
Progressions

Progressions

Gauss

Conta la llegenda que un atleta de l'antiga Grècia li va demanar al seu entrenador un mètode per guanyar en les properes Olimpiades, dintre de quatre anys. Al cap d'uns dies l'entrenador li va regalar un joneguet i li va dir: cuida-lo i alimenta-lo bé, i cada matí i cada nit alça-lo per dalt dels teus muscles. Al cap de quatre anys, en les Olimpiades, l'atleta va guanyar la corona de llorer (actual medalla d'or).

També, fa temps, un mestre va demanar als seus alumnes de set anys que sumaren de l'1 al 100 a la seua pizarreta (no hi havia bolis). El mestre, confiant que els alumnes tardarien prou de temps, es va posar a llegir el diari. Uns minuts després un alumne, que li deien Carl Friedrich Gauss, havia fet la suma, 5050. Com ho va fer?

El rei li va dir a l'inventor del escacs: quin premi vols per aquest meravellós invent? Demana el que vullgues!! L'inventor, amb una careta dolseta, li va demanar: 1 granet d'arrós a la primera casella del tauler, 2 granets a la segona, 4 granets a la tercera, 8 granets a la quarta, i així sucessivament fins la casella número 64. El rei va cridar: sols vols això?

Com vorem en aquest tema, les progressions són utilitzades des de temps i a diari per molta gent. Expressions com entrenament progressiu, impost progressiu, creix com una progressió geomètrica i altres, són molt freqüents.

Com sempre, cal definir els conceptes necessaris per a que les Matemàtiques donen solució als problemes plantejats.

Progressió aritmètica

Una *progressió aritmètica* (PA) és una successió de números reals, on cada terme s'obté a partir de l'anterior sumant-li una quantitat constant anomenada diferència ***d***.

Al primer terme de la PA li direm a_1

Al segon terme de la PA li direm a_2

Al tercer terme de la PA li direm a_3

. . .

Al n-essim terme de la PA li direm a_n

De cada PA és important conèixer sempre el primer terme a_1 i la diferència *d*.

Exemples:

$$3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19,\ 23,\ 27,\ 31,\ 35,\ \ldots PA\begin{cases} a_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$$

$$-2,\ 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19,\ 22,\ \ldots PA\begin{cases} a_1 = -2 \\ d = 3 \end{cases}$$

$$9,\ 4,\ -1,\ -6,\ -11,\ -16,\ -21,\ -26, \ldots PA\begin{cases} a_1 = 9 \\ d = -5 \end{cases}$$

Terme general d'una progressió aritmètica, a_n

És una expressió matemàtica que depen de n, mitjançant la qual, podem coneixer qualsevol terme de la progressió. S'anomena $\boldsymbol{a_n}$.

Si coneixem el terme general d'una progressió, aquesta queda perfectament determinada.

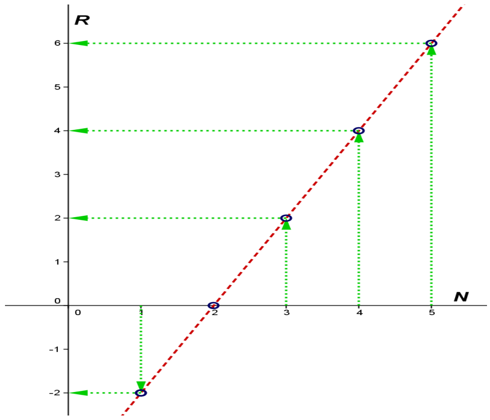
Exemple:

Si el terme general d'una progressió aritmètica és $\boldsymbol{a_n = 2n - 4}$ tindrem:

$$n = 1 \longrightarrow a_1 = 2 \cdot 1 - 4 = -2$$
$$n = 2 \longrightarrow a_2 = 2 \cdot 2 - 4 = 0$$
$$n = 3 \longrightarrow a_3 = 2 \cdot 3 - 4 = 2$$
$$n = 4 \longrightarrow a_4 = 2 \cdot 4 - 4 = 4$$

La progressió serà: $-2,\ 0,\ 2,\ 4, .\ .\ .\ PA \begin{cases} a_1 = -2 \\ d = 2 \end{cases}$

En realitat hem calculat les imatges dels números $n = 1,\ n = 2,\ n = 3$, i $n = 4$ mitjançant la següent funció: $f: N \longrightarrow R$, on la seua expressió matemàtica és $\boldsymbol{f(n) = a_n = 2n - 4}$ i la seua gràfica està en una recta de pendent $m = 2$. Observem que la diferència és $d = 2$.



