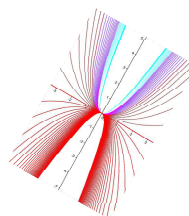




La Paràbola

La paràbola



Introducció

Altra funció polinòmica que estudiarem és la paràbola.

La paràbola

És una funció $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ on } a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0 \quad (\text{funció polinòmica de } 2n \text{ grau})$$

també escriurem $y = ax^2 + bx + c$

Exemples:

$$f(x) = x^2$$

$$f(x) = -x^2$$

$$f(x) = 2x^2 + 4x$$

$$f(x) = -x^2 + 3x$$

$$f(x) = x^2 - 4$$

$$f(x) = -3x^2 + 3$$

$$f(x) = -x^2 + 9$$

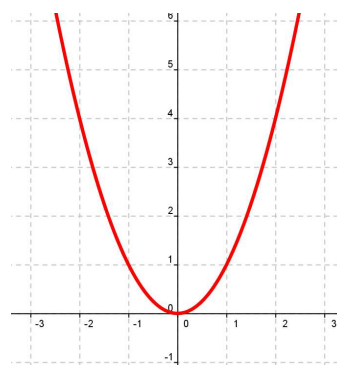
$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$f(x) = -x^2 + 2x - 1$$

La paràbola $f(x) = ax^2$

Representem la paràbola $f(x) = x^2$

X	Y
0	0
1	1
2	4
-1	1
-2	4

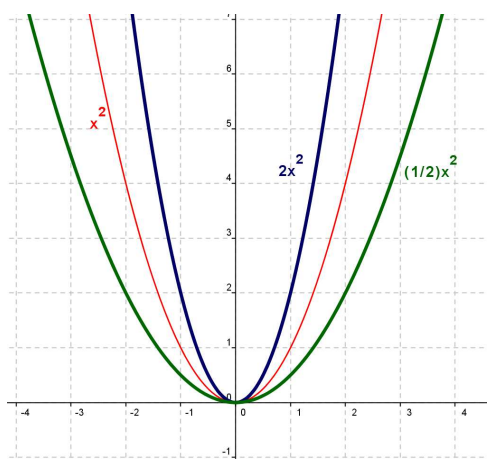


També donant valors representem als mateixos eixos les següents paràboles:

$$f(x) = x^2$$

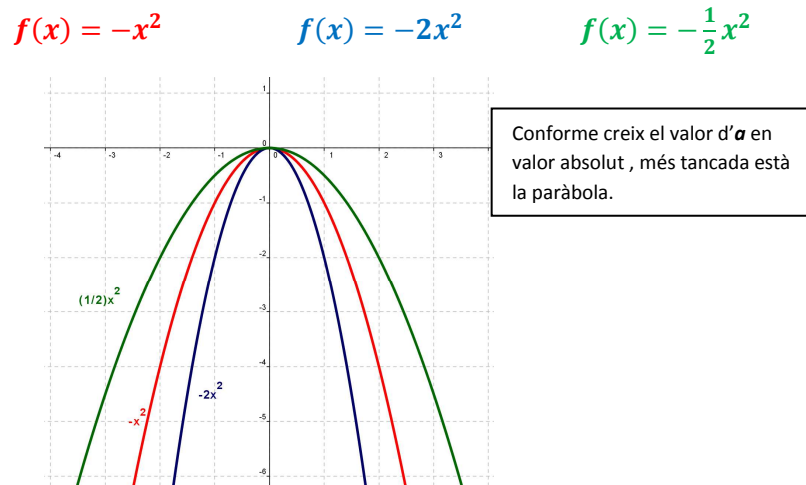
$$f(x) = 2x^2$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2$$



Conforme creix el valor d' a més tancada està la paràbola.

Representem també als mateixos eixos les següents paràboles:



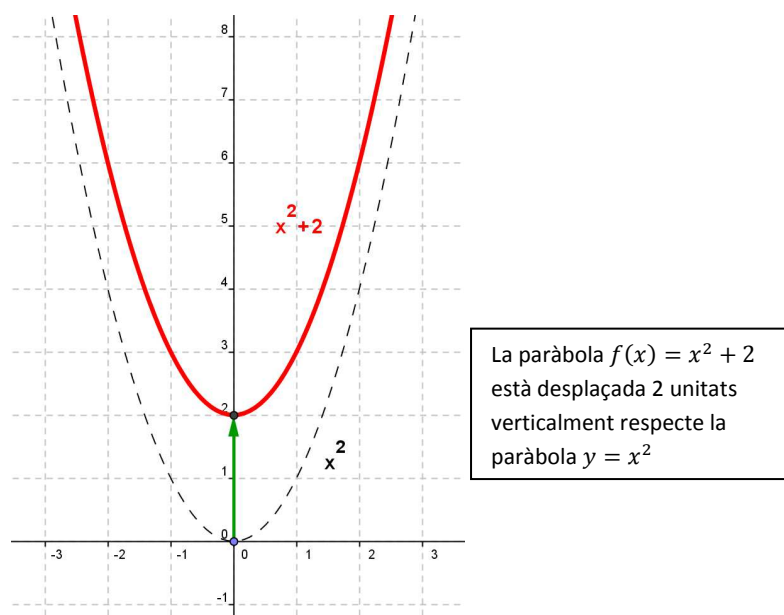
El punt més important, el vèrtex és el punt on la paràbola té el mínim o el màxim.

