A}$
- $\boldsymbol{A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C}$

Transposició
- $\boldsymbol{(A^t)^t = A}$
- $\boldsymbol{(A + B)^t = A^t + B^t}$
- $\boldsymbol{(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t}$

Inversa
- $\boldsymbol{(A^{-1})^{-1} = A}$
- $\boldsymbol{(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}}$
- $\boldsymbol{(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t}$