Càlcul del terme general a_n

Observem la següent successió:

Primer terme	$n = 1$	a_1
Segon terme	$n = 2$	$a_2 = a_1 + d$
Tercer terme	$n = 3$	$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2 \cdot d$
Quart terme	$n = 4$	$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3 \cdot d$
Cinqué terme	$n = 5$	$a_5 = a_4 + d = a_1 + 4 \cdot d$
...	...	...
n-essim terme	$n = n$	$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1) \cdot d$

$$\boxed{\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}}$$

Exemples:

a Calculeu el terme general de: $-3,\ 1,\ 5,\ 9,\ 13, .\ .\ .\ PA \begin{cases} a_1 = -3 \\ d = 4 \end{cases}$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = -3 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 7$

$\boldsymbol{a_n = 4n - 7}$

b Calculeu el terme general de: $5,\ 2,\ -1,\ -4,\ -7, .\ .\ .\ PA \begin{cases} a_1 = 5 \\ d = -3 \end{cases}$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 5 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 8$

$\boldsymbol{a_n = -3n + 8}$

Propietat important en una progressió aritmètica

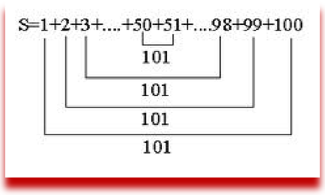
Observem:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	O			∇				□	18	□				∇			O
PA_1	-5	-1	3	7	11	15	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59
	O			∇				□	54	□				∇			O
PA_2	15	13	11	9	7	5	3	1	-1	-3	-5	-7	-9	-11	-13	-15	-17
	O			∇				□	-2	□				∇			O

Com $1+17=4+14=8+9 \longrightarrow a_1+a_{17}=a_4+a_{14}=a_8+a_{10}$

En general, tindrem la següent propietat:

$$Si\ \boldsymbol{m+n=p+q \longrightarrow a_m+a_n=a_p+a_q}$$



Suma dels n primers termes d'una progressió aritmètica, S_n

En una PA tenim que la suma dels n primers termes és: $\boldsymbol{S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}}$

Demostració:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1$$

Sumant ....

$$2\cdot S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\cdots+(a_{n-2}+a_3)+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1)$$

Per la propietat: $Si\ \boldsymbol{m+n=p+q \longrightarrow a_m+a_n=a_p+a_q}$

$$2\cdot S_n=(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)$$

$$2\cdot S_n=n\cdot(a_1+a_n) \longrightarrow S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$$

Exemple:

Calculeu la suma dels 15 primers termes de la següent progressió: $-3,\ 2,\ 7,\ 12,...$

Tenim $PA\begin{cases}a_1=-3\\ d=5\end{cases}$

Calculem el terme general $a_n=a_1+(n-1)\cdot d=-3+(n-1)\cdot 5=5n-8$

Calculem a_{15}, com $a_n=5n-8 \longrightarrow a_{15}=5\cdot 15-8=67$

Sabem que $S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$, per tant:

$$S_{15}=\frac{(a_1+a_{15})\cdot 15}{2}=\frac{(-3+67)\cdot 15}{2}=\frac{64\cdot 15}{2}=32\cdot 15=480$$

Interpolació de mitjos diferencials

Siguen $a, b \in R$. Interpolar n *mitjos diferencials* entre a i b és aconseguir n números reals $a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-2}$ de forma que $a, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-2}, b$ estiguen en progressió aritmètica.

Exemple:

Interpoleu 4 mitjos diferencials entre els números 2 i 22.

Volem trobar 4 números de manera que: 2, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, 22 estiguen en PA.

Volem trobar 4 números de manera que: $2, a_2, a_3, a_4, a_5, 22$ estiguen en PA.