Resum de $f(x) = ax^2$

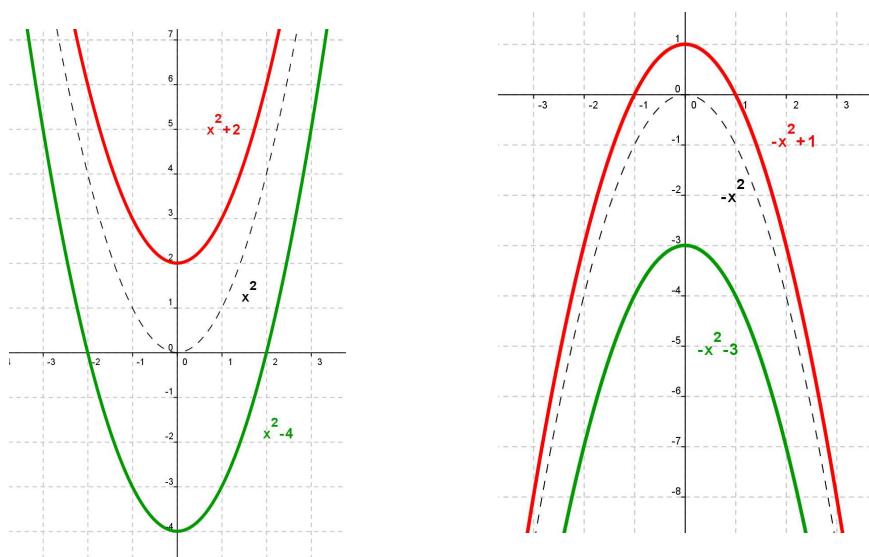
- El vèrtex és el punt $O(0, 0)$.
- Si $a > 0 \rightarrow$ les branques de la paràbola miren cap amunt $\cup$
- Si $a < 0 \rightarrow$ les branques de la paràbola miren cap avall $\cap$
- Conforme creix a en valor absolut, més tancada està la paràbola.
- Talla els eixos en el punt $O(0, 0)$.

La paràbola $f(x) = ax^2 + c$

El valor c trasllada la paràbola c unitats verticalment. Observem les següents paràboles:



Les següents gràfiques ens ajudaran a trobar propietats de les paràboles $f(x) = ax^2 + c$



Resum de $f(x) = ax^2 + c$

- El vèrtex és el punt $V(0, c)$.
- Si $a > 0 \rightarrow$ les branques de la paràbola miren cap amunt $\cup$
- Si $a < 0 \rightarrow$ les branques de la paràbola miren cap avall $\cap$
- Conforme creix a en valor absolut, més tancada està la paràbola.
- Tall amb els eixos:

Eix Y $x = 0 \rightarrow f(0) = c \rightarrow (0, c)$

Eix X $f(x) = 0$

$$ax^2 + c = 0 \rightarrow ax^2 = -c \rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Com vegem, hi ha tall amb l'eix X $\leftrightarrow a$ i c tenen signe diferent.

Els punts de tall amb l'eix X

són: $\left(\sqrt{\frac{-c}{a}}, 0\right)$ i $\left(-\sqrt{\frac{-c}{a}}, 0\right)$

Exercici: Estudieu i representeu la paràbola $f(x) = -x^2 + 4 \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases}$

- Com $a < 0 \rightarrow \cap$
- Vèrtex $V(0, 4)$
- Tall amb els eixos:

Eix Y $x = 0 \rightarrow f(0) = c \rightarrow (0, 4)$ tall eix Y

Eix X $f(x) = 0$

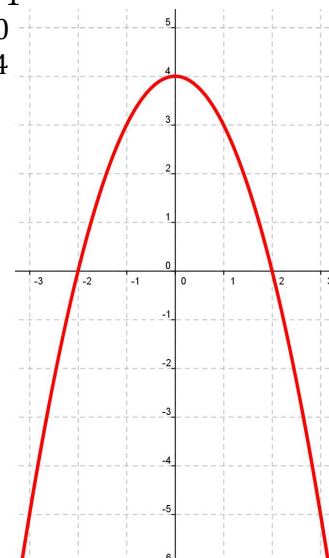
$$-x^2 + 4 = 0 \rightarrow -x^2 = -4 \rightarrow x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4} = \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases} \text{ Tall eix X: } (2, 0) \text{ i } (-2, 0)$$

Amb aquestes dades ja podem representar la

paràbola. Si cal, farem una taula de valors.

