Inequacions

Inequació d'una variable

És una expressió de la forma $f(x) \sim 0$, on l'operador $\sim$ pot ser $\begin{bmatrix} < \\ > \\ \leq \\ \geq \end{bmatrix}$ i $f(x)$ depen de la variable $\boldsymbol{x}$.

Solució d'una inequació. Conjunt solució

Direm que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ és solució de l'inequació $f(x) \sim 0 \leftrightarrow f(a) \sim 0$

Al conjunt format per totes les solucions de l'inequació li direm conjunt solució de l'inequació.

Càlcul de la solució d'una equació

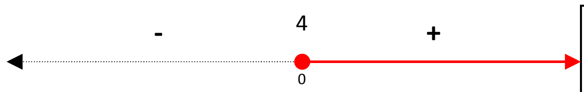
Per calcular el conjunt solució de l'inequació $f(x) \sim 0$, estudiarem el signe d' $f(x)$.

Exemple:

$3x - 7 \geq 5$

$3x - 12 \geq 0$

Signe$(3x - 12)$



$$\boxed{\begin{aligned} 3x - 12 &= 0 \\ 3x &= 12 \\ x &= 4 \end{aligned}}$$

Solució: $I = [4, +\infty[$

Observem que, al ser $\geq$ l'operador relacional de l'inequació, l'interval que és solució té l'extrem esquerre tancat.

Inequacions polinòmiques

És una expressió de la forma $P(x) \sim 0$, on l'operador $\sim$ pot ser $\begin{bmatrix} < \\ > \\ \leq \\ \geq \end{bmatrix}$ i $P(x)$ és un polinomi.

Càlcul de la solució d'una inequació polinòmica

Per calcular el conjunt solució de l'inequació $P(x) \sim 0$, estudiarem el signe d' $P(x)$.

Per estudiar el signe del polinomi $P(x)$:

- Calcularem les seues arrels i a continuació les representarem a la recta real $\mathcal{R}$.
- Estudiarem el signe del polinomi en cada subinterval que determinen les arrels del polinomi.

Per expressar el conjunt solució tindrem en compte:

- L'operador relacional de l'inequació:

  Si l'operador és $\leq$ ó $\geq$, l'interval solució tindrà els extrems tancats.

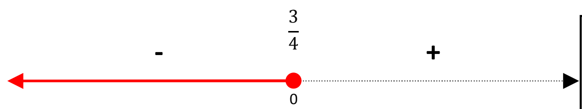
  Si l'extrem és $+\infty$ ó $-\infty$, l'interval solució sempre estarà obert en aquestos extrems.

- Per expressar la solucció pot emplear-se l'operador de conjunts $\cup$.
- Si no hi ha solució, emplearem el conjunt buit $\emptyset$

Exemple1:

$4x - 3 \leq 0$

Signe$(4x-3)$



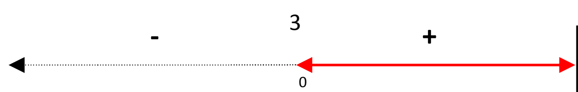
$$\begin{aligned} 4x - 3 &= 0 \\ 4x &= 3 \\ x &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Solució: $I = \left]-\infty, \frac{3}{4}\right]$

Exemple2:

$x - 3 > 0$

Signe$(x-3)$



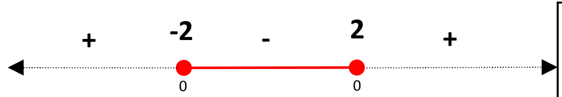
$$\begin{aligned} x - 3 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Solució: $I =]3, +\infty[$

Exemple3:

$x^2 - 4 \leq 0$

Signe(x^2-4)



$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= 0 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Solució: $I = [-2\,, 2]$

Exemple4:

$2x^2 \leq -2$

$2x^2 + 2 \leq 0$

Signe$(2x^2+2)$ +

$2x^2 + 2 = 0$
$2x^2 = -2$
$x^2 = -1$
Impossible

Solució: $I = \emptyset$

Exemple5:

$x^2 - 6x + 9 \leq 0$

		3	
Signe$(x^2 - 6x + 9)$	+	0	+

$x^2 - 6x + 9 = 0$
$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = 3$

Solució: $I = \{3\}$

Exemple6:

$(x-6)(x+2)(x-1) > 0$

		-2		1		6	
Signe$(x-6)$	-		-		-		+
Signe$(x+2)$	-		+		+		+
Signe$(x-1)$	-		-		+		+
Signe$(x-6)(x+2)(x-1)$	-		+		-		+

$x - 6 = 0$
$x = 6$

$x + 2 = 0$
$x = -2$

$x - 1 = 0$
$x = 1$

Solució: $I =]-2,1[\cup]6,+\infty[$

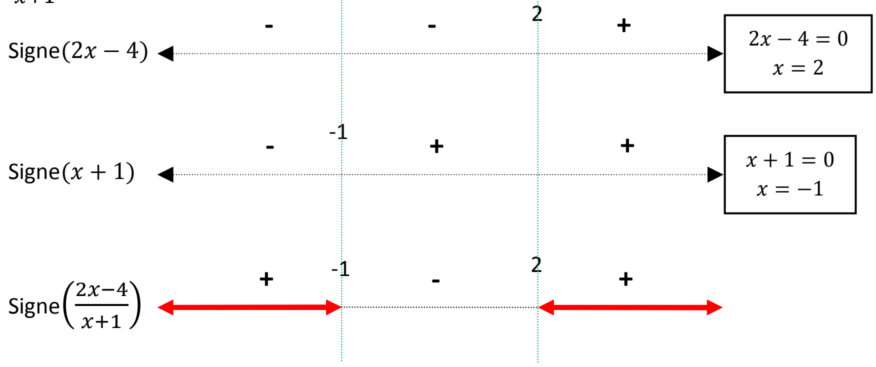
Càlcul de la solució d'inequacions de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} \begin{bmatrix} < \\ > \\ \leq \\ \geq \end{bmatrix} 0$

Estudiarem el signe del quocient $\frac{P(x)}{Q(x)}$

En la solució eliminarem els valors que anul·len el denominador.

Exemple1:

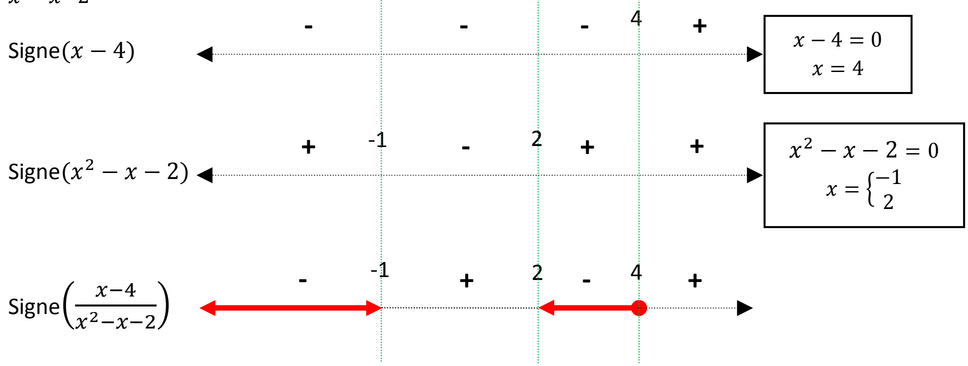
$\frac{2x-4}{x+1} > 0$



Solució: $I =]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$

Exemple2:

$\frac{x-4}{x^2-x-2} \leq 0$



Solució: $I =]-\infty,-1[\cup]2,4]$

$x=-1$ i $x=2$ no són del conjunt solució ja que anul·len el denominador.

Sistema d'inequacions d'una variable

És una expressió de la forma $\left.\begin{matrix} f(x)\sim 0 \\ g(x)\sim 0 \end{matrix}\right\}$ on $f(x)\, i\ g(x)$ depenen d'$\boldsymbol{x}$ i l'operador $\sim$ pot ser: $\begin{bmatrix} < \\ > \\ \leq \\ \geq \end{bmatrix}$

El sistema pot estar format per més de dues inequacions.

Solució d'un sistema d'inequacions. Conjunt solució

Direm que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ és solució del sistema d'inequacions si acompleix totes les inequacions del sistema.