Es tracta per tant d'una $PA\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_6 = 22 \end{cases}$

Calculem la diferència de la PA.

$$\text{Com } a_6 = 22 \longrightarrow a_1 + 5 \cdot d = 22 \longrightarrow 2 + 5 \cdot d = 22 \longrightarrow 5 \cdot d = 20 \longrightarrow d = 4$$

Per calcular els mitjos diferencials:

$$a_2 = a_1 + d = 2 + 4 = 6$$

$$a_3 = a_2 + d = 6 + 4 = 10$$

$$a_4 = a_3 + d = 10 + 4 = 14$$

$$a_5 = a_4 + d = 14 + 4 = 18$$

La progressió seria: $2, \boxed{6}, \boxed{10}, \boxed{14}, \boxed{18}, 22$

Reum de les progressions aritmètiques

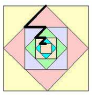
Definició: Una *progressió aritmètica* (PA) és una successió de números reals, on cada terme s'obté a partir de l'anterior sumant-li una quantitat constant anomenada diferència ***d***.

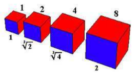
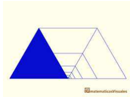
Terme general: És una expressió matemàtica que depen de n, mitjançant la qual, podem coneixer qualsevol terme de la progressió, $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$

Propietat: En una progressió aritmètica $si\ \boldsymbol{m + n = p + q \longrightarrow a_m + a_n = a_p + a_q}$

Suma dels n primers termes: $\boldsymbol{S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}}$

Progressió geomètrica



Una *progressió geomètrica* (PG) és una successió de números reals, on cada terme s'obté a partir de l'anterior multiplicant-lo per una quantitat constant anomenada raó ***r***.

Al primer terme de la PG li direm a_1

Al segon terme de la PG li direm a_2

Al tercer terme de la PG li direm a_3

. . .

Al n-essim terme de la PG li direm a_n

De cada PG és important conèixer sempre el primer terme a_1 i la raó r.

Exemples:

$$3,\ \ 6,\ \ 12,\ \ 24,\ \ 48,\ \ 96,\ldots PG\begin{cases} a_1 = 3 \\ r = 2 \end{cases}$$

$$-2,\ \ 2,\ \ -2,\ \ 2,\ \ -2,\ \ 2,\ \ldots PG\begin{cases} a_1 = -2 \\ r = -1 \end{cases}$$

$$81,\ \ 27,\ \ 9,\ \ 3,\ \ 1,\ \ \tfrac{1}{3},\ \ldots PG\begin{cases} a_1 = 81 \\ d = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Terme general d'una progressió geomètrica, a_n

És una expressió matemàtica que depen de n, mitjançant la qual, podem coneixer qualsevol terme de la progressió. S'anomena $\boldsymbol{a_n}$.

Si coneixem el terme general d'una progressió, aquesta queda perfectament determinada.

Exemple:

Si el terme general d'una progressió geomètrica és $\boldsymbol{a_n = 2^{n-3}}$ tindrem:

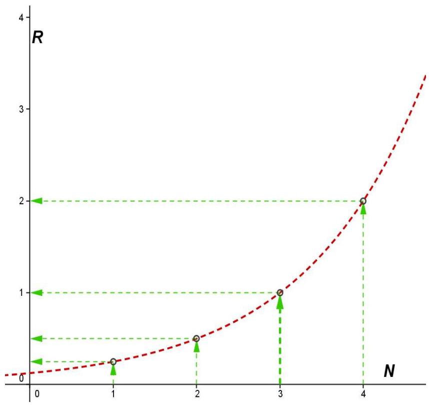
$$n = 1 \longrightarrow a_1 = 2^{1-3} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$n = 2 \longrightarrow a_2 = 2^{2-3} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$n = 3 \longrightarrow a_3 = 2^{3-3} = 2^{0} = 1$$

$$n = 4 \longrightarrow a_4 = 2^{4-3} = 2^{1} = 2$$

La progressió serà: $\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 2,\ldots PG\begin{cases} a_1 = \frac{1}{4} \\ r = 2 \end{cases}$



En realitat hem calculat les imatges dels números $n = 1,\ n = 2,\ n = 3$, i $n = 4$ mitjançant la següent funció: $f\colon N \longrightarrow R$, on la seua expressió matemàtica és $\boldsymbol{f(n) = a_n = 2^{n-3}}$

Càlcul del terme general a_n

Observem la següent successió:

Primer terme	$n = 1$	a_1
Segon terme	$n = 2$	$a_2 = a_1 \cdot r$
Tercer terme	$n = 3$	$a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2$
Quart terme	$n = 4$	$a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^3$
Cinqué terme	$n = 5$	$a_5 = a_4 \cdot r = a_1 \cdot r^4$
...	...	...
n-essim terme	$n = n$	$a_n = a_{n-1} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-1}$

$$\boxed{\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}}$$

Exemples:

a Calculeu el terme general de: $3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48, ...\ PG \begin{cases} a_1 = 3 \\ r = 2 \end{cases}$

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$

$\boldsymbol{a_n = 3 \cdot 2^{n-1}}$

b Calculeu el terme general de: $9,\ 3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9}, ...\ PG \begin{cases} a_1 = 9 \\ r = \frac{1}{3} \end{cases}$

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3^2 \cdot \frac{1}{3^{n-1}} = 3^{2-(n-1)} = 3^{3-n}$

$\boldsymbol{a_n = 3^{3-n}}$

Propietat important en una progressió geomètrica

De forma pareguda a com passsava en les progressions aritmètiques, en les geomètriques hi ha una propietat important que diu: $Si\ \boldsymbol{m + n = p + q \longrightarrow a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q}$

Exemple:

3+11=14

5+9=14

N 1, 2, **3**, 4, **5**, 6, 7, 8, **9**, 10, **11**, 12

PG 2, 4, **8**, 16, **32**, 64, 128, 256, **512**, 1024, **2048**, 4096

32·512=16.384

8·2048=16.384

Producte dels n primers termes d'una progressió geomètrica, P_n

En una PG tenim que el producte dels n primers termes és: $\boldsymbol{P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}}$

Demostració:

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$
$$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \ldots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1$$

Multiplicant

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot (a_3 \cdot a_{n-2}) \cdot \ldots \cdot (a_{n-2} \cdot a_3) \cdot (a_{n-1} \cdot a_2) \cdot (a_n \cdot a_1)$$

Per la propietat: $Si\ \boldsymbol{m + n = p + q \longrightarrow a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q}$

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n) \cdot \ldots \cdot (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n)$$

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n \longrightarrow P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Exemple:

Calculeu el producte dels 10 primers termes de la progressió: $\frac{1}{9},\ \frac{1}{3},\ 1,\ 3,\ 9, . . .$

Tenim $PG \begin{cases} a_1 = \frac{1}{9} \\ r = 3 \end{cases}$

Calculem el terme general $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = \frac{1}{9} \cdot 3^{n-1} = \frac{3^{n-1}}{3^2} = 3^{n-3}$

Calculem a_{10}, com $a_n = 3^{n-3} \longrightarrow a_{10} = 3^{10-3} = 3^7$

Sabem que $P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$, per tant:

$$P_{10} = \sqrt{(a_1 \cdot a_{10})^{10}} = \sqrt{(\frac{1}{9} \cdot 3^7)^{10}} = 3^{25}$$

Suma dels n primers termes d'una progressió geomètrica, S_n

En una PG tenim que la suma dels n primers termes és: $\boldsymbol{S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1}}$

Demostració:

$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ r \cdot S_n = r \cdot a_1 + r \cdot a_2 + \cdots + r \cdot a_{n-3} + r \cdot a_{n-2} + r \cdot a_{n-1} + r \cdot a_n \end{cases}$$
$$r \cdot S_n = a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + r \cdot a_n$$

Restant

$$r \cdot S_n - S_n = r \cdot a_n - a_1 \longrightarrow (r-1) \cdot S_n = r \cdot a_n - a_1 \longrightarrow \boldsymbol{S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1}}$$

Exemple:

Calculeu la suma dels 12 primers termes de la progressió: $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16, . . .$

Tenim $PG \begin{cases} a_1 = 1 \\ r = 2 \end{cases}$

Sabem que $S_n = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r-1}$, per tant:

$$S_{12} = \frac{a_1 \cdot r^{12} - a_1}{r-1} = \frac{1 \cdot 2^{12} - 1}{2-1} = 2^{12} - 1 = 4.096 - 1 = 4.095$$

Suma dels infinits termes d'una progressió geomètrica on $|r| < 1$, S_∞

Sabem que $\boldsymbol{S_n} = \frac{\boldsymbol{a_n \cdot r - a_1}}{\boldsymbol{r-1}} = \frac{\boldsymbol{a_1 \cdot r^n - a_1}}{\boldsymbol{r-1}}$

Si $|r| < 1 \longrightarrow -1 < r < 1$. Si n és molt gran ($n \longrightarrow \infty$) tenim que: $r^n \longrightarrow 0$ és practicament 0.