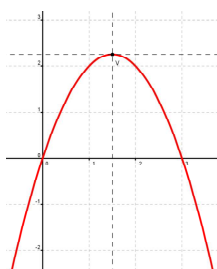
x	1	-1	3	-3
$f(x)$	3	3	-5	-5



La paràbola $f(x) = ax^2 + bx$

El terme bx desplaça horitzontalment la paràbola. Mireu les següents gràfiques:

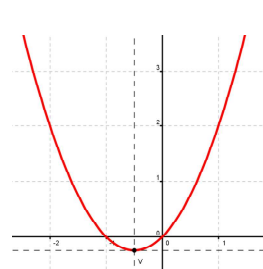
$$f(x) = -x^2 + 3x$$



$$f(x) = 2x^2 - 4x$$



$$f(x) = x^2 + x$$



Quan a i b tenen el mateix signe, la paràbola es desplaça cap a l'esquerre.

Quan a i b tenen diferent signe, la paràbola es desplaça cap a la dreta.

Resum de $f(x) = ax^2 + bx$

- Si $a > 0$ → les branques de la paràbola miren cap amunt $\cup$
- Si $a < 0$ → les branques de la paràbola miren cap avall $\cap$
- Conforme creix a en valor absolut, més tancada està la paràbola.
- Tall amb els eixos:

Eix Y $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0,0)$ sempre!

Eix X $f(x) = 0$

$$ax^2 + bx = 0 \rightarrow x(ax + b) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{a} \end{cases}$$

Punts de tall $(0,0)$ i $(\frac{-b}{a}, 0)$.

El punt mig d'aquests ens dona el valor v_x del vèrtex: $v_x = \frac{-b}{2a}$

- **El vèrtex és el punt $V(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a}))$ en totes les paràboles.**

Exercici: Estudieu i representeu la paràbola $f(x) = -x^2 + 4x \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow v_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$

- Com $a < 0 \rightarrow \cap$
- Vèrtex $V(2,4)$; $f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 = -4 + 8 = 4$
- Tall amb els eixos:

Eix Y $x = 0 \rightarrow f(0) = c \rightarrow (0,0)$ tall eix Y

Eix X $f(x) = 0$

$$-x^2 + 4x = 0 \rightarrow x(-x + 4) = 0$$

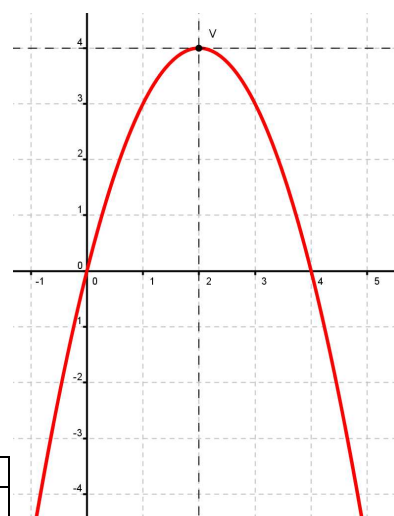
$$x = 0, x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$$

Tall eix X: $(0,0)$ i $(4,0)$

Amb aquestes dades ja podem representar la paràbola.

Si cal, farem una taula de valors.

x	1	-1	3	5
$f(x)$	3	-5	3	-5



La paràbola $f(x) = ax^2 + bx + c$

Ja podem estudiar les propietats d'aquesta paràbola.

- Si $a > 0 \rightarrow$ les branques de la paràbola miren cap amunt $\cup$
- Si $a < 0 \rightarrow$ les branques de la paràbola miren cap avall $\cap$
- Conforme creix a en valor absolut, més tancada està la paràbola.
- Tall amb els eixos:

Eix Y $x = 0 \rightarrow f(0) = c \rightarrow (0, c)$ sempre!

Eix X $f(x) = 0$

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Els punts de tall amb l'eix X són:

$$\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0 \right) \text{ i } \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0 \right)$$

- El vèrtex és el punt $V\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ en totes les paràboles.