Càlcul de la solució d'un sistema d'inequacions

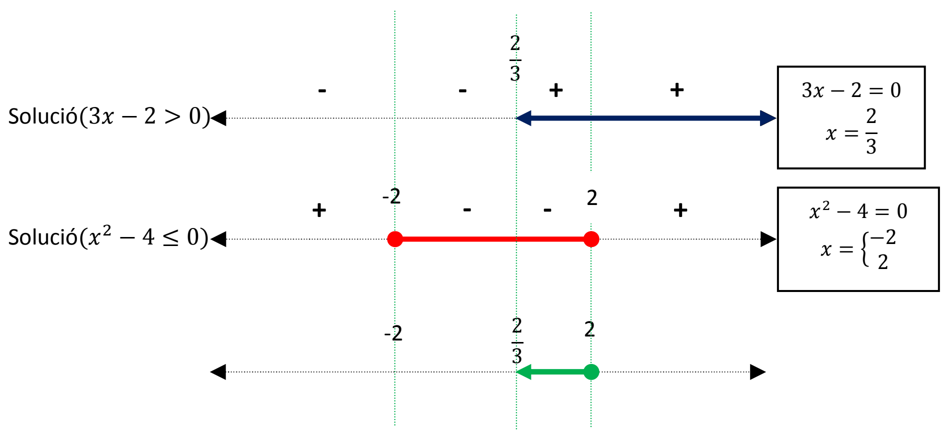
Per calcular el conjunt solució:

1.- calcularem la solució de cada inequació.

2.- Calcularem la intersecció dels conjunts solució de cada inequació.

Exemple1:

$$\left.\begin{matrix} 3x - 2 > 0 \\ x^2 - 4 \leq 0 \end{matrix}\right\}$$



Solució de l'inequació: $I = \left]\frac{2}{3}, 2\right]$

Exercicis proposats

1.- Calculeu les solucions de les següents inequacions:

a $3x-4<0$

b $-2x+2<x-1$

c $5x-4\geq 0$

d $7x-4\leq 10$

2.- Calculeu les solucions de les següents inequacions:

a $x^2-4x<0$

b $-2x^2+2>x-1$

c $5x^2-5\geq 0$

d $7x^2+4\leq 0$

3.- Calculeu les solucions de les següents inequacions:

a $(x-3)(x+2)<0$

b $-2(x-1)(x-5)>0$

c $(5x-5)(x+1)x\geq 0$

d $(7x-3)(x+4)\leq 0$

4.- Calculeu les solucions de les següents inequacions:

a $x^3-4x<0$

b $-2x^2+2>x^2-1$

c $5x^3-5\geq 0$

d $7x^3+4x^2\leq 0$

5.- Calculeu les solucions de les següents inequacions:

a $\frac{x+2}{2x-6}<0$

b $\frac{x^2-9}{x-1}\leq 0$

6.- Calculeu les solucions dels següents sistemes d'inequacions:

a $\left.\begin{array}{r} 2x-2>0 \\ x^2-1\le 0 \end{array}\right\}$

b $\left.\begin{array}{r} x-2<0 \\ x^2-2x\le 0 \end{array}\right\}$

c $\left.\begin{array}{r} -x-2>0 \\ 2x^2+2\le 0 \end{array}\right\}$

d $\left.\begin{array}{r} x-5<0 \\ x^2-9>0 \end{array}\right\}$

7.- Calculeu les solucions dels següents sistemes d'inequacions:

a $\left.\begin{array}{r} x+2>-x+4 \\ x^2-x>0 \end{array}\right\}$

b $\left.\begin{array}{r} x^2-2x\ge 0 \\ x^3-x\le 0 \end{array}\right\}$

c $\left.\begin{array}{r} -3x-6>0 \\ 2x^2+2x\le 0 \end{array}\right\}$

d $\left.\begin{array}{r} x-5<0 \\ x^2-3x>0 \end{array}\right\}$

8.- Calculeu les solucions dels següents sistemes d'inequacions:

a $\left.\begin{array}{r} x+4>0 \\ x-3\le 0 \\ x^2-5x\le 0 \end{array}\right\}$

b $\left.\begin{array}{r} 2x-4>0 \\ x\ge 0 \\ x^2-1\le 0 \end{array}\right\}$

c $\left.\begin{array}{r} 3-x>0 \\ x-1\ge 0 \\ x^2-x\le 0 \end{array}\right\}$