Per tant si n és molt gran ($n \longrightarrow \infty$) $\boldsymbol{S_\infty} = \frac{\boldsymbol{a_1 \cdot 0 - a_1}}{\boldsymbol{r-1}} = \frac{\boldsymbol{-a_1}}{\boldsymbol{r-1}} = \frac{\boldsymbol{a_1}}{\boldsymbol{1-r}}$

La suma dels infinits termes d'una PG on $|r| < 1$ és $\boldsymbol{S_\infty} = \frac{\boldsymbol{a_1}}{\boldsymbol{1-r}}$

Exemple:

Calculeu: $4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

Ens demanen la suma dels infinits termes d'una $PG \begin{cases} a_1 = 4 \\ r = \frac{1}{2}, -1 < r < 1 \end{cases}$

$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$

Interpolació de mitjos proporcionals

Siguen $a, b \in R$. Interpolar n *mitjos proporcionals* entre a i b és aconseguir n números reals $a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-2}$ de forma que $a, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-2}, b$ estiguen en progressió geomètrica.

Exemple:

Interpoleu 4 mitjos proporcionals entre els números 2 i 486.

Volem trobar 4 números de manera que: 2, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, 486 estiguen en PG.

Volem trobar 4 números de manera que: $2, a_2, a_3, a_4, a_5, 486$ estiguen en PG.

Es tracta per tant d'una $PG \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_6 = 486 \end{cases}$

Calculem la raó r de la PG.

Com $a_6 = 486 \longrightarrow a_1 \cdot r^5 = 486 \longrightarrow 2 \cdot r^5 = 486 \longrightarrow r^5 = 243 \longrightarrow r = 3$

Per calcular els mitjos proporcionals:

$$a_2 = a_1 \cdot r = 2 \cdot 3 = 6$$
$$a_3 = a_2 \cdot r = 6 \cdot 3 = 18$$
$$a_4 = a_3 \cdot r = 18 \cdot 3 = 54$$
$$a_5 = a_4 \cdot r = 54 \cdot 3 = 162$$

La progressió seria: $2, \boxed{6}, \boxed{18}, \boxed{54}, \boxed{162}, 486$

Reum de les progressions geomètriques

Definició: Una *progressió geomètrica* (PG) és una successió de números reals, on cada terme s'obté a partir de l'anterior multiplicant-lo per una quantitat constant anomenada raó ***r***.

Terme general: És una expressió matemàtica que depen de n, mitjançant la qual, podem coneixer qualsevol terme de la progressió. $\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$

Propietat: En una progressió geomètrica *si* $\boldsymbol{m + n = p + q \longrightarrow a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q}$

Producte dels n primers termes: $\boldsymbol{P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}}$

Suma dels n primers termes: $\boldsymbol{S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1}}$

Suma dels infinits termes on $|r| < 1$: $\boldsymbol{S_\infty = \frac{a_1}{1-r}}$

Exercicis proposats

1.- Indiqueu si les següents successions són o no progressions. En cas de ser, de quin tipus són.

a $-3,\ 1,\ 5,\ 9,\ 13,\dots$ b $7,\ 1,\ 16,\ 21,\ 26,\dots$ c $2,\ 6,\ 19,\ 54,\dots$

d $3'7,\ 4,\ 4'3,\ 4'6,\ 4'9,\dots$ e $\frac{2}{3},\ \frac{2}{6},\ \frac{2}{12},\ \frac{2}{24},\dots$ f $-2,\ 4,-8,\ 16,\dots$

g $3,\ 5,\ 3,\ 5,\ 3,\ 5,\dots$ h $\frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8},\ \frac{9}{8},\ \frac{11}{8},\dots$ i $\frac{2}{5},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{7},\ \frac{5}{8},\ \frac{6}{9},\dots$