Exemple: Estudieu i representeu la següent paràbola: $f(x) = x^2 - 2x - 3$ $\begin{cases} a = 1 > 0 \rightarrow \cup \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases}$

Tall amb els eixos:

Eix Y $x = 0 \rightarrow f(0) = -3 \rightarrow (0, -3)$

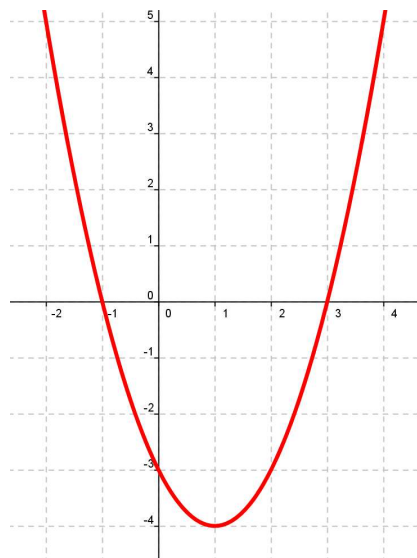
Eix X $f(x) = 0$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} \rightarrow (3, 0) \text{ i } (-1, 0)$$

El vèrtex és el punt $V(1, -4)$.

Ja podem representar la paràbola. Si cal, farem una taula de valors.

x	$f(x)$
2	-3
4	5
-2	5



Exercicis proposats

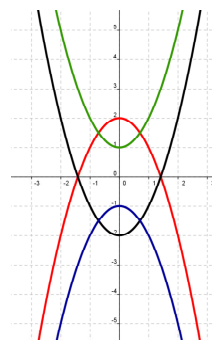
1.- Indiqueu quina és la gràfica de cada paràbola:

a $f(x) = -x^2 + 2$

b $f(x) = x^2 + 1$

c $f(x) = x^2 - 2$

d $f(x) = -x^2 - 1$



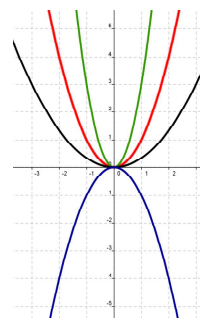
2.- Indiqueu quina és la gràfica de cada paràbola:

a $f(x) = x^2$

b $f(x) = 3x^2$

c $f(x) = \frac{1}{3}x^2$

d $f(x) = -x^2$



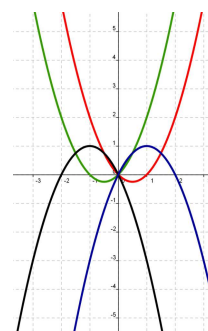
3.- Indiqueu quina és la gràfica de cada paràbola:

a $f(x) = x^2 - x$

b $f(x) = x^2 + x$

c $f(x) = -x^2 + 2x$

d $f(x) = -x^2 - 2x$



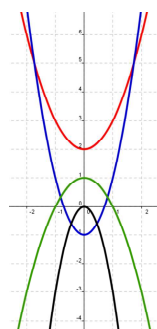
4.- Indiqueu que val l'ordenada en l'origen (c) en cada paràbola:

a $f(x) = x^2 + c$

b $f(x) = -x^2 + c$

c $f(x) = 2x^2 + c$

d $f(x) = -2x^2 + c$



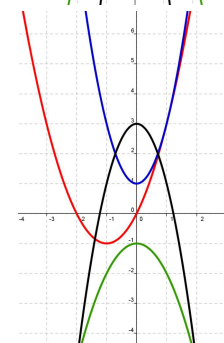
5.- Indiqueu les paràboles que tallen a l'eix X:

a $f(x) = x^2 + 2x$

b $f(x) = -x^2 - 2$

c $f(x) = 2x^2 + 1$

d $f(x) = -2x^2 + 3$



6.- Estudieu i representeu les paràboles:

a $f(x) = -x^2 + 4$

b $f(x) = x^2 + 1$

c $f(x) = x^2 - 2$

d $f(x) = -x^2 + 1$

e $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

f $f(x) = 2x^2 + 2x - 4$

g $f(x) = x^2 - 6x + 8$

h $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

i $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

j $f(x) = x^2 + 2x + 2$

k $f(x) = x^2 - 3x - 4$

l $f(x) = -x^2 + 2x - 2$

7.- Calculeu els punts de tall de les funcions $f(x)$ i $g(x)$.

a $f(x) = -x^2 + 4$

$g(x) = x + 4$

b $f(x) = x^2 + 1$

$g(x) = 2x^2$

c $f(x) = x^2 - 2$

$g(x) = x^2 - 2x$

d $f(x) = -x^2 + 1$

$g(x) = x^2 - 7$

8.- Calculeu el valor d' m per a què:

a $f(x) = -x^2 + 4mx + 1$

passa pel punt $A(1,4)$

b $f(x) = mx^2 + x + 1$

passa pel punt $A(-1,3)$

c $f(x) = x^2 - 2m$

passa pel punt $A(2,2)$

d $f(x) = -x^2 - 2mx + 1$

passa pel punt $A(1,-4)$