2.- Calculeu el cinqué terme en cada progressió si sabem el seu terme general.

a $a_n = 2n-3$ b $a_n = 2^n - 3$ c $a_n = \frac{3n-1}{2}$

d $a_n = -n+3$ e $a_n = 5\cdot 3^{n-2}$ f $a_n = -2n$

3.- Calculeu el terme general de les següents progressions:

a $-3,\ 1,\ 5,\ 9,\ 13,\dots$ b $6,\ 4,\ 2,\ 0,-2,\dots$ c $7,\ 4,\ 1,-2,-5,\dots$

d $1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\dots$ e $27,\ 18,\ 12,\ 8,\dots$ f $0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\dots$

4.- El número 46 pertany a la progressió aritmètica de terme general $a_n = 5n-4$?

5.- El número 169 pertany a la progressió aritmètica de terme general $a_n = 7n+8$?

6.- Donada la progressió $-1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\dots$:

a Calculeu el terme general.

b Calculeu a_{20}.

c Calculeu la suma dels 10 primers termes.

d El número 77 pertany a la progressió? Si pertany, quin lloc ocupa?

7.- En una progressió aritmètica la diferència és 7 i $a_8 = 81$, calculeu a_1.

8.- En una progressió aritmètica $a_8 = 23$ i $a_{20} = 59$. Calculeu a_1, d, a_n i S_{10}. El número 44 pertany a la progressió? Si pertany, quin lloc ocupa?

9.- En una progressió aritmètica $a_5 = -9$ i $a_{10} = -19$. Calculeu a_1, d, a_n i S_{12}. El número -30 pertany a la progressió?

10.- En una progressió aritmètica el tercer terme val 14 i la diferència val 4, un terme val 46. Quin lloc ocupa en la progressió?

11.- En una progressió geomètrica $a_8 = 96.304$ i $a_1 = 6$. Calculeu la raó de la progressió.

12.- En una progressió geomètrica on $a_1 = 3$ i $r = 2$, un terme val 192. Quin lloc ocupa en la progressió?

13.- En una progressió geomètrica $a_4 = 15$ i $a_7 = 405$. Calculeu a_1 i r.

14.- Calculeu el terme que ocupa el lloc 100 d'una progressió aritmètica on el primer terme és igual a 4 i la diferència és 5.

15.- El desè terme d'una progressió aritmètica és 45 i la diferència és 4. Trobeu el primer terme.

16.- Sabent que el primer terme d'una progressió aritmètica és 4, la diferència 7 i $a_n = 88$, trobeu el valor de n.

17.- Trobeu el primer terme d'una progressió aritmètica i la diferència, sabent que $a_3 = 24$ i $a_{10} = 66$.

18.- El terme sisè d'una progressió aritmètica és 4 i la diferència $\frac{1}{2}$. Trobeu el terme a_{20}.

19.- Quants termes cal sumar de la progressió aritmètica 2, 8, 14, ... per obtenir com a resultat 1.064?

20.- La suma de n números naturals consecutius presos a partir de 11 és 1.715. Quants termes hem sumat?

21.- Sabent que el cinquè terme d'una progressió aritmètica és 18 i la diferència és 2, troba la suma dels 9 primers termes de la successió.

22.- Es consideren 16 termes consecutius d'una progressió aritmètica. La diferència dels dos extrems és 16, i la suma del quart i el tretzè és 18. Calcula els extrems.

23.- Una progressió aritmètica limitada de 10 termes és tal que la suma dels extrems és igual a 20, i el producte del tercer i el vuitè és 75. Formar els 10 primers termes de la progressió.

24.- Interpoleu quatre mitjos aritmètics entre els números 7 i 27.

25.- Calculeu els costats d'un triangle rectangle sabent que les seves mesures, expressades en metres, estan en progressió aritmètica de diferència 3.

26.- Trobeu tres números que estiguen en progressió aritmètica i tals que, augmentats en 5, 4 i 7 unitats respectivament, siguin proporcionals a 5, 6 i 9.

27.- Calculeu la suma dels múltiples de 59 compresos entre 1.000 i 2.000.

28.- El producte de tres termes consecutius d'una progressió aritmètica és 80 i la diferència és 3. Trobeu aquests termes.

29.- La suma de tres números en progressió aritmètica és 33 i el seu producte 1.287. Trobeu aquests números.

30.- Tres números en progressió aritmètica tenen per producte 16640, el més menut val 20. Calculeu els altres dos.

31.- El producte de cinc números en progressió aritmètica és 12.320 i la seva suma 40. Calculeu aquests números sabent que són enters.

32.- Calculeu tres números sabent que estan en progressió aritmètica, que la seva suma és 18 i que la suma del primer i del segon és igual al tercer disminuït en dues unitats.

33.- La suma dels onze primers termes d'una progressió aritmètica és 176 i la diferència dels que ocupen els llocs extrems és 30. Calculeu els termes de la progressió.

34.- Trobeu quatre números en progressió aritmètica, coneguent la seva suma, que és 22, i la suma dels seus quadrats, 166.

35.- La diferència d'una progressió aritmètica és 4. El producte dels quatre primers termes és 585. Trobeu els termes.

36.- Calculeu els sis primers termes d'una progressió aritmètica sabent que els tres primers sumen -3 i els tres últims 24.

37.- En una progressió aritmètica l'onzè terme excedeix en 2 unitats al vuitè, i el primer i el novè sumen 6. Calculeu la diferència i els termes esmentats.

38.- Trobeu els angles d'un triangle sabent que estan en progressió aritmètica.

39.- Sabent que les mesures dels tres angles d'un triangle estan en progressió aritmètica i que un d'ells mesura 100^{o}, calculeu els altres dos.

40.- Els sis angles d'un hexàgon estan en progressió aritmètica. La diferència entre el major i el menor és 60^{o}. Calculeu el valor de cada angle.

41.- Les longituds dels tres costats d'un triangle rectangle estan en progressió aritmètica i sumen 36 metres. Quant fa cada costat?

42.- Un coronel mana 5.050 soldats i vol formar amb ells un triangle per a una exhibició, de manera que la primera fila tinga 1 soldat, la segona 2, la tercera 3, etc. Quantes files ha d'haver?

43.- Pel lloguer d'una casa s'acorda pagar 800€ al mes durant el primer any, i cada any s'augmentarà el lloguer a 60€ mensuals. Quant es pagarà mensualment al cap de 12 anys?

44.- Les edats de quatre germans formen una progressió aritmètica, i la seva suma és 32 anys. El major té 6 anys més que el menor. Calculeu les edats dels quatre germans.

45.- Un esquiador comença la pretemporada d'esquí fent peses en un gimnàs durant una hora. Decideix incrementar l'entrenament 10 minuts cada dia. Quant de temps haurà de entrenar al cap de 15 dies? Quant temps en total hi haurà dedicat a l'entrenament al llarg de tot el mes de 30 dies?

46.- En una sala de cinema, la primera fila de butaques dista de la pantalla 86 dm, i la sisena, 134 dm. En quina fila hi és una persona si la seva distància a la pantalla és de 230 dm?

47.- Calculeu el terme onzè d'una progressió geomètrica el primer terme és igual a 1 i la raó és 2.

48.- El cinquè terme d'una progressió geomètrica és 81 i el primer és 1. Trobeu els cinc primers termes d'aquesta progressió.

49.- En una progressió geomètrica de primer terme 7 i raó 2, un cert terme és 28.672. ¿Quin lloc ocupa aquest terme?

50.- Interpoleu tres mitjos geomètrics entre els números 8 i 128.

51.- En una progressió geomètrica se sap que el terme quinzé és igual a 512 i que el terme desé és igual a 16. Trobeu el primer terme i la raó.

52.- Divideix el número 124 en tres sumands que formen progressió geomètrica, i on la diferència entre el major i el menor val 96.

54.- Trobeu el producte dels vuit primers termes de la progressió 3, 6, 12, 24, ...

55.- Calculeu la suma dels deu primers termes de la progressió geomètrica 3, 6, 12, 24, ...

56.- La suma dels vuit primers termes d'una progressió geomètrica és 17 vegades la suma dels quatre primers. Què val la raó?

57.- Calculeu la suma dels termes de la progressió il·limitada: 8, 4, 2, 1, ...

58.- Trobeu tres números en progressió geomètrica sabent que la seva suma és 26 i el seu producte 216.

59.- Calculeu el producte dels onze primers termes d'una progressió geomètrica sabent que el terme central val 2.

60.- Tres números en progressió geomètrica sumen 525 i el seu producte val un milió. Calculeu aquests números.

61.- Quants termes s'han pres en una progressió geomètrica, sabent que el primer terme és 7, l'últim 448 i la seva suma 889?

62.- La suma dels set primers termes d'una progressió geomètrica de raó 3 és 7651. Trobeu el primer i el setè termes.

63.- Calculeu tres números en progressió geomètrica el producte és 328509, sabent que el major excedeix en 115 a la suma dels altres dos.

64.- Tres números estan en progressió geomètrica, el segon és 32 unitats més gran que el primer, i el tercer, 96 unitats més gran que el segon. Calculeu-los.

65.- Trobeu els quatre primers termes d'una progressió geomètrica, sabent que el segon és 20 i la suma dels quatre primers és 425.

66.- Dividiu el número 221 en tres parts senceres que formen una progressió geomètrica tal que el tercer terme sobrepassa al primer en 136.

67.- La suma de tres números en progressió geomètrica és 248 i la diferència entre els extrems 192. Trobeu aquests números.

68.- Trobeu quatre números en progressió geomètrica sabent que la suma dels dos primers és 28 i la suma dels dos últims 175.

69.- En una progressió geomètrica, els termes primer i quinzè són 6 i 54, respectivament. Trobeu el terme sisè.

70.- Una progressió geomètrica té cinc termes, la raó és igual a la quarta part del primer terme i la suma dels dos primers termes és 24. Trobeu els cinc termes.

71.- Calculeu x perquè $x - 1, x + 1, 2\,(x + 1)$ estiguin en progressió geomètrica.

72.- A una corda de 700 m de longitud se li donen dos talls, de manera que un dels trossos extrems té una longitud de 100 m. Sabent que les longituds dels trossos estan en progressió geomètrica, determineu la longitud de cada tros.

73.- Calculeu la fracció generatriu del número decimal 0,737373 ... com a suma dels termes d'una progressió geomètrica il limitada.

74.- Es té una cisterna de vi que conté 1.024 litres. L'1 d'octubre es va buidar la meitat del contingut, a l'endemà es va tornar a buidar la meitat del que quedava, i així successivament cada dia. Quina quantitat de vi es va treure el dia 10 d'octubre?

75.- Calculeu:

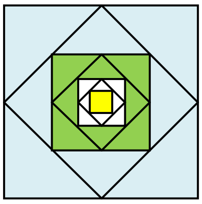
a $16+4+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots$

b $1+\frac{3}{5}+\frac{9}{25}+\frac{27}{125}+\frac{81}{625}+\cdots$

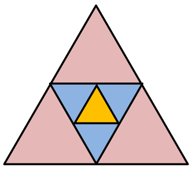
c $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}-\frac{1}{243}+\cdots$

d $3-2+\frac{3}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{2}{9}+\frac{3}{8}-\frac{2}{27}+\cdots$

76.- Donat un quadrat de 1 m de costat, unim 2-2 els punts mitjans dels seus costats, obtenim un nou quadrat, en què tornem a fer la mateixa operació, i així successivament. Troba la suma de les infinites àrees així obtingudes.



77.- El mateix exercici 75, però, amb un triangle equilàter de costat 1m.



78.- Què profunditat tindrà un pou si pel primer metro s'han pagat 750 € i per cada un dels restants 100€ més que per l'anterior, sabent que en total s'han pagat 34.000 €?

79.- Tres números estan en progressió aritmètica i la seua suma és 36. Troba aquests números sabent que si se'ls suma 1, 4 i 43, respectivament, els nous números resultants formen una progressió geomètrica.

80.- Calculeu la suma de tots els números parell de 3 xifres.

81.- Calculeu la suma de tots els multiples de 3 que estan entre 2.000 i 4.000.

82.- Si la suma dels 11 primers termes d'una progressió aritmètica és 110, que val a_6? (Recordeu que $a_1+a_{11}=a_6+a_6=2a_6$)

83.- Calculeu quina quantitat d'arròs demanava l'inventor dels escacs de la pàgina